Université Mohamed Khider Biskra
Faculté des SE et SNV
Département de SM
Première année Licence: LMD, SM

Année Universitaire: 2021-2020
Premier Semestre, Module: Maths II

TD1

Exercice 1.

Soit $u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 - x_3)$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Déterminer $\ker(u)$.

Exercice 2.

Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + y + z, -x + 2y + 2z)$$

On appelle $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\beta' = (f_1, f_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner une base et la dimension de $\ker(f)$ et une base et la dimension de $Im(f)$.

Exercice 3.

Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(u) = (-2x + y + z, x - 2y + z)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner une base de $\ker(f)$, en déduire $\dim(Im(f))$.
3. Donner une base de $Im(f)$.

Exercice 4.

On considère l'application $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$h(x, y) = (x - y, -3x + 3y)$$

1. Montrer que h est une application linéaire.
2. Montrer que h est ni injective ni surjective.
3. Donner une base de son noyau et une base de son image.

Exercice 5.

Soit f l'application linéaire $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, 2x_1 + x_2 - 3x_3, -x_2 + 2x_3)$$

Et soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$.
2. Déterminer les coordonnées de $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ dans la base canonique.
3. Calculer une base de $\ker(f)$ et une base de $Im(f)$.

CORRECTIONS

Correction exercice 1.

1. Soient $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, et soient λ et μ deux réels.
$$\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3) = (X_1, X_2, X_3)$$
Donc
$$u(\lambda x + \mu y) = (X_1 + X_2 + X_3, 2X_1 + X_2 - X_3)$$
$$= \big((\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2) + (\lambda x_3 + \mu y_3), 2(\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2) - (\lambda x_3 + \mu y_3)\big)$$
$$= \big(\lambda(x_1 + x_2 + x_3) + \mu(y_1 + y_2 + y_3), \lambda(2x_1 + x_2 - x_3) + \mu(2y_1 + y_2 - y_3)\big)$$
$$= \lambda(x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 - x_3) + \mu(y_1 + y_2 + y_3, 2y_1 + y_2 - y_3) = \lambda u(x) + \mu u(y)$$
Ce qui montre que u est linéaire.
2.
$$x = (x_1, x_2, x_3) \in \ker(u) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow L_2 - 2L_1 \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = -3x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 = -3x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -3x_3 \end{cases}$$
Donc $x = (2x_3, -3x_3, x_3) = x_3(2, -3, 1)$, si on pose $a = (2, -3, 1)$
$$\ker(u) = Vect(a)$$

Correction exercice 2.

1. Soient $u = (x, y, z)$ et $u' = (x', y', z')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et soient λ et λ' deux réels
$$\lambda u + \lambda' u' = (\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z')$$
$$f(\lambda u + \lambda' u') = \big(\lambda x + \lambda' x' + \lambda y + \lambda' y' + \lambda z + \lambda' z', -(\lambda x + \lambda' x') + 2(\lambda y + \lambda' y') + 2(\lambda z + \lambda' z')\big)$$
$$= \big(\lambda(x + y + z) + \lambda'(x' + y' + z'), \lambda(-x + 2y + 2z) + \lambda'(-x' + 2y' + 2z')\big)$$
$$= \lambda(x + y + z, -x + 2y + 2z) + \lambda'(x' + y' + z', -x' + 2y' + 2z') = \lambda f(u) + \lambda' f(u')$$
Donc f est linéaire.
2.
$$u = (x, y, z) \in \ker(u) \Leftrightarrow (x + y + z, -x + 2y + 2z) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 + L_1 \end{matrix} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}$$
$$u = (0, -z, z) = z(0, -1, 1)$$
On pose $a = (0, -1, 1)$, a est une base de $\ker(f)$.
$$Im(u) = vect\big(f(e_1), f(e_2), f(e_3)\big)$$
$$f(e_1) = (1, -1) = f_1 - f_2; f(e_2) = (1,2) = f_1 + 2f_2 \text{ et } f(e_3) = (1,2) = f_1 + 2f_2$$
$$Im(u) = vect(f_1 - f_2, f_1 + 2f_2, f_1 + 2f_2) = vect(f_1 - f_2, f_1 + 2f_2)$$
$f_1 - f_2$ et $f_1 + 2f_2$ ne sont pas proportionnels ils forment donc une famille libre de $Im(f)$, comme c'est une famille génératrice de $Im(f)$, c'est une base de $Im(f)$et donc $\dim(Im(f) = 2$. Remarque $Im(f) = \mathbb{R}^2$.

Correction exercice 3.

1.

$$\lambda u + \lambda' u' = (\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda z')$$

$$\begin{aligned} f(\lambda u + \lambda' u') &= \big(-2(\lambda x + \lambda' x') + (\lambda y + \lambda' y') + (\lambda z + \lambda z'), (\lambda x + \lambda' x') - 2(\lambda y + \lambda' y') \\ &\quad + (\lambda z + \lambda z'), (\lambda x + \lambda' x') + (\lambda y + \lambda' y') - 2(\lambda z + \lambda z')\big) \\ &= \big(\lambda(-2x + y + z) + \lambda'(-2x' + y' + z'), \lambda(x - 2y + z) + \lambda'(x' - 2y' + z')\big) \\ &= \lambda(-2x + y + z, x - 2y + z) + \lambda'(-2x' + y' + z', x' - 2y' + z') = \lambda f(u) + \lambda' f(u) \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

2.

$$u \in \ker(f) \Leftrightarrow f(u) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow (-2x + y + z, x - 2y + z) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ 2L_2 + L_1 \end{matrix} \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2z = 0 \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

$$u = (z, z, z) = z(1,1,1)$$

Donc $\ker(f) = Vect(a)$ avec $a = (1,1,1)$.

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f) + \dim(Im(f) = \dim(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow 1 + \dim(Im(f) = 3 \Leftrightarrow \dim(Im(f) = 2$$

3. Donc $Im(f) = \mathbb{R}^2$. Une base est $\big((1,0), (0,1)\big)$

Correction exercice 4.

1. Soit $u = (x, y)$ et $u' = (x', y')$, $\lambda u + \lambda' u' = (\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y')$

$$\begin{aligned} h(\lambda u + \lambda' u') &= \big(\lambda x + \lambda' x' - (\lambda y + \lambda' y'), -3(\lambda x + \lambda' x') + 3(\lambda y + \lambda' y')\big) \\ &= \big(\lambda(x - y) + \lambda'(x' - y'), \lambda(-3x + 3y) + \lambda'(-3x' + 3y')\big) \\ &= \lambda(x - y, -3x + 3y) + \lambda'(x' - y', -3x' + 3y') = \lambda h' u) + \lambda' h(u') \end{aligned}$$

   Donc h est linéaire.

2. $h(1,1) = (0,0) = h(0,0)$ et pourtant $(1,1) \neq (0,0)$ donc h n'est pas injective.
   On va montrer que $(1,0)$ n'a pas d'antécédent. Supposons qu'il existe $u = (x, y)$ tel que $(1,0) = h(u) \Leftrightarrow (1,0) = (x - y, -3x + 3y) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = x - y \\ 0 = -3x + 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = x - y \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 0 \\ x = y \end{cases}$, c'est impossible donc h n'est pas surjective.
   h est un endomorphisme donc h est injectif si et seulement si h est surjectif. Ici, h n'est pas injectif donc h n'est pas surjectif.

3. $u = (x, y) \in \ker(h) \Leftrightarrow (x - y, -3x + 3y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ -3x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y$
   Donc $u = (x, x) = x(1,1)$, $(1,1)$ est u vecteur non nul qui engendre $\ker(h)$, c'est une base de $\ker(h)$
   $h(e_1) = (1 - 0, -3 \times 1 + 3 \times 0) = (1, -3) = e_1 - 3e_2$ et
   $h(e_2) = ((0 - 1, -3 \times 0 + 3 \times 1) = (-1,3) = -e_1 + 3e_2$

$$Im(h) = Vect\big(h(e_1), h(e_2)\big) = Vect(e_1 - 3e_2, -e_1 + 3e_2) = Vect(e_1 - 3e_2)$$

   $e_1 - 3e_2$ est un vecteur non nul qui engendre $Im(h)$, c'est une base de $Im(h)$.

Correction exercice 5.

1. $f(e_1) = (1,2,0) = 1 \times e_1 + 2e_2 + 0 \times e_3$
   $f(e_2) = (0,1,-1) = 0 \times e_1 + 1 \times e_2 - 1 \times e_3$
   et $f(e_3) = (-1,-3,2) = -1 \times e_1 - 3e_2 + 2e_3$
2. Les coordonnées de $f(e_1)$ dans la base (e_1, e_2, e_3) sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

   Les coordonnées de $f(e_2)$ dans la base (e_1, e_2, e_3) sont $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

   Les coordonnées de $f(e_3)$ dans la base (e_1, e_2, e_3) sont $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$
3.

$$u = (x_1, x_2, x_3) \in \ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow L_2 - 2L_1 \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Donc $\ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Première méthode :

$Im(f) = \text{Vect}\big(f(e_1), f(e_2), f(e_3)\big)$

Puis on regarde si la famille $\big(f(e_1), f(e_2), f(e_3)\big)$ est libre.

$$\alpha_1 f(e_1) + \alpha_2 f(e_2) + \alpha_3 f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Il s'agit du même système que ci-dessus donc $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Cette famille est libre et elle engendre $Im(f)$ c'est une base de $Im(f)$, on en conclut que $\dim\big(Im(f)\big) = 3$ et que $Im(f) = \mathbb{R}^3$.

Deuxième méthode (plus compliquée) :

$$Im(f) = Vect\big(f(e_1), f(e_2), f(e_3)\big) = Vect(e_1 + 2e_2, e_2 - e_3, -e_1 - 3e_2 + 2e_3)$$
$$= Vect(e_1 + 2e_2, e_2 - e_3, -e_1 - 3e_2 + 2e_3 + e_1 + 2e_2)$$
$$= Vect(e_1 + 2e_2, e_2 - e_3, -e_2 + 2e_3)$$
$$= Vect(e_1 + 2e_2, e_2 - e_3 - e_2 + 2e_3, -e_2 + 2e_3)$$
$$= Vect(e_1 + 2e_2, e_3, -e_2 + 2e_3)$$

$$= Vect(e_1 + 2e_2, e_3, -e_2 + 2e_3 - 2e_3)$$
$$= Vect(e_1 + 2e_2, e_3, -e_2)$$
$$= Vect(e_1 + 2e_2, e_3, e_2) = Vect(e_1, e_3, e_2) = Vect(e_1, e_2, e_3)$$

Donc une base de $Im(f)$ est (e_1, e_2, e_3) et bien sur $Im(f) = \mathbb{R}^3$.

Troisième méthode :

Avec le théorème du rang, $\dim(\ker(f)) + \dim(Im(f) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$, comme $\dim(\ker(f)) = 0$, $\dim\big(Im(f)\big) = 3$ donc $Im(f) = \mathbb{R}^3$ et une base de $Im(f)$ est (e_1, e_2, e_3).