Séries entières

Suites de fonctions

Soient $u_1(z)$, $u_2(z)$, ..., $u_n(z)$, ou $(u_n(z))$ une suite de fonctions définies et uniformes sur un domaine $D \subseteq \mathbb{C}$. Si $\lim_{n\to\infty} u_n(z) = u(z)$, on dit que la suite de fonctions $(u_n(z))$ est convergente ou converge vers $u(z)$.
Sinon on dit qu'elle est divergente.

Exemple:

La suite $(u_n(z))$ de terme général $u_n(z) = 1 + \frac{z^2}{n}$ converge vers 1 quand $n \to \infty$.
La suite $(u_n(z))$ de terme général $u_n(z) = z^n$ converge vers 0 si $|z| < 1$ et converge vers 1 si $|z| = 1$, diverge si $|z| > 1$.

Séries de fonctions

À partir d'une suite de fonctions $(u_n(z))$, nous définissons une nouvelle suite $(S_n(z))$ défnie par

$$S_1(z) = u_1(z),\ S_2(z) = u_1(z) + u_2(z), ...,\ S_n(z) = \sum_{i=1}^{n} u_i(z),$$

où $S_n(z)$ est appelée la nième somme partielle, qui est la somme des n premiers termes de la suite $(u_n(z))$.
et $u_1(z) + u_2(z) + u_3(z) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ est appelée série infinie de terme général $u_n(z)$.
Si $\lim_{n\to\infty} S_n(z) = S(z)$ la série est dite convergente vers sa somme $S(z)$, sinon la série est dite divergente.

Convergence absolue

On dit que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} u_i(z)$ est absolument convergente si la série des valeurs absolues $\sum_{n=1}^{\infty} |u_i(z)|$ est convergente.

Remarques

1) Si la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ alors $\lim_{n\to\infty} u_n(z) = 0$, la réciproque est fausse.
2) Si une série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ converge $\forall z \in D \subseteq \mathbb{C}$, on dira que D est le domaine de convergence de la série.
3) Si $\sum_{i=n}^{\infty} |u_n(z)|$ est convergente, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$, est convergente, la réciproque est fausse.
4) Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$, est convergente mais que la série $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ est

divergente, on dit que la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$est semi convergente.

Séries entières

Définition:

Soient z_0, et $r \in \mathbb{R}_+^*$. On pose
$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r\}$, $\bar{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z0| \leq r\}$ et
$C(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| = r\}$.
On dit que $D(z_0, r)$ (respectivement $\bar{D}(z_0, r)$, $C(z_0, r)$ est le disque ouvert (respectivement disque fermé, cercle) de centre z_0 et de rayon r.

Définition:

On appelle série entière en $(z - z_0)$ toute série qui est de la forme
$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.

Rayon de convergence

Théorème:

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ une série entière, alors il existe un unique élément $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que:

1) $\forall z \in \mathbb{C}$, tel que $|z - z_0| < r$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ est absolument convergente donc convergente.

2) $\forall z \in \mathbb{C}$, tel que $|z - z_0| > r$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ est divergente.

3) Pour $|z - z_0| = r$ elle peut converger ou diverger.

On dit que r est le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, et que $D(z_0, r)$, $\bar{D}(z_0, r)$ et $C(z_0, r)$ en est le disque ouvert, fermé et le cercle de convergence respectivement.

Remarques:

1) Si $r = 0$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge uniquement en $z = z_0$.

2) Si $r = \infty$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge $\forall z \in \mathbb{C}$.

Théorème:

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ une série entière, alors le rayon de convergence de la série est donné par:

1) Critère de d'Alembert:

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

.

2) Critère de Cauchy:

$$r = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Exemple:

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes:

$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{(2n+1)\,3^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$.

1) $a_n = n$,

donc $r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = 1$

2) $a_n = n!$,

donc $r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{1}{n+1} \right| = 0$

3) $a_n = \frac{1}{(2n-1)!}$,

$$\text{donc } r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{1}{(2n-1)!}}{\frac{1}{(2n+1)!}} \right| = \lim_{n \to \infty} |(2n+1)\,2n| = \infty$$

4) $a_n = \frac{1}{(2n+1)\,3^n}$,

$$\text{donc } r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{1}{(2n+1)\,3^n}}{\frac{1}{(2n+3)\,3^{n+1}}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{1}{(2n+1)\,3^n}}{\frac{1}{(2n+3)\,3^{n+1}}} \right| = 3.$$

5) $a_n = n^n$,

donc $r = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|n^n|}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

Critère spéciaux de convergence:

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ une série entière.

1) **Critère de d'Alembert:**

Si $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| = l$, alors série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge absolument si $l < 1$, diverge si $l > 1$, et si $l = 1$ on ne peut rien conclure

2) **Critère de Cauchy:**

Si $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|u_n(z)|} = l$, alors série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge absolument si $l < 1$, diverge si $l > 1$, et si $l = 1$ on ne peut rien conclure.

3) **Critère de Raabe:**

$\lim_{n \to \infty} n \left(1 - \left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| \right) = l$, alors série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge absolument si $l > 1$, diverge ou semi convergente si $l < 1$, et si $l = 1$ on ne peut rien conclure.

Exemple:

Déterminer le domaine de convergence des séries entières suivantes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n,\ \sum_{n=0}^{\infty} n!z^n,\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!},\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{(2n+1)\,3^n},\ \sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n.$$

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{(n+1)\,z^{n+1}}{nz^n}\right| = |z|$

donc la série entière $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nz^n$ converge absolument pour $|z| < 1$ (c'est à dire dans le disque ouvert $D(0,1)$).

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{(n+1)!z^{n+1}}{n!z^n}\right| = \infty.$

donc la série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!z^n$ converge simplement pour $z = 0$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}}{\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{(2n-1)!}{(2n+1)!}\right| |z|^2 = 0$

donc la série entière $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{\frac{(z+2)^n}{(2n+3)\,3^{n+1}}}{\frac{(z+2)^{n-1}}{(2n+1)\,3^n}}\right| =$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{\frac{(z+2)^n}{(2n+3)\,3^{n+1}}}{\frac{(z+2)^{n-1}}{(2n+1)\,3^n}}\right| |z+2| = \dfrac{|z+2|}{3}$

donc la série entière$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z+2)^{n-1}}{(2n+1)\,3^n}$ converge absolument pour $|z+2| < 3$.

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n^n z^n|} = \lim\limits_{n\to\infty} n\,|z| = \infty$

donc la série entière $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n z^n$. converge simplement pour $z = 0$.