TD n°2 : Fonctions Holomorphes. CORRECTION

<u>Exercice</u> 2.1. Calculer les limites suivantes si elle existent :

$$\lim_{z\to 0}\frac{\overline{z}^2-z^2}{z}=0,\quad \lim_{z\to 0}\frac{|z|^2}{z},\quad \lim_{z\to 0}\frac{z}{|z|},\quad \lim_{z\to -2i}\frac{(2z+3)(z-1)}{z^2-2z+4}.$$

Solution

Calculer les limites suivantes si elle existent :

1. $\lim_{z\to 0}\frac{\overline{z}^2-z^2}{z}=0$, car si on pose $z=x+iy$ alors $z\to 0 \iff (x,y)\to(0,0)$, et

$$\left|\frac{\overline{z}^2-z^2}{z}\right|=\left|\frac{-4ixy}{x+iy}\right|=\frac{4|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\frac{4|xy|}{\sqrt{y^2}}\leq 4|x|\to 0,\ \text{quand } (x,y)\to(0,0).$$

<u>Autre méthode :</u>
Si on pose $z=re^{i\theta}$ alors $z\to 0 \iff r\to 0$ et

$$\frac{\overline{z}^2-z^2}{z}=\frac{r^2e^{-2i\theta}-r^2e^{2i\theta}}{re^{i\theta}}=r(e^{-3i\theta}-e^{i\theta})\to 0,\ \text{quand } r\to 0.$$

2.
$$\lim_{z\to 0}\frac{|z|^2}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{z\overline{z}}{z}=\lim_{z\to 0}\overline{z}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x-iy)=0$$

.

<u>Autre méthode :</u>
Posons $z=re^{i\theta}$

$$\lim_{z\to 0}\frac{|z|^2}{z}=\lim_{r\to 0}\frac{r^2}{re^{i\theta}}=\lim_{r\to 0}re^{-i\theta}=0$$

3. $\lim_{z\to 0}\frac{z}{|z|}$ n'existe pas, en effet ;

$$\lim_{z\to 0}\frac{z}{|z|}=\lim_{z\to 0}\frac{x+iy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

fixons $y=0$,

$$\lim_{z\to 0}\frac{z}{|z|}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|}\quad \text{n'existe pas car}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{|x|}=1,\quad \text{et}\quad \lim_{x\to 0^-}\frac{x}{|x|}=-1.$$

<u>Autre méthode :</u>
Posons $z=re^{i\theta}$

$$\lim_{z\to 0}\frac{z}{|z|}=\lim_{r\to 0}\frac{re^{i\theta}}{r}=\lim_{r\to 0}e^{i\theta}$$

ainsi, la limite dépend de θ donc elle n'existe pas.

4.
$$\lim_{z\to -2i}\frac{(2z+3)(z-1)}{z^2-2z+4}=\frac{1}{2}+\frac{11}{4}i.$$

<u>Exercice</u> 2.2. 1. Montrer que la fonction $u(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ n'a pas de limite quand $(x,y) \to (0,0)$.
2. Montrer les formules suivantes

$$\cos(iz) = \cosh(z), \qquad \sin(iz) = i\sinh(z).$$

3. Montrer que $\sin(z)$ et $\cos(z)$ ne sont pas bornées dans $\mathbb{C}$.

S o l u t i o n

1. La limite de $u(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ quand $(x,y) \to (0,0)$ n'existe pas, en effet ; si on pose $y = x$ on obtient

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2},$$

et si on pose $y = -x$ on obtient

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{x^2+x^2} = -\frac{1}{2}.$$

2.
$$\cos(iz) = \frac{e^{iiz}+e^{-iiz}}{2} = \frac{e^{-z}+e^{z}}{2} = \text{ch}(z),$$
$$\sin(iz) = \frac{e^{iiz}-e^{-iiz}}{2i} = \frac{e^{-z}-e^{z}}{2i} = i\text{sh}(z).$$

3.

$$\begin{aligned}
\sin(z) &= \sin(x+iy) = \sin(x)\cos(iy) + \cos(x)\sin(iy) \\
&= \sin(x)\text{ch}(y) + i\cos(x)\text{sh}(y), \\
\cos(z) &= \cos(x+iy) = \cos(x)\cos(iy) - \sin(x)\sin(iy) \\
&= \cos(x)\text{ch}(y) - i\sin(x)\text{sh}(y).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\sin(z)| &= \sqrt{\sin^2(x)\text{ch}^2(y) + \cos^2(x)\text{sh}^2(y)} \\
&= \sqrt{\sin^2(x)(1+\text{sh}^2(y)) + \cos^2(x)\text{sh}^2(y)} \\
&= \sqrt{\sin^2(x) + \text{sh}^2(y)} \to +\infty, \text{ quand } y \to +\infty,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\cos(z)| &= \sqrt{\cos^2(x)\text{ch}^2(y) + \sin^2(x)\text{sh}^2(y)} \\
&= \sqrt{\cos^2(x)(1+\text{sh}^2(y)) + \sin^2(x)\text{sh}^2(y)} \\
&= \sqrt{\cos^2(x) + \text{sh}^2(y)} \to +\infty, \text{ quand } y \to +\infty.
\end{aligned}$$

Ainsi les fonctions $\sin(z)$ et $\cos(z)$ ne sont pas bornées sur $\mathbb{C}$.

<u>Exercice</u> 2.3. Calculer

$$\mathbf{1)}\quad \sin(1-i),\quad \mathbf{2)}\quad \ln(-1),\quad \mathbf{3)}\quad 2^{i},\quad \mathbf{4)}\quad \ln(1+i),\quad \mathbf{5)}\quad i^{i},$$
$$\mathbf{6)}\quad \arcsin(i),\quad \mathbf{7)}\quad (\cos(i))^{i},\quad \mathbf{8)}\quad (-1)^{\sqrt{2}}.$$

Solution

1.

$$\sin(1-i) = \sin(1)\cos(i) - \cos(1)\sin(i) = \sin(1)\mathrm{ch}(1) - i\cos(1)\mathrm{sh}(1).$$

2. Le logarithme complexe d'un nombre complexe z est donné par

$$\ln(z) = \ln|z| + i\arg(z) + 2k\pi i,\quad k\in\mathbb{Z},$$

donc

$$\ln(-1) = \ln|-1| + i\arg(-1) + 2k\pi i = (2k+1)\pi i,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

3.

$$2^{i} = e^{i\ln 2} = \cos(\ln 2) + i\sin(\ln 2).$$

4.

$$\ln(1+i) = \ln|1+i| + i\arg(1+i) + 2k\pi i = \ln(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

5.

$$i^{i} = e^{i\ln(i)} = e^{i(\ln(|i|+i\arg(i)+2k\pi i)} = e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi},\quad k\in\mathbb{Z}.$$

6. On a $\arcsin(z) = -i\ln(iz+\sqrt{1-z^2})$, donc

$$\arcsin(i) = -i\ln(ii+\sqrt{1-i^2}) = -i\ln(-1+\sqrt{2}).$$

7.

$$(\cos(i))^{i} = (\mathrm{ch}(1))^{i} = e^{i\ln(\mathrm{ch}(1))} = \cos(\ln(\mathrm{ch}(1))) + i\sin(\ln(\mathrm{ch}(1))).$$

8.

$$(-1)^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln(-1)} = e^{\sqrt{2}(2k+1)\pi i},\quad k\in\mathbb{Z}.$$

<u>Exercice</u> 2.4. Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes

$$e^{2z+4} = 3\sqrt{3} + 3i, \quad z^2 = 3 + 4i, \quad e^{iz} - (1+i)e^{-iz} = i.$$

Solution

Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes

1.

$$\begin{aligned}
e^{2z+4} &= 3\sqrt{3} + 3i \\
\Rightarrow 2z + 4 &= \ln(3\sqrt{3} + 3i) = \ln(|3\sqrt{3} + 3i|) + i \arg(3\sqrt{3} + 3i) + 2k\pi i, \;\; k \in \mathbb{Z} \\
\Rightarrow 2z + 4 &= \ln(6) + i\frac{\pi}{6} + 2k\pi i, \;\; k \in \mathbb{Z} \\
\Rightarrow z &= \frac{1}{2}\ln(6) - 2 + i\frac{\pi}{12} + k\pi i, \;\; k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

2. Soit l'équation $z^2 = 3 + 4i$.
Posons $z = x + iy$, alors

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

en résolvant ce système on trouve $z = \pm(2+i)$.

<u>Autre méthode :</u>

$$z^2 = 3 + 4i = 4 - 1 + 4i = 2^2 + i^2 + 2.2.i = (2+i)^2 \Rightarrow z = \pm(2+i).$$

3. Soit l'équation $e^{iz} - (1+i)e^{-iz} = i$.

$$e^{iz} - (1+i)e^{-iz} = i \iff e^{2iz} - ie^{iz} - (1+i) = 0,$$

posons $X = e^{iz}$, on obtient

$$\begin{aligned}
& X^2 - iX - (1+i) = 0, \\
& \Delta = 3 + 4i, \\
& X_1 = 1 + i, \; X_2 = -1 \\
\Rightarrow \quad & e^{iz} = 1 + i \;\; \vee \;\; e^{iz} = -1, \\
\Rightarrow \quad & iz = \ln(1+i) \;\; \vee \;\; iz = \ln(-1), \\
\Rightarrow \quad & iz = \ln(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i \;\; \vee \;\; iz = (2k+1)\pi i, \;\; k \in \mathbb{Z}, \\
\Rightarrow \quad & z = -i\ln(\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \;\; \vee \;\; z = (2k+1)\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

<u>Exercice</u> 2.5. Montrer que $\quad \arctan(z) = \frac{i}{2}[\ln(i+z) - \ln(i-z)].$

$\boxed{\textbf{Solution}}$

Montrons que $\arctan(z) = \frac{i}{2}[\ln(i+z) - \ln(i-z)]$, on a

$$\begin{aligned}
z = \tan(w) &= \frac{\sin(w)}{\cos(w)} = \frac{\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}}{\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}} = \frac{1}{i}\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{e^{iw}+e^{-iw}} \\
&\Rightarrow \quad iz(e^{iw}+e^{-iw}) = e^{iw}-e^{-iw} \\
&\Rightarrow \quad e^{iw}(iz-1) = e^{-iw}(-iz-1) \\
&\Rightarrow \quad e^{iw}(z+i) = e^{-iw}(-z+i) \\
&\Rightarrow \quad e^{2iw} = \frac{i-z}{i+z} \\
&\Rightarrow \quad 2iw = \ln\left(\frac{i-z}{i+z}\right) \\
&\Rightarrow \quad 2iw = \ln(i-z) - \ln(i+z) \\
&\Rightarrow \quad w = \frac{1}{2i}[\ln(i-z) - \ln(i+z)] \\
&\Rightarrow \quad w = \frac{i}{2}[\ln(i+z) - \ln(i-z)].
\end{aligned}$$

<u>Exercice</u> 2.6. Indiquer parmi les fonctions suivantes celles qui sont holomorphes

$$f(z) = Im(z), \qquad f(z) = e^{\overline{z}}, \qquad f(z) = z^2 + 5iz + 3 - i, \quad f(z) = (Re(z))^2.$$

$\boxed{\textbf{Solution}}$

1.

$$\begin{aligned}
f(z) &= Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i} \\
\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) &= -\frac{1}{2i} \neq 0 \ \ \forall z \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Donc f n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$.

2.

$$\begin{aligned}
f(z) &= e^{\overline{z}} \\
\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) &= e^{\overline{z}} \neq 0 \ \ \forall z \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Donc f n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$.

3.

$$\begin{aligned}
f(z) &= z^2 + 5iz + 3 - i \\
\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) &= 0 \ \ \forall z \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

De plus f est différentiable (de classe C^1) sur $\mathbb{C}$, ainsi f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Autre méthode :
posons $z = x + iy$, donc

$$\begin{array}{rcl} f(z) & = & z^2 + 5iz + 3 - i \\ & = & (x+iy)^2 + 5i(x+iy) + 3 - i \\ & = & x^2 - y^2 + 2ixy + 5ix - 5y + 3 - i \\ \Rightarrow & & u(x,y) = x^2 - y^2 - 5y + 3, \text{ et } v(x,y) = 2xy + 5x - 1. \end{array}$$

Les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées car :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x \text{ et } \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 2x,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -2y - 5 \text{ et } \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 2y + 5,$$

De plus u et v sont différentiables (de classe C^1) sur $\mathbb{R}^2$, ainsi f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

4.

$$f(z) = (Re(z))^2 = \left(\frac{z + \overline{z}}{2}\right)^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) = Re(z).$$

Donc f n'est pas holomorphe sauf aux points z tels que $Re(z) = 0$.

Autre méthode :
Posons $z = x + iy$, donc

$$\begin{array}{rl} & f(z) = (Re(z))^2 = x^2 \\ \Rightarrow & u(x,y) = x^2, \text{ et } v(x,y) = 0. \end{array}$$

Les conditions de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x \text{ et } \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0 \text{ et } \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0,$$

Donc f n'est holomorphe qu' aux points z tels que $Re(z) = 0$.

<u>Exercice</u> 2.7. Indiquer parmi les fonctions suivantes celles qui sont analytiques

$$f(z) = ze^z, \qquad f(z) = \overline{z}z^2, \qquad f(z) = \sin(3z).$$

Solution

1. Soit la fonction $f(z) = ze^z$,

$$\begin{aligned} & f(z) = ze^z = (x+iy)e^{x+iy} = (x+iy)e^x(\cos y + i\sin y) \\ \Rightarrow \quad & u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y), \text{ et } v(x,y) = e^x(y\cos y + x\sin y). \end{aligned}$$

Les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées $\forall z \in \mathbb{C}$ car :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= e^x((x+1)\cos y - y\sin y), \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) &= e^x((x+1)\cos y - y\sin y), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= e^x(-(x+1)\sin y - y\cos y), \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) &= e^x((x+1)\sin y + y\cos y). \end{aligned}$$

Donc f est analytique sur $\mathbb{C}$.

2. Soit la fonction $f(z) = \overline{z}z^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = z^2.$$

f n'est dérivable qu'au point $z = 0$, donc f n'est pas analytique en aucun point.

3. Soit la fonction $f(z) = \sin(3z)$,

Posons $z = x + iy$, donc

$$\begin{aligned} f(z) &= \sin(3z) = \sin(3x+3iy) = \sin(3x)\cos(3iy) + \cos(3x)\sin(3iy) \\ &= \sin(3x)\text{ch}(3y) + i\cos(3x)\text{sh}(3y) \\ \Rightarrow \quad & u(x,y) = \sin(3x)\text{ch}(3y), \text{ et } v(x,y) = \cos(3x)\text{sh}(3y). \end{aligned}$$

Les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées $\forall z \in \mathbb{C}$ car :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= 3\cos(3x)\text{ch}(3y), \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) &= 3\cos(3x)\text{ch}(3y), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= 3\sin(3x)\text{sh}(3y), \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) &= -3\sin(3x)\text{sh}(3y). \end{aligned}$$

Donc f est analytique sur $\mathbb{C}$

<u>Exercice</u> 2.8. Déterminer les constantes réelles a, b et c telles que la fonction $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$ soit holomorphe dans $\mathbb{C}$.

$\boxed{\textbf{Solution}}$

Posons $u(x, y) = x + ay$ et $v(x, y) = bx + cy$. Pour que f soit holomorphe il faut que les fonctions u et v vérifient les conditions de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

On a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = c$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = a, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = b,$$

ainsi

$$c = 1, \text{ et } a = -b.$$