EXO1 : Serie (04)

$\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$((x,y),(x',y')) \longrightarrow \varphi((x,y),(x',y')) = \frac{(x'-x)+(y-y')}{2}$

1) $\varphi / \Omega \times \Omega$

soient $(x,y),(x',y') \in \Omega$ alors

on a : $\left.\begin{array}{l} x+y+4=0 \\ \text{et } x'+y'+4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x'-x)+(y'-y)=0$

$\Rightarrow x'-x = y-y'$

alors $\varphi((x,y),(x',y')) = \frac{(x'-x)+(x'-x)}{2} = x'-x$.

donc $\varphi_{\Omega \times \Omega}((x,y),(x',y')) = x'-x$

2) $\varphi / \Omega \times \Omega$ define un espace affine sur $\mathbb{R}$.

a- soient $(x,y),(x',y'),(x'',y'') \in \Omega$.

on a : $\varphi((x,y),(x',y')) + \varphi((x',y'),(x'',y''))$

$= (x'-x)+(x''-x') = x''-x =$

$\varphi((x,y),(x'',y''))$

b- soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $(x,y) \in \Omega$, $\exists (x',y') \in \Omega$

$\alpha = \varphi((x,y),(x',y'))$

$\alpha = x'-x \Rightarrow x' = \alpha + x$.

$(x',y') = (\alpha+x, y')$ d'ou l'existence

de (x',y'), φ definie sur Ω un espace affine sur $\mathbb{R}$.

1

Série (04) Geometrie

Solution :

EX 02 : on a $\Omega = \mathbb{R}_+^*$

$$\varphi : \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longrightarrow \varphi(x,y) = \ln\left(\frac{y}{x}\right)$$?

① $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}_+^{*3}$ on a

$$\varphi(x,y) + \varphi(y,z) = \ln(y/x) + \ln\left(\frac{z}{y}\right)$$
$$= \ln\left(y/x \cdot \frac{z}{y}\right) = \ln\left(\frac{z}{x}\right) = \varphi(x,z)$$

② soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists y \in \mathbb{R}_+^* : \alpha = \varphi(x,y)$

$\alpha = \varphi(x,y)$ alors $\alpha = \ln(y/x)$

$$\Rightarrow e^{\alpha} = y/x \Rightarrow y = x \cdot e^{\alpha}$$

d'où l'existence de y.

φ est definie sur Ω un espace affine sur $\mathbb{R}$.

EX 03

$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + y + 4 = 0\}$

① on remarque que $(0,0) \notin F$ car

$0 + 0 + 4 = 4 \neq 0$

donc F n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^2$

② soit $H = \{\overrightarrow{AM} / M \in F\}$

$$= \left\{ \overrightarrow{\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}} \Big/ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in F \right\}.$$

Scanné avec CamScanner

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / x+y+4=0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y+4 \end{pmatrix} / y = -x-4 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x-4+4 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} x / x \in \mathbb{R} \right\}$$

$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, donc F est une variété affine de $\mathbb{R}^2$

EXO ~~4~~:

$F = \{ X \in \mathbb{R}^n / AX = b \}$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$

① - Si $b = 0_{\mathbb{R}^m}$ alors

$F = \{ X \in \mathbb{R}^n / AX = 0_{\mathbb{R}^m} \} = \operatorname{Ker}(A)$

est un s.e.v de $\mathbb{R}^n$

- Si $b \neq 0_{\mathbb{R}^m}$, alors $0_{\mathbb{R}^n} \notin F$

donc F n'est pas s.e.v de $\mathbb{R}^n$.

② $H = \{ \vec{xy} / (x, y) \in F \}$

$$= \left\{ \vec{XY} / \begin{matrix} AX = b \\ AY = b \end{matrix} \right\} = \{ Y - X / A(Y-X) = AY - AX = b - b = 0 \}$$

donc $H = \{ Z \in \mathbb{R}^n / AZ = 0 \} = \operatorname{Ker}(A)$ s.e.v

donc F est une variété affine de $\mathbb{R}^n$

③ on a : $\underbrace{\dim \operatorname{Ker}(A)} + \dim \operatorname{Im}(A) = \dim \mathbb{R}^n$

$\dim H + rg(A) = n$.

donc $\dim H = n - rg(A)$ # ③

Scanné avec CamScanner

④ **EXO4** : $f : \Omega \longrightarrow \Omega$

① $g : \Omega \longrightarrow E$

$M \longrightarrow g(M) = \overrightarrow{Mf(M)}$

on a $\overrightarrow{g(M)g(N)} = g(N) - g(M)$ /

$\begin{pmatrix} g(M) \\ g(N) \end{pmatrix} \in E$

$= \overrightarrow{Nf(N)} - \overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{Nf(N)} + \overrightarrow{f(M)M}$

$= \overrightarrow{Nf(M)} + \overrightarrow{f(M)f(N)} + \overrightarrow{f(M)M}$

$= \overrightarrow{f(M)f(N)} + \overrightarrow{NM}$

$= \varphi(MN) - \overrightarrow{MN}$

EXO5 :

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3x + 5y \\ -2x - 3y - 2 \end{pmatrix}$

①