LOI DE COMPOSITION INTERNE :

DEFINITION
Soit E un ensemble. Une *loi de composition interne* (LCI) sur E est une application T de $E \times E$ dans E, notée généralement de façon infixe : on écrit $x\ T\ y$ plutôt que $T\,(x, y)$, lorsque $(x, y) \in E \times E$.

EXEMPLES
- *La somme sur* $\mathbb{N}$; $\mathbb{N}^*$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}$; $\mathbb{C}$ *(mais pas sur* $\mathbb{Z}^*$; $\mathbb{Q}^*$; $\mathbb{R}^*$; $\mathbb{C}^*$*).*
- *Le produit sur* $\mathbb{N}$; $\mathbb{N}^*$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}$; $\mathbb{C}$ ...
- *La différence sur* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{Z}$ *(mais pas sur* $\mathbb{N}$*).*
- *La composition des applications sur* F^F *(applications de F dans F).*
- *La loi* $\oplus$ *définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par* $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

DEFINITION
- Une LCI T sur E sera dite *associative* lorsque :
$$\forall x; y; z \in E;\ \ (x\ T\ y)\ T\ z\ =\ x\ T\ (y\ T\ z).$$
- Une LCI T sur E sera dite *commutative* lorsque :
$$\forall x; y \in E;\ \ x\ T\ y\ =\ y\ T\ x.$$
- Si T est une LCI associative sur E, $e \in E$ est un *neutre* pour T lorsque :
$$\forall x \in E, \qquad x\ T\ e = e\ T\ x = x.$$

PROPOSITION *Si T est une LCI associative sur E qui admet un neutre, alors ce neutre est unique. On peut alors parler DU neutre de T.* ■

EXEMPLES
- *La somme et le produit sur* C *(donc sur ses sous-ensembles) est associative et commutative, et admettent pour neutres respectifs* 0 *et* 1.
- *La différence n'est ni associative ni commutative sur* $\mathbb{R}$.
- *La loi* $\circ$ *(composition des fonctions de F dans F) est associative, mais n'est pas commutative (sauf si F est un singleton, auquel cas. . .). Elle admet un neutre, qui est l'application* Id_F .
- *Les lois* $\cup$, $\cap$ *et* Δ *sur* $\mathcal{P}(F)$ *sont associatives et commutatives. Elles admettent pour neutres respectifs* $\emptyset$, F, *et* $\emptyset$.
- $\oplus$ *est associative et commutative sur* $\mathbb{R}^2$.
- *Vue comme LCI sur* $\mathbb{N}^*$, $+$ *n'admet pas d'élément neutre.*

DEFINITION
Si T est une LCI associative sur E qui admet un neutre e et $x \in E$, on dit que x admet un *symétrique pour* T s'il existe $y \in E$ tel que $x\ T\ y = y\ T\ x = e$.

PROPOSITION 2 *Dans la définition précédente, si y existe, il est unique. On peut alors parler DU symétrique de x pour T. On le note généralement x^{-1}.*

REMARQUES
- Les lois notées . sont souvent "oubliées" dans l'écriture : $x.y$ devient xy.
- Lorsque la loi est additive $+$, le symétrique est noté $-x$ et est appelé "opposé".

Groupes

DEFINITION

Un *groupe* est un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne $(G, *)$ tels que :

- $*$ est associative;
- $*$ admet un neutre e_G ;
- tout élément de G est symétrisable (admet un symétrique) pour $*$. Si

$*$ est commutative, on dit que $(G, *)$ est commutatif, ou encore *abélien*.

EXEMPLES

- $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}$; $\mathbb{C}$ *munis de la somme.*
- $\mathbb{Q}^*$; $\mathbb{R}^*$; $\mathbb{C}^*$ *munis du produit.*

EXEMPLES

Pour diverses raisons (à déterminer), les couples suivants ne sont pas des groupes :
$(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{R}, .)$.

EXERCICE 3 *Montrer que* $(\mathbb{R}^2, \oplus)$ *est un groupe commutatif.*

Sous-groupes

DEFINITION

Un *sous-groupe* d'un groupe $(G, *)$ est une partie *non vide* H de G telle que :

$*$ induit sur H une loi de composition interne.

Muni de cette loi, H est un groupe.

On note alors : $H < G$.

REMARQUES

- *En pratique*, pour montrer qu'une partie non vide H de G en constitue un sous-groupe, il suffit de vérifier :
  - $e_G \in H$;
  - H est stable par $*$
  - pour tout $x \in H$, le symétrique x, a priori dans G, est en fait dans H.
    i.e ($\forall x; y \in H: x * y \in H$ *et* $\forall x \in H: x^{-1} \in H$; x^{-1} est l'élément symétrique de x,
    ou encore $\forall x; y \in H: x * y^{-1} \in H$; y^{-1} est l'élément symétrique de y)

Anneaux

Structure d'anneau

DEFINITION

Un *anneau* est un ensemble muni de deux LCI $(A, +, .)$ tels que :

- $(A, +)$ est un groupe *commutatif* de neutre noté 0_A.
- La loi . est une LCI sur A associative et *distibutive* à gauche et à droite par rapport à + :

$$\forall x, y, z \in A, \qquad x.(y+z) = x.y + x.z \text{ et } (x+y).z = x.z + y.z$$

- La loi . admet un neutre différent de 0_A, noté 1_A.

Si la loi . est commutative, l'anneau est dit commutatif ou abélien.

EXEMPLES

- $(\mathbb{Z}, +, .)$, $(\mathbb{Q}, +, .)$, $(\mathbb{R}, +, .)$ *et* $(\mathbb{C}, +, .)$ *sont des anneaux bien connus*

Corps

Structure de corps

DEFINITION

- Un *corps* est un anneau commutatif dans lequel tout élément non nul est inversible.
- Si $(K, +, .)$ est un corps, un *sous-corps* de K est un sous-anneau K_1 de K tel que pour tout élément non nul x de K_1, on a $x^{-1} \in K_1$; $(K_1, +, .)$ est alors un corps

Exemples

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des corps, mais pas $\mathbb{Z}$ (2 n'est pas inversible).