Université Mohamed Khider Biskra
Faculté des SE et SNV
Département de SM
Première année Licence: LMD, SM

Année Universitaire: 2020-2021
Premier Semestre, Module: Maths II

# TD2

## Exercise 1

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Quels sont les produits matriciels possibles ? Quelles sont les matrices carrées et les matrices symétriques ?

## Exercise 2

Calculer lorsqu'ils sont définis les produits $AB$ et $BA$ dans chacun des cas suivants :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Exercise 3

1. Calculer, quand c'est possible, les sommes $A + B$ et les produits $AB$ :

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$

(b) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(c) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$

(d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

## Exercise 4

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A$ la matrice suivante $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer le déterminant de $A$ et déterminer pour quelles valeurs de $a$ la matrice est inversible.
2. Calculer $A^{-1}$ lorsque $A$ est inversible.

**Exercise 5**

On donne les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer $A^2$ et montrer qu'il existe deux réels $a$ et $b$ que l'on déterminera, tels que :
$$A^2 = aA + bI.$$
2. En déduire que $A$ est inversible et, sans effectuer le calcul direct d'inversion de matrice, déterminer $A^{-1}$ en fonction de $A$ et de $I$.

**Exercise 6**

Soit : $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer la matrice $B$ telle que $A = B - I_3$ et vérifiez que $B^3 = 0$.
**Les questions suivantes sont indépendantes.**
2. Pour tout $n \in \mathbb{R}$, calculer $A^n$ en utilisant la formule du binome de Newton.
3. Déduire de la question 1. que $A$ est inversible et déterminer $A^{-1}$.

**Exercise 7**

1. Résoudre de quatre manières différentes le système suivant (par substitution, par la méthode du pivot de Gauss, en inversant la matrice des coefficients, par la formule de Cramer) :
$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 7y = -2 \end{cases}$$
2. Choisir la méthode qui vous paraît la plus rapide pour résoudre, selon les valeurs de $a$, les systèmes suivants :
$$\begin{cases} ax + y = 2 \\ (a^2+1)x + 2ay = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a+1)x + (a-1)y = 1 \\ (a-1)x + (a+1)y = 1 \end{cases}$$

**Exercise 8**

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ x & y-1 & z \\ y+z & x+z & x+y \end{pmatrix}$.

Déterminer, en fonction de $x$, $y$ et $z$, l'ensemble dans lequel $\det(C) = 0$,

2. Soient $a$, $b$ et $c \in \mathbb{R}$ et $M = \begin{pmatrix} 4 & 2a & 2a^2 \\ 2 & b & b^2 \\ 4 & 2c & 2c^2 \end{pmatrix}$.

Calculer $\det(M)$. A quelles conditions sur $a, b$ et $c$, $M$ est inversible ?

## Exercise 9

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique $(e_1, e_2, e_3)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les vecteurs

$$e_1' = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \quad e_2' = 3e_1 + 4e_2 + e_3, \quad e_3' = e_1 + 2e_2 + 2e_3$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer la matrice de $f$ par rapport à cette base.

## Correction exercice 1.

On peut effectuer les produits $AC, AE, BA, CB, CD, DB, DD, EC, EE$. Seules les matrices $D$ et $E$ sont carrées, et seule la matrice $D$ est symétrique.

## Correction exercice 2.

1. Puisque $A$ et $B$ sont deux matrices carrées de même ordre, les deux produits $AB$ et $BA$ sont possibles. On trouve :
$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
En particulier, $AB = BA = 0$ alors que ni $A$ ni $B$ ne sont nuls.
2. Le produit $AB$ n'est pas défini car $A$ a trois colonnes et $B$ deux lignes. Pour $BA$, on trouve
$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$
3. Le produit $BA$ n'est pas défini. En revanche, on a
$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## Correction exercice 3.

(a) On ne peut calculer $A+B$, et le produit $AB$ vaut $AB = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

(b) On ne peut calculer $A+B$, et le produit $AB$ vaut $AB = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) On ne peut calculer ni $A+B$, ni $AB$ (le nombre de colonnes de $A$ n'est pas égal au nombre de lignes de $B$).

(d) On calcule $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $AB = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -2 \\ -3 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction exercice 4.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A$ la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculons le déterminant de $A$ et déterminons pour quelles valeurs de $a$ la matrice est inversible.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = -1 - a^3.$$

La matrice $A$ est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, c'est-à-dire si et seulement si $1 + a^3 \neq 0$, ce qui équivaut à $a \neq -1$ car $a \in \mathbb{R}$.

2. Calculons $A^{-1}$ lorsque $A$ est inversible, c'est-à-dire $a \neq -1$. Pour cela nous allons déterminer la comatrice $\tilde{A}$ de $A$. On a

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & a & -a^2 \\ a & -a^2 & -1 \\ -a^2 & -1 & a \end{pmatrix},$$

on remarque que $\tilde{A} = {}^t\tilde{A}$ et on a bien $A{}^t\tilde{A} = {}^t\tilde{A}A = (-1 - a^3)I_3$ d'où

$$A^{-1} = \frac{1}{(-1-a^3)}\tilde{A} = \frac{1}{-1-a^3} \begin{pmatrix} -1 & a & -a^2 \\ a & -a^2 & -1 \\ -a^2 & -1 & a \end{pmatrix}.$$

Correction exercice 5.

1. Calcul de $A^2$ :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-18+18 & -3+24-18 & 6-36+24 \\ 6-48+36 & -18+64-36 & 36-96+48 \\ 3-18+12 & -9+24-12 & 18-36+16 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Cherchons des réels $a$ et $b$ tels que $A^2 = aA + bI$. Cela revient à identifier :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} = aA + bI = \begin{pmatrix} a & -3a & 6a \\ 6a & -8a & 12a \\ 3a & -3a & 4a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+b & -3a & 6a \\ 6a & -8a+b & 12a \\ 3a & -3a & 4a+b \end{pmatrix}$$

L'identification des termes autres que la diagonale conduit à : $a = -1$
Par ailleurs, l'identification des termes de la diagonale conduit à : $b = 2$
On a donc mis en évidence la relation :

$$A^2 = -A + 2I.$$

2. À partir de cette relation, on déduit :

$$A^2 = -A + 2I \Leftrightarrow A^2 + A = 2I \Leftrightarrow \frac{1}{2}(A^2 + A) = I.$$

Dans cette expression, on peut factoriser par $A$, à droite ou à gauche :

$$A \times \left[\frac{1}{2}(A+I)\right] = \left[\frac{1}{2}(A+I)\right] \times A = I.$$

On a donc démontré que la matrice $A$ est inversible et que :

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A+I).$$

Correction exercice 6.

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(1) $A = B - I_3 \Rightarrow B = A + I_3$, donc $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On obtient $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^3 = 0$.

(2)

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n &= (B - I_3)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k \cdot (-1)^{n-k} I_3^{n-k} && \text{car } B \text{ et } I_3 \text{ commutent} \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^{n-k} \cdot B^k \\
&= \sum_{k=0}^{2} C_n^k (-1)^{n-k} \cdot B^k && \text{car } \forall k \geq 3,\ B^k = 0 \\
&= C_n^0 (-1)^n \cdot I_3 + C_n^1 (-1)^{n-1} \cdot B^1 + C_n^2 (-1)^{n-2} \cdot B^2 \\
&= (-1)^n \cdot I_3 + (-1)^{n-1} n \cdot B^1 + (-1)^{n-2} \tfrac{n(n-1)}{2} \cdot B^2 \\
&= (-1)^n \cdot (I_3 - nB + \tfrac{n(n-1)}{2} \cdot B^2) \\
&= (-1)^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{n(n+1)}{2} & 1 & -n \\ -n & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

.

(3) $B = A + I_3 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
B^3 &= (A + I_3)^3 \\
&= A^3 + 3A^2 + 3A + I_3 \quad \text{car } A \text{ et } I_3 \text{ commutent.}
\end{aligned}$$

Or $B^3 = 0$ donc: $A^3 + 3A^2 + 3A + I_3 = 0$.

Ainsi: $-A^3 - 3A^2 - 3A = I_3$.

Donc $(-A^2 - 3A - 3I_3) \cdot A = A \cdot (-A^2 - 3A - 3I_3) = I_3$.

Donc $A$ est inversible et:

$$A^{-1} = -A^2 - 3A - 3AI_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Correction exercice 8.

$$(1)\ \text{Soit } (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \text{ et } C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ x & y-1 & z\\ y+z & x+z & x+y\end{pmatrix}.$$

On remarque que $C$ est $L$-magique.

$$|C|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1\\ x & y-1 & z\\ y+z & x+z & x+y\end{vmatrix},\ L_1=L_1+L_2+L_3.$$

$$|C|=\begin{vmatrix} x+y+z+1 & x+y+z+1 & x+y+z+1\\ x & y-1 & z\\ y+z & x+z & x+y\end{vmatrix}\begin{matrix} C_2\leftarrow C_2-C_1\\ C_3\leftarrow C_3-C_1\end{matrix}$$

$$|C|=\begin{vmatrix} x+y+z+1 & 0 & 0\\ x & y-x-1 & z-x\\ y+z & x-y & x-z\end{vmatrix}$$

$$|C|=(x+y+z+1)\cdot\begin{vmatrix} y-x-1 & z-x\\ x-y & x-z\end{vmatrix}$$

$$|C|=(x+y+z+1)\cdot(x-z)\cdot\begin{vmatrix} y-x-1 & -1\\ x-y & 1\end{vmatrix}$$

$$|C|=(-1)\cdot(x+y+z+1)\cdot(x-z).$$

$$\det C=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3,\quad \begin{matrix} & x+y+z+1=0\\ \text{ou} & x-z=0\end{matrix}\ \}.$$

Correction exercice 7.

1. (a) **Par substitution.** La première équation s'écrit aussi $y=1-2x$. On remplace maintenant $y$ dans la deuxième équation

$$3x+7y=-2\implies 3x+7(1-2x)=-2\implies 11x=9\implies x=\frac{9}{11}.$$

On en déduit $y$ : $y=1-2x=1-2\frac{9}{11}=-\frac{7}{11}$. La solution de ce système est donc le couple $(\frac{9}{11},-\frac{7}{11})$. N'oubliez pas de vérifier que votre solution fonctionne !

(b) **Par le pivot de Gauss.** On garde la ligne $L_1$ et on remplace la ligne $L_2$ par $2L_2-3L_1$ :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 1\\ 3x & + & 7y & = & -2\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 1\\ & & 11y & = & -7\end{array}\right.$$

On obtient un système triangulaire : on en déduit $y = -\frac{7}{11}$ et alors la première ligne permet d'obtenir $x = \frac{9}{11}$.

(c) **Par les matrices.** En terme matriciel le système s'écrit

$$AX = Y \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On trouve la solution du système en inversant la matrice :

$$X = A^{-1}Y.$$

L'inverse d'une matrice $2 \times 2$ se calcule ainsi

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Il faut bien sûr que le déterminant $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ soit différent de 0.

Ici on trouve

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 \\ -7 \end{pmatrix}$$

(d) **Par les formules de Cramer.** Les formules de Cramer pour un système de deux équations sont les suivantes si le déterminant vérifie $ad - bc \neq 0$ :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & e \\ cx & + & dy & = & f \end{array}\right. \implies x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

Ce qui donne ici :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{9}{11} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} = -\frac{7}{11}$$

2. (a) Avant tout on regarde s'il existe une solution unique, c'est le cas si et seulement si le déterminant est non nul. Pour le premier système le déterminant est $\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2+1 & 2a \end{vmatrix} = a^2 - 1$ donc il y a une unique solution si et seulement si $a \neq \pm 1$.

Bien sûr toutes les méthodes conduisent au même résultat ! Par exemple par substitution, en écrivant la première ligne $y = 2 - ax$, la deuxième ligne devient $(a^2+1)x + 2a(2-ax) = 1$. On en déduit que si $a \neq \pm 1$ alors $x = \frac{4a-1}{a^2-1}$ puis $y = \frac{-2a^2+a-2}{a^2-1}$.



Traitons maintenant les cas particuliers. Si $a = 1$ alors le système devient : $\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 2 \\ 2x & + & 2y & = & 1 \end{array}\right.$

Mais on ne peut avoir en même temps $x + y = 2$ et $x + y = \frac{1}{2}$. Donc il n'y a pas de solution.

Si $a = -1$ alors le système devient : $\left\{\begin{array}{ccccc} -x & + & y & = & 2 \\ 2x & - & 2y & = & 1 \end{array}\right.$ et il n'y a pas de solution.

(b) Ici le déterminant est $\begin{vmatrix} a+1 & a-1 \\ a-1 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)^2-(a-1)^2 = 4a$.

Si $a \neq 0$ alors on trouve la solution unique $(x,y)$. Par exemple avec la formule de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix}}{4a} = \frac{1}{2a} \text{ et } y = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ a-1 & 1 \end{vmatrix}}{4a} = \frac{1}{2a}.$$

Si $a = 0$ il n'y a pas de solution.

## Correction exercice 9.

Notons l'ancienne base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et ce qui sera la nouvelle base $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$. Soit $P$ la matrice de passage qui contient -en colonnes- les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base $\mathscr{B}'$ exprimés dans l'ancienne base $\mathscr{B}$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On vérifie que $P$ est inversible (on va même calculer son inverse) donc $\mathscr{B}'$ est bien une base. De plus

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et on calcule } B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$B$ est la matrice de $f$ dans la base $\mathscr{B}'$.