Université Mohamed Khider Biskra
Faculté des SE et SNV
Département de SM
Première année Licence: LMD, SM

Année Universitaire: 2021-2020
Premier Semestre, Module: Maths II

TD3

Exercise 1

1. Déterminer une primitive de la fonction f définie par :

$$f(t) = \frac{1}{\sin(2t)}$$

2. A l'aide du changement de variable $x = 2t$, calculer

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sin(x)}$$

Exercise 2

Déterminer une primitive des fonctions

$$F_1(x) = \int_0^x te^t dt \qquad F_2(x) = \int_0^x t^2 e^t dt$$

Exercise 3

A l'aide d'une intégration par partie calculer les intégrales suivantes

a.

$$I_1 = \int_1^e t\ln(t)\,dt$$

b.

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\,dt$$

Exercise 4

1. Décomposer en élément simple la fraction

$$f(x) = \frac{1}{x(x-1)^2}$$

2. Calculer

$$F(t) = 2\int \frac{dt}{\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{sh}^3(t)}$$

A l'aide du changement de variable $x = \mathrm{ch}^2(t)$

Correction exercice 1.

1. On peut faire le changement de variable $u = \tan(t)$ $\quad du = \dfrac{dt}{\cos^2(t)}$

Calculs de primitives

$$\frac{1}{\sin(2t)} = \frac{1}{2\sin(t)\cos(t)} = \frac{\cos(t)}{2\sin(t)}\frac{1}{\cos^2(t)} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{\tan(t)}\times\frac{dt}{\cos^2(t)}$$

Donc

$$\int f(t)dt = \int \frac{1}{2}\times\frac{1}{\tan(t)}\times\frac{dt}{\cos^2(t)} = \frac{1}{2}\int\frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln|u| + K = \frac{1}{2}\ln|\tan(t)|$$

On a pris $K = 0$ car une demande « une » primitive de f.

2. $dx = 2dt$ et $t = \frac{x}{2}$

$$F(x) = \int \frac{1}{\sin(x)}dx = 2\int\frac{1}{\sin(2t)}dt = 2\times\frac{1}{2}\ln|\tan(t)| + K = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + K$$

Correction exercice 2.

1.

$F_1(x) = \int_0^x te^t dt$	
$u'(t) = e^t$	$u(t) = e^t$
$v(t) = t$	$v'(t) = 1$

Calculs de primitives

$F_1(x) = \int_0^x te^t dt = [te^t]_0^x - \quad \int_0^x 1\times e^t dt$

$$F_1(x) = \int_0^x te^t dt = [te^t]_0^x - \int_0^x e^t dt = xe^x - [e^t]_0^x = xe^x - e^x + 1$$

2.

$F_2(x) = \int_0^x t^2e^t dt$	
$u'(t) = e^t$	$u(t) = e^t$
$v(t) = t^2$	$v'(t) = 2t$
$F_2(x) = \int_0^x t^2e^t dt = [t^2e^t]_0^x - \quad \int_0^x 2te^t dt$	

$$F_2(x) = \int_0^x t^2e^t dt = [t^2e^t]_0^x - 2\int_0^x te^t dt = x^2e^x - 2F_1(x) = x^2e^x - 2(x-1)e^x - 2$$
$$= (x^2 - 2x + 2)e^x - 2$$

Correction exercice 3.

a.

$$I_1 = \int_1^e t\ln(t)\,dt$$

Calculs de primitives

$$u'(t) = t \qquad u(t) = \frac{t^2}{2}$$

$$v(t) = \ln(t) \qquad v'(t) = \frac{1}{t}$$

$$I_1 = \left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_1^e - \int_1^e \frac{t}{2}\,dt$$

Donc

$$I_1 = \frac{e^2}{2}\ln(e) - \frac{1^2}{2}\ln(1) - \left[\frac{t^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2-1}{4} = \frac{2e^2-e^2+1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$$

b.

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\,dt$$

$$u'(t) = \sin(t) \qquad u(t) = -\cos(t)$$

$$v(t) = t \qquad v'(t) = 1$$

$$I_2 = [-t\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,dt$$

Donc

$$I_2 = -\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 0\times\cos(0) + [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Correction exercice 4.

1. Il existe a, b et c réels tels que :

$$f(x) = \frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

On multiplie par x, puis $x = 0$

$$a = \left[\frac{1}{(x-1)^2}\right]_{X=0} = 1$$

On multiplie par $(x-1)^2$, puis $x = 1$

$$c = \left[\frac{1}{x}\right]_{x=1} = 1$$

On multiplie par x, puis $x \to +\infty$

$$0 = a + b \Leftrightarrow b = -1$$

Calculs de primitives

$$f(x)=\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

2. $dx = 2\,\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{sh}(t)\,dt$

$$F(t)=2\int\frac{dt}{\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{sh}^3(t)}=2\int\frac{\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{sh}(t)\,dt}{\mathrm{ch}^2(t)\,\mathrm{sh}^4(t)}=2\int\frac{\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{sh}(t)\,dt}{\mathrm{ch}^2(t)\,\mathrm{sh}^4(t)}=2\int\frac{\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{sh}(t)\,dt}{\mathrm{ch}^2(t)\,(\mathrm{sh}^2(t))^2}$$

$$=\int\frac{2\,\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{sh}(t)\,dt}{\mathrm{ch}^2(t)\,(\mathrm{ch}^2(t)-1)^2}=\int\frac{dx}{x(x-1)^2}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx$$

$$=\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+K\ =\ln(\mathrm{ch}^2(t))-\ln(\mathrm{ch}^2(t)-1)-\frac{1}{\mathrm{ch}^2(t)-1}+K,$$

$K\in\mathbb{R}$