Relations

1. Relations binaires

Définition. Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une propriété portant sur les couples d'éléments de E. On notera $a\,\mathcal{R}\,b$ le fait que la propriété est vraie pour le couple $(a, b) \in E \times E$.

Exemples. L'inégalité $\leq$ est une relation sur $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$. Le parallélisme et l'orthogonalité sont des relations sur l'ensemble des droites du plan ou de l'espace. L'inclusion $\subset$ est une relation sur $\mathcal{P}(X)$, où X est un ensemble quelconque.

Définitions. Soit $\mathcal{R}$ une relation sur un ensemble E.

R est réflexive si pour tout $x \in E$, on a $x\,\mathcal{R}\,x$;
R est symétrique si pour tout $x, y \in E$, on a $x\,\mathcal{R}\,y \Rightarrow y\,\mathcal{R}\,x$;
R est antisymétrique si pour tout $x, y \in E$, $(x\,\mathcal{R}\,y$ et $y\,\mathcal{R}\,x) \Rightarrow x = y$;
R est transitive si pour tout $x, y, z \in E$, $(x\,\mathcal{R}\,y$ et $y\,\mathcal{R}\,z) \Rightarrow x\,\mathcal{R}\,z$.

2. Relations d'équivalence

Définition. Une relation binaire est une relation d'équivalence si et seulement si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Exemple. Le parallélisme est une relation d'équivalence sur l'ensemble des droites.

Définition. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E, et a un élément de E. On appelle classe d'équivalence de a l'ensemble $\mathcal{C}(a) = \{x \in E, x\,\mathcal{R}\,a\}$.

Propriété. Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E et que $a, b \in E$ vérifient $a\,\mathcal{R}\,b$, alors a et b on même classe d'équivalence.

Théorème. Une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur un ensemble E définit une partition de E dont les éléments sont les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$. Réciproquement, toute partition de E définit sur E une relation d'équivalence dont les classes coïncident avec les éléments de la partition.

Définitions. L'ensemble des classes d'équivalence se nomme ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$ et se note $E/\mathcal{R}$. L'application $E \to E/\mathcal{R}$ qui à tout élément x de E associe sa classe d'équivalence se nomme application (ou projection) canonique.

Exercice : Dans $\mathbb{C}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$z\,\mathcal{R}\,z' \Leftrightarrow |z| = |z'|.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Dêterminer la classe d'équivalence de $z \in \mathbb{C}$.

3. Relations d'ordre

Définition. Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une relation d'ordre si et seulement si elle est ré- flexive, antisymétrique et transitive. On dit alors que E est un ensemble ordonné (par $\mathcal{R}$). Une relation d'ordre est souvent notée $\leq$.

Exemples. L'inégalité $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$. L'inclusion est une relation d'ordre.

Définitions. Une relation d'ordre sur E est dite totale si deux éléments quelconques de E sont toujours comparables : pour tout $x, y \in E$, on a $x\,\mathcal{R}\,y$ ou $y\,\mathcal{R}\,x$. Dans le cas contraire, on dit que l'ordre est partiel.

Exemples. $\leq$ est un ordre total sur $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$. En général, l'inclusion est un ordre partiel. La divisibilité dans $\mathbb{N}^*$ est un ordre partiel.

Définition. Une relation binaire est un ordre strict si elle est transitive et vérifie

$x\,\mathcal{R}\,y \Rightarrow x \neq y$

.**Exemple.** L'inégalité stricte $<$ définit un ordre strict sur $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$.

Exercice : Dans $\mathbb{N}^*$on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$n\mathcal{R}m \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*: n = km$

Monter que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$.