

# جملة معادلات خطية

## 1. جملة $m$ معادلة خطية بـ $n$ مجهول:

إن الشكل العام لجملة  $m$  معادلة خطية بـ  $n$  مجهول هو:

$$(1) \rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \dots + \dots + \dots + \dots = \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- تسمى العناصر  $a_{ij}$  المعاملات للجملة.
- وتسمى العناصر  $b_i$  المقادير الحرة أو الثابتة.
- العناصر  $x_i$  المجهول.
- إذا كانت جميع العناصر  $b_i$  معدومة سميت الجملة متجانسة و إذا كان أحدها على الأقل غير معدوم سميت الجملة غير متجانسة.

تسمى المصفوفة:  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$  مصفوفة المعاملات .

فإذا رمزنا  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$  و  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$  وبالإستفادة من جداء المصفوفات يمكن كتابة جملة المعادلات الخطية (1) بالشكل المختصر:  $AX = B \rightarrow (2)$

أن حل جملة المعادلات الخطية (1) يعني إيجاد الشعاع  $X$  الذي تحقق (1) وهنا نطرح ثلاثة أسئلة :

- (1) هل هذه الجملة قابلة للحل ام مستحيلة الحل .
- (2) إذا كانت الجملة قابلة للحل فكم حال لها ؟
- (3) كيف يمكن إيجاد جميع حلول هذه الجملة ؟

## 2- حل جملة $n$ معادلة و $n$ مجهول

في هذه الحالة تكون  $A$  مصفوفة مربعة ويوجد طرق عديدة لحل الجملة نذكر أهم هذه الطرق:

### 2.1- طريقة مقلوب المصفوفة: من العلاقة

$$AX = B (2)$$

حيث  $A$  مصفوفة المعاملات و  $B$  مصفوفة العمود للمقادير الثابتة فإذا كانت المصفوفة  $A$  قابلة للقلب أي  $\det A \neq 0$  فإنه يوجد لـ  $A$  مقلوب  $A^{-1}$  . لذلك بضرب طرفي العلاقة (2) من اليسار بـ  $A^{-1}$  نجد :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

أي

$$X=A^{-1}B$$

ويكون الحل وحيدا. وإذا كانت الجملة متجانسة يكون الحل الوحيد هو الشعاع معدوم. تدعى هذه الطريقة بالطريقة المصفوفية لحل جملة المعادلات الخطية.

**مثال 1:** حل جملة المعادلات الخطية :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$$

إذا فرضنا أن :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

يمكن إيجاد أن  $\det A \neq 0$  و أن  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  و بالتالي فإن :

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix}$$

وحسب تساوي مصفوفتين نجد أن الحل هو:

$$x_1 = 13, \quad x_2 = -12, \quad x_3 = 4$$

## 2.2- طريقة كرامر:

أن الصعوبة الطريقة سابقة كانت بإيجاد  $A^{-1}$  معكوس المصفوفة  $A$ .

نعرف الآن المجدد التالي  $\Delta_{ij}$  نحصل عليه باستبدال العمود ذي الرتبة  $i$  من محدد المصفوفة  $A$  بعمود المقادير الحرة أو الثابتة  $B$ .

- إذا كان  $\det A \neq 0$  فلجملة المعادلات حل وحيد يعطى بالشكل :  $x_i = \frac{\Delta_i}{\det A}$ ,  $i = 1, \dots, n$
- أما إذا كان  $\Delta = 0$  نميز حالتين :  
الحالة الأولى :  $\Delta_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$  عندئذ جملة المعادلات لخطية (1) مستحيلة الحل.

الحالة الثانية :  $\Delta_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$  عندئذ يوجد لجملة المعادلات الخطية (1) عدد غير منته من الحلول.

تدعى هذه الطريقة بطريقة كرامر.

**مثال 2:** استخدم طريقة كرامر لحل جملة المعادلات الخطية في المثال (1).

بما أن  $\det A \neq 0$  فإن لجملة المعادلات حل وحيد يعطى بالشكل :  $x_i = \frac{\Delta_i}{\det A}$ ,  $i = 1, 2, 3$

أي أن :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}} = 13, \quad x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & -5 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}} = -12$$

$$4x_3 = x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}} =$$

### 3- حل جملة المعادلات الخطية المتجانسة :

في هذه الحالة تكون أعمدة المقادير الحرة أو الثابتة يساوي الصفر وتصبح الجملة بالشكل :

$$(3) \rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \dots \dots + \dots + \dots + \dots = \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

أو بالشكل المختصر  $AX = 0$

وكما وجدنا سابقا أنه من الواضح أن  $x_i = 0$  أيًا كان  $i = 1, 2, \dots, n$  حل لجملة المعادلات الخطية المتجانسة.

ونشير هنا إلى إنه إذا كان  $X_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$  حلان للجملة (3) فإن كلا من  $X_2 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}$  هي حلول لهذه الجملة.

وبشكل عام إذا كانت  $X_1, X_2, \dots, X_r$  حلول للجملة فإن  $Y = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_r X_r$  يكون حل لها.

ونعلم أيضا أن الشرط اللازم والكافي حتى يكون لجملة المعادلات الخطية المتجانسة حولا غير الحل الصفري هو أن يكون محدد الجملة مساويا للصفر.

مثال 3 : ناقش حلول الجملة الخطية المتجانسة التالية بحسب قيم  $K$  :

$$\begin{cases} 3x + Ky - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ x + ky - z = 0 \end{cases} \text{Tapez une équation ici.}$$

نحسب محدد الجملة :

$$\begin{vmatrix} 3 & K & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & K & -1 \end{vmatrix} = 2K - 8 \text{Tapez une équation ici.}$$

نلاحظ أن  $\Delta \neq 0$  عندما  $k \neq 4$  وعندها يكون للجملة الحل الصفري وحيد.

أما من أجل  $k = 4$  يكون  $\Delta = 0$  وللجملة عدد غير منته من الحلول وتصبح الجملة بالشكل:

$$\begin{cases} 3x + 4y - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ x + 4y - 3z = 0 \end{cases} \text{Tapez une équation ici.}$$

نجري تحويلات أولية على مصفوفة الأجملة:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

وتؤول الجملة إلى المعادلتين:

$$\begin{cases} x + 4y - 3z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

وبالتالي عدد المجاهيل يزيد بمقدار واحد على عدد المعادلات وبالتالي نفرض متحول حر وليكن  $z$  من المعادلة 2 نجد :  
ويعوض في المعادلة الأولى نجد  $x = -z$  و منه الحل هو :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

وبالتالي من أجل كل قيمة لـ  $z$  نحصل على حل جديد للجملة.