السنة الأولى
جذع مشترك علوم وتكنولوجيا
2021-2020

الفصل الثاني:

الحركيات

الأستاذة ناصر أمال
2021/2020

1. تمهيد :

الحركيات هو علم يعنى بدراسة حركة الاجسام ذات السرعات الصغيرة جدا اذا ما قورنت بسرعة الضوء دون التطرق الى القوى المسببة لهذه الحركات. ومنه فإن هدف الحركيات هو وصف الحركة انطلاقا من المعادلات الرياضية للموضع والسرعة والتسارع.

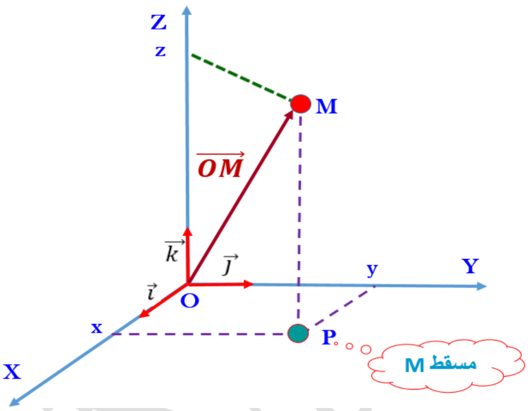
النقطة المادية تمثل اصغر جسم مادي مهمل الابعاد حيث يحدد فقط رياضيا بإحداثيات منسوبة الى هيكل هندسي ألا وهو المعلم، اما مسار النقطة المادية فهو مجموعة النقاط التي تسلكها النقطة اثناء حركتها و يعبر عنها رياضا بعلاقة تربط بين الاحداثيات وتكون خالية من الزمن و هو متغير حقيقي موجب يرمز له بالرمز t

بما ان تعيين المواضع الفضائية يستدعي ثلاث ابعاد فإنه يمكن تمثيل الفضاء بمعلم ثابت ذو ثلاث محاور متعامدة موجهة ومدرجة مبدأها هو O مع تحديد أشعة الوحدة الثلاثة وفق الاتجاهات الموجهة و بهذا تصبح أي نقطة مادية M من هذا الفضاء محددة تماما بالنسبة لنقطة الأصل أو المبدأ O.

يجدر بنا لإشارة الى أنه هناك العديد من نظم الاحداثيات، والتعبير عن طبيعة حركة جسم ما قد يأخذ اشكالا مختلفة في أنظمة الاحداثيات المختلفة، كما وأنه قد تكون لبعض مسائل الميكانيك تناظرات معينة مما يفرض علينا استخدام جمل احداثيات دون غيرها بغرض تسهيل الحساب. فيما يلي سنتطرق لمختلف نظم الاحداثيات الأكثر شيوعا في الفيزياء.

2. جمل الاحداثيات

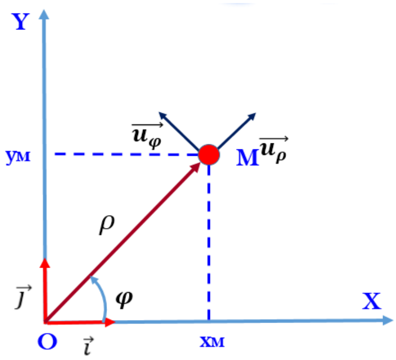
1.2. جملة الاحداثيات الكارتيزية (الديكارتية)



لأجل تحديد موضع نقطة M في المستوي او الفضاء نستخدم جملة الاحداثيات الكارتيزية حيث يرمز للمعلم الديكارتي بالرمز : $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ونرفق كل نقطة M بالإحداثيات (x_M, y_M, z_M) والتي تعبر عن مساقط الشعاع $\overrightarrow{OM}$ على المحاور Ox ، Oy و Oz على الترتيب.

ونكتب : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ حيث تعطى الطويلة بالشكل : $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x_M^2 + y_M^2 + z_M^2}$

2.2. جملة الاحداثيات القطبية (ρ , φ)



تستخدم الاحداثيات القطبية لتعيين حركة نقطة مادية M اثناء حركتها المستوية. شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$ والذي يرمز لطويلته في هذه الجملة بالرمز: ρ حيث : $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u_\rho}$

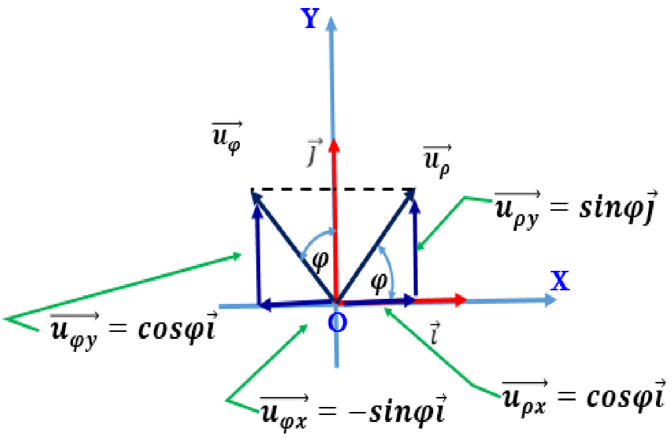
من الشكل المقابل :

$$cos\varphi = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{x}{\rho} \Rightarrow x = \rho cos\varphi \,; \quad sin\varphi = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{y}{\rho} \Rightarrow y = \rho sin\varphi$$

ومنه نعرف القاعدة القطبية $(\overrightarrow{u_\rho}, \overrightarrow{u_\varphi})$ في المعلم الكارتيزي $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ بالشعاع $\overrightarrow{u_\rho}$ والذي يمثل شعاع الوحدة الموجه لشعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$ على امتداد ρ و $\overrightarrow{u_\varphi}$ شعاع الوحدة الموجه بالزاوية φ والتي يصنعها شعاع الموضع مع المحور Ox ومنه يعرف شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$ في الاحداثيات القطبية كما يلي :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u_\rho} \\ \rho = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

يمكن المرور من الاحداثيات الكارتيزية الى الاحداثيات القطبية والعكس صحيح يجدر بنا أن نذكر في هذا المقام بأن اشعة وحدة القاعدة الكارتيزية ثابتة في حين ان اشعة الوحدة في القاعدة القطبية متغيرة مع الزمن حيث سنعتمد على الشكل الموالي لإعطاء العلاقة بين اشعة الوحدة في النظامين الكارتيزي والقطبي.



$$\overrightarrow{u_\rho} = cos\varphi\vec{\imath} + sin\varphi\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{u_\varphi} = -sin\varphi\vec{\imath} + cos\varphi\vec{\jmath}$$

كما يمكن إيجاد مشتقات اشعة الوحدة في القاعدة القطبية $(\overrightarrow{u_\rho}, \overrightarrow{u_\varphi})$ بدلالة اشعة القاعدة الكارتيزية $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ والتي تكتب كما يلي :

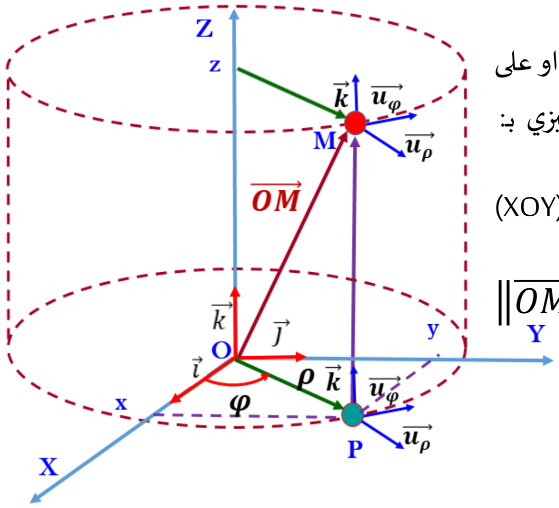
المشتق الأول:

$$\dot{\overrightarrow{u_\rho}} = \dot{\varphi}\overrightarrow{u_\varphi} \qquad \text{و} \qquad \dot{\overrightarrow{u_\varphi}} = -\dot{\varphi}\overrightarrow{u_\rho}$$

المشتق الثاني:

$$\ddot{\overrightarrow{u_\rho}} = \ddot{\varphi}\overrightarrow{u_\varphi} - \dot{\varphi}^2\overrightarrow{u_\rho} \qquad \text{و} \qquad \ddot{\overrightarrow{u_\varphi}} = -\ddot{\varphi}\overrightarrow{u_\rho} - \ddot{\varphi}^2\overrightarrow{u_\varphi}$$

3.2 الاحداثيات الاسطوانية $(\boldsymbol{\rho}\,,\boldsymbol{\varphi}\,,\boldsymbol{z})$



تستخدم هذه الجملة عادة في دراسة الحركات الحلزونية او على شكل دوامة. نفرض نقطة مادية Mمعرفة في معلم كارتيزي بـ: $\overrightarrow{OM}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ ونسمي النقطة Pمسقطها على المستوى (XOY) والمعرفة بالشعاع $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. حيث : $\|\overrightarrow{OM}\|=$ r و $\|\overrightarrow{OP}\|=\rho$

من الشكل المقابل فإن : $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM}$

ومنه نكتب الشعاع $\overrightarrow{OM}$ في النظام الاسطواني $(\overrightarrow{u_\rho},\overrightarrow{u_\varphi},\vec{k})$ بالشكل : $\overrightarrow{OM}=\rho\overrightarrow{u_\rho}+z\vec{k}$

الاحداثيات الكارتيزية

$$\begin{cases}x=\rho cos\varphi\\ y=\rho sin\varphi\\ z=z\end{cases}$$

الاحداثيات الاسطوانية

$$\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2}\\ \varphi=tg^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)\\ z=z\end{cases}$$

اشعة الوحدة في الأساس الاسطواني هي اشعة الأساس القطبي مضافا اليها الشعاع $\vec{k}$

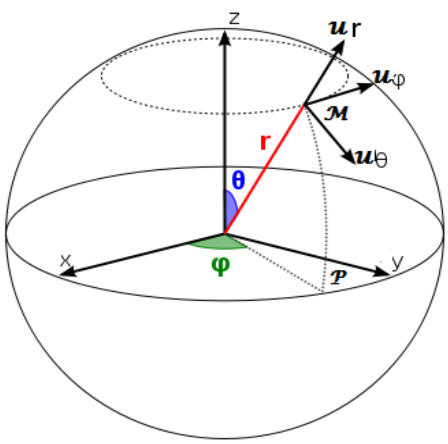
$$\overrightarrow{u_\rho}=cos\varphi\vec{i}+sin\varphi\vec{j}$$

$$\overrightarrow{u_\varphi}=-sin\varphi\vec{i}+cos\varphi\vec{j}$$

$$\vec{k}$$

4.2 الاحداثيات الكروية $(\boldsymbol{r}\,,\ \boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\varphi})$

هذا النوع من الاحداثيات هو الأفضل لمعالجة المسائل ذات التناظر الكروي وافضل مثال على ذلك هو حرة الاجسام على سطح الكرة الأرضية والموضح بالشكل الموالي :



نفرض النقطتين M و مسقطها P في المستوى (xoy) تعرف الاحداثيات الكروية للنقطة M بـ: $M(r,\theta,\varphi)$ حيث :

الطويلة : $\|\overrightarrow{OM}\|=r$

الزاوية θ والتي يصنعها المحور (OZ) مع شعاع الموضع

$$0\le\theta\le\pi$$

الزاوية φ والتي يصنعها المحور (OX) مع الشعاع المسقط $\overrightarrow{OP}$ حيث : $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

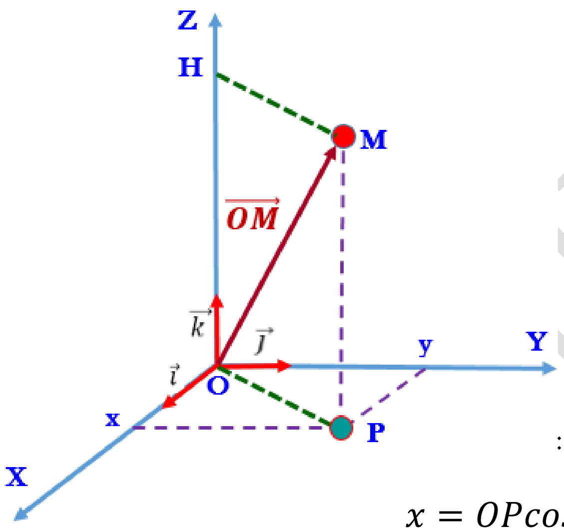
القاعدة الكروية : $\left(\overrightarrow{u_r}\, ,\overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi}\right)$

- يسمح لنا شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$ بتعيين اول شعاع في هذه القاعدة باعتبار أن :

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} \Rightarrow \overrightarrow{u_r} = \frac{\overrightarrow{OM}}{r}$$

- عندما تتغير الزاوية θ فقط فإن النقطة M ترسم نصف دائرة طولية قطرها r والشعاع $\overrightarrow{u_\theta}$ هو الشعاع المماس لنصف الدائرة الطولية واتجاهه هو نفسه اتجاه الزاوية أي من (OZ) نحو شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$.
- عندما تتغير الزاوية φ فإن النقطة M ترسم نصف دائرة عرضية قطرها $rsin\theta$ والشعاع $\overrightarrow{u_\varphi}$ هو الشعاع المماس لنصف هذه الدائرة واتجاهه هو نفسه اتجاه الزاوية φ أي من (OX) نحو الشعاع $\overrightarrow{OP}$.
- الاشعة الثلاث $\left(\overrightarrow{u_r}\, ,\overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi}\right)$ تشكل القاعدة الكروية المباشرة وهي متحركة في المعلم.

العلاقة بين الاحداثيات الكارتيزية والكروية



ليكن الشكل المقابل حيث : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}$

نسمي النقطة H مسقط النقطة M على المحور (OZ) حيث:

$$z = OH = PM = rcos\theta$$

النقطة P هي مسقط M على المستوى (XOY) ومنه فإن :

$$OP = HM = rsin\theta$$

الاحداثيات x و y للنقطة M هي نفسها بالنسبة للنقطة P وبالتالي :

$$x = OPcos\varphi = rsin\theta cos\varphi$$

$$y = OPsin\varphi = rsin\theta sin\varphi$$

اذن احداثيات النقطة M هي :

الاحداثيات الكارتيزية

$$\begin{cases} x = rsin\theta cos\varphi \\ y = rsin\theta sin\varphi \\ z = rcos\theta \end{cases}$$

الاحداثيات الكروية

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = tg^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \\ \varphi = tg^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$$

العلاقة بين أشعة الوحدة في الاساسين الكارتيزي والكروي

	أشعة الوحدة الكارتيزية		
	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
أشعة الوحدة الكروية			
$\overrightarrow{u_r}$	$sin\theta cos\varphi$	$sin\theta sin\varphi$	$cos\theta$
$\overrightarrow{u_\theta}$	$cos\theta cos\varphi$	$sin\theta sin\varphi$	$-sin\theta$
$\overrightarrow{u_\varphi}$	$-sin\varphi$	$cos\varphi$	

3. مميزات الحركة في مختلف الاحداثيات

1.3. الإحداثيات الكارتيزية $R(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

.1.1.3. شعاع الموضع : يعرف شعاع موضع نقطة مادية M في لحظة زمنية t بالشعاع $\overrightarrow{OM}$ حيث:

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

حيث $x(t)$ ، $y(t)$ و $z(t)$ تمثل احداثيات النقطة وهي اسقاطات شعاع الموضع على محاور المعلم وتمثل كذلك مركبات $\overrightarrow{OM}$.

.2.1.3 شعاع السرعة : يوجد نوعان من السرعة: السرعة المتوسطة والسرعة اللحظية

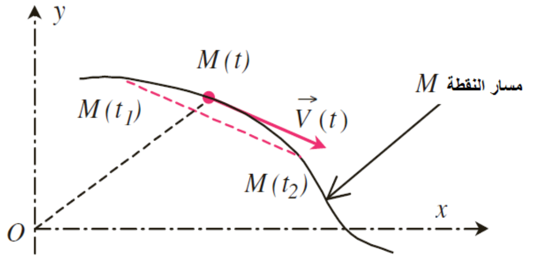
أ) السرعة المتوسطة : هي المسافة المقطوعة على الزمن المستغرق وتعرف كما يلي:

$$\overrightarrow{V_{moy}} = \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t}$$

ومنه: $\overrightarrow{V_{moy}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}$

$\Delta\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{M_1O} + \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{M_1M_2}$ (وهو شعاع الانتقال)

ب) شعاع السرعة اللحظية : يعرف على انه مشتق الموضع بالنسبة للزمن



$$\vec{V}(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t}\right) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

$$\vec{V}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k}$$

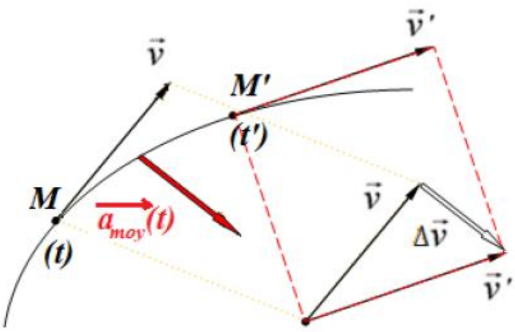
اختصارا نرمز للمشتقات بالنسبة للزمن بالرمز $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ ومنه تصبح عبارة السرعة اللحظية كما يلي:

$$\vec{V}(t) = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

من خصائصه انه شعاع مماسي للمسار وإذا كانت طويلته ثابتة فنقول أن الحركة منتظمة.

3.1.3. شعاع التسارع : للتسارع نوعان متوسط ولحظي. يرمز للتسارع عادة بأحد الرمزين $\vec{a}$ أو $\vec{\gamma}$

أ) **التسارع المتوسط :** تملك النقطة المادية في لحظتين مختلفتين t_1 و t_2 شعاعي موضع $\overrightarrow{OM_1}$ و $\overrightarrow{OM_2}$ يوفق كل منهما شعاع سرعة متوسطة $\overrightarrow{V_{moy1}}$ و $\overrightarrow{V_{moy1}}$ يعرف شعاع التسارع المتوسط كما يلي:



$$\overrightarrow{a_{moy}} = \frac{\vec{V_2} - \vec{V_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$$

شعاع التسارع المتوسط $\overrightarrow{a_{moy}}$ موازي لـ $\Delta\vec{V}$ ويتجه نحو مركز تقعر المسار

ب) **شعاع التسارع اللحظي :** يعرف على انه مشتق السرعة اللحظية بالنسبة للزمن

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}\right) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{dV_x}{dt}\vec{i} + \frac{dV_y}{dt}\vec{j} + \frac{dV_z}{dt}\vec{k}$$

اختصارا نرمز للمشتقات الثانية بالنسبة للزمن بالرمز $\ddot{z}$, $\ddot{y}$, $\ddot{x}$ ومنه تصبح عبارة التسارع اللحظي كما يلي:

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

ملاحظات: إذا كان:

- $\vec{a} = \vec{0}$ فإن الحركة منتظمة أو أن النقطة في حالة سكون.
- $\vec{a} = \overrightarrow{Cst}$ فإن الحركة متغيرة بانتظام
- الجداء السلمي بين شعاعي السرعة والتسارع :
  - $\vec{V} \cdot \vec{a} > 0$ فإن الحركة متسارعة (شعاعي السرعة والتسارع في نفس الاتجاه)
  - $\vec{V} \cdot \vec{a} < 0$ فإن الحركة متباطئة.

4.1.3. معادلة المسار: هي عبارة خالية من الزمن تربط ما بين الاحداثيات وتكتب من الشكل $f(x, y, z) = 0$

امثلة:

1. اذا كانت العبارة هي: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ نقول أن المسار عبارة عن كرة مركزها O ونصف قطرها R في معلم ديكارتي.

2. $f(x,y)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-R^2=0$ هي معادلة دائرة نصف قطرها R ومركزها $C(x_0,y_0)$

مثال: تعطى احداثيات نقطة مادية M بـ:

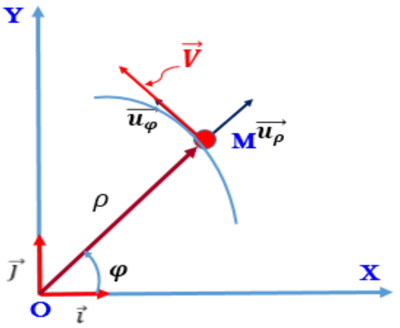
$$\begin{cases} x = bt \\ y = bt(1-\alpha t) \end{cases}$$

حيث : b و α ثابتان موجبان و t هو الزمن

1. أوجد كلا من : شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$ ، شعاع السرعة $\vec{V}$ اللحظية وشعاع التسارع $\vec{a}$
2. معادلة المسار وحدد طبيعته.

الحل يفصل في المحاضرة

2.3. الإحداثيات القطبي $(\overrightarrow{u_\rho},\overrightarrow{u_\varphi})$



1.2.3.شعاع الموضع: لتكن نقطة مادية M مسارها منحنى (C) شعاع الموضع في المعلم القطبي $(\overrightarrow{u_\rho},\overrightarrow{u_\varphi})$ يكتب كما يلي :

$$\overrightarrow{OM}=\rho\overrightarrow{u_\rho}$$

وهي المعادلة الزمنية للحركة في المعلم القطبي

$$\overrightarrow{u_\rho}=cos\varphi\vec{i}+sin\varphi\vec{j}$$

$$\overrightarrow{u_\varphi}=-sin\varphi\vec{i}+cos\varphi\vec{j}$$

2.2.3. شعاع السرعة:

$$\overrightarrow{V(t)}=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=\dot{\rho}\overrightarrow{u_\rho}+\rho\dot{\overrightarrow{u_\rho}}$$

لدينا : $\dot{\overrightarrow{u_\rho}}=\dot{\varphi}\overrightarrow{u_\varphi}$ ومنه تصبح عبارة شعاع السرعة كما يلي :

$$\overrightarrow{V(t)}=\dot{\rho}\overrightarrow{u_\rho}+\rho\dot{\varphi}\overrightarrow{u_\varphi}$$

حيث :

$\dot{\varphi}$ هي السرعة الزاوية للنقطة المادية M.

$V_\rho=\dot{\rho}$ المركبة القطرية لشعاع السرعة.

$V_\varphi=\rho\dot{\varphi}$ المركبة العرضية لشعاع السرعة

ومنه يمكن كتابة شعاع السرعة في النظام القطبي بالمركبات السابقة على الشكل:

$$\overrightarrow{V(t)} = \overrightarrow{V_\rho} + \overrightarrow{V_\varphi}$$

.3.2.3 **شعاع التسارع** : باشتقاق شعاع السرعة

$$\vec{a} = \frac{d\overrightarrow{V(t)}}{dt} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\overrightarrow{u_\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\overrightarrow{u_\varphi}$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_\rho} + \overrightarrow{a_\varphi}$$

a_ρ المركبة القطرية للتسارع

a_φ المركبة العرضية

$\ddot{\varphi}$ التسارع الزاوي للنقطة M

3.3. **الاحداثيات الاسطوانية**

.1.3.3 **شعاع الموضع** : نعرف موضع النقطة المادية M تتحرك على مستوي اسطواني او دوامة باستخدام الاحداثيات الاسطوانية والتي ما هي في الحقيقة إلا امتداد للنظام القطبي في معلم ثلاثي الابعاد. فيها يعطى شعاع الموضع بالشكل:

$$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u_\rho} + z\vec{k}$$

.2.3.3 **شعاع السرعة** : باشتقاق شعاع الموضع نجد :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\rho}\overrightarrow{u_\rho} + \rho\dot{\varphi}\overrightarrow{u_\varphi} + \dot{z}\vec{k}$$

ومنه فإن شعاع السرعة يكتب بدلالة المركبات

$V_\rho = \dot{\rho}$ المركبة القطرية لشعاع السرعة.

$V_\varphi = \rho\dot{\varphi}$ المركبة العرضية لشعاع السرعة

$V_z = \dot{z}$ المركبة المحورية لشعاع السرعة.

.3.3.3 **شعاع التسارع** : باشتقاق السرعة نتحصل على التسارع

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\overrightarrow{u_\rho} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\overrightarrow{u_\varphi} + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_\rho} + \overrightarrow{a_\varphi} + \overrightarrow{a_z}$$

وهو عبارة عن مجموع المركبة القطرية والعرضية بالإضافة الى المركبة المحورية على التوالي

4.3. الاحداثيات الكروية $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$

1.4.3. شعاع الموضع : تعرف النقطة المادية بالإحداثيات $M(r, \theta, \varphi)$ يكتب شعاع موضعها في النظام الكروي بالشكل : $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}$

نعلم أن اشعة القاعدة الكروية تتعلق بالزمن بالشكل الموالي :

$$\overrightarrow{u_r} = sin\theta cos\varphi \vec{\imath} + sin\theta sin\varphi \vec{\jmath} + cos\theta \vec{k}$$

$$\overrightarrow{u_\varphi} = -sin\varphi \vec{\imath} + cos\varphi \vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{u_\theta} = cos\theta cos\varphi \vec{\imath} + cos\theta sin\varphi \vec{\jmath} - sin\theta \vec{k}$$

نذكر بأن الزاوية $\theta = \left(\widehat{Oz, OM}\right)$ والزاوية $\varphi = (\widehat{Ox, OP})$

- المشتق الأول لأشعة الوحدة في القاعدة الكروية :

$$\dot{\overrightarrow{u_r}} = \dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{\varphi} sin\theta \overrightarrow{u_\varphi}$$

$$\dot{\overrightarrow{u_\theta}} = -\dot{\theta}\overrightarrow{u_r} + \dot{\varphi}\, cos\theta \overrightarrow{u_\varphi}$$

$$\dot{\overrightarrow{u_\varphi}} = -\dot{\varphi}(sin\theta \overrightarrow{u_r} + cos\theta \overrightarrow{u_\theta})$$

2.4.3. شعاع السرعة: باشتقاق شعاع الموضع نحصل على عبارة شعاع السرعة كما يلي :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\overrightarrow{u_r}}$$

$$\vec{V} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\dot{\varphi} sin\theta \overrightarrow{u_\varphi}$$

$$\vec{V} = \overrightarrow{V_r} + \overrightarrow{V_\theta} + \overrightarrow{V_\varphi}$$

وهي المركبات الكروية للسرعة.

3.4.3. شعاع التسارع: باشتقاق السرعة نجد:

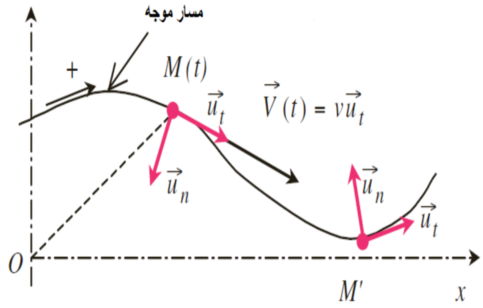
$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_\theta} + \overrightarrow{a_\varphi}$$

حيث: $$\overrightarrow{a_r} = (\ddot{r} - r\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 sin\theta)\overrightarrow{u_r}$$

$$\overrightarrow{a_\theta} = (2r\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 sin\theta cos\varphi)\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\overrightarrow{a_\varphi} = (2r\dot{\theta}\dot{\varphi} cos + 2\dot{r}\dot{\varphi} sin\theta + r\ddot{\varphi} sin\theta)\overrightarrow{u_\varphi}$$

الحركة المنحنية والاحداثيات الذاتية



لتمثيل احداثيات نقطة M تتحرك على مسار منحني كيفي نعتمد معلما متعامد مرتبط بالنقطة M حيث يكون أحد محاوره موازلشعاع السرعة وموجها وفق اتجاه الموجب للحركة وهو المحور المماس للمسار ونسمي شعاع وحدته والآخر عمودي عليه ويتجه إلى داخل انحناء المسار وشعاع وحدته $\overrightarrow{U_N}$.

الفاصلة المنحنية :

تسمح الفاصلة المنحنية بتحديد موضع المتحرك على هذا المسار وللقيام بذلك نقوم بالخطوات التالية:

- نختار جهة الحركة بالاتجاه الموجب للمسار
- نختار نقطة مرجع M_0 كمبدأ على المسار المنحني.
- تعرف الاحداثية المنحنية S على أنها طول القوس من المسار بين النقطتين M_0 و M

$$S = S(t) = \widehat{M_0M}$$

السرعة :

وبالتالي فإن السرعة تعرف بالشكل الموالي :

السرعة المتوسطة:

$$V(t) = \frac{S(t') - S(t)}{t' - t} = \frac{\widehat{M'M}}{\Delta t} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

السرعة اللحظية:

طويلتها: $V = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} = \dot{S}$

الشعاع:

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\frac{dS}{dS} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dS}\right)\left(\frac{dS}{dt}\right)$$

حيث: $V = \frac{dS}{dt}$ وهي شدة السرعة اللحظية

$\overrightarrow{U_T} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ شعاع الوحدة المماسي في اتجاه الحركة ومنه:

$$\vec{V} = \|\vec{V}\|\overrightarrow{U_T} = \frac{dS}{dt}\overrightarrow{U_T}$$

شعاع التسارع اللحظي:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\|\vec{V}\|\overrightarrow{U_T}\right) = \frac{d\|\vec{V}\|}{dt}\overrightarrow{U_T} + \|\vec{V}\|\frac{d\overrightarrow{U_T}}{dt}$$

$$\frac{d\overrightarrow{U_T}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{U_T}}{dt} \times \frac{d\theta}{d\theta} = \frac{d\overrightarrow{U_T}}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\overrightarrow{U_N}$$

$\dot{\theta} = w = \frac{V}{R}$ وهي السرعة الزاوية

$\overrightarrow{U_N} = \frac{d\overrightarrow{U_T}}{d\theta}$ وهو الشعاع الناظمي ويتجه نحو مركز تقعر المسار.

ومنه: $\vec{a} = \frac{d\|\vec{V}\|}{dt}\overrightarrow{U_T} + \frac{V^2}{R}\overrightarrow{U_N} = \overrightarrow{a_T} + \overrightarrow{a_N}$

حيث:

$a_T = \frac{d\|\vec{V}\|}{dt}$ التسارع المماسي وهو مشتق طويلة السرعة بالنسبة للزمن

$a_N = \frac{V^2}{R}$ التسارع الناظمي وهو مربع السعة مقسوم على نصف قطر المسار.و الذي نصف قطره R

إذن طويلة التسارع تعطى بدلالة المركبتين المماسية والناظمية كما يلي :

$$a = \|\vec{a}\| = \sqrt{{a_T}^2 + {a_N}^2}$$

عبارة نصف قطر المسار: لدين

$$a_N = \frac{V^2}{R} \Rightarrow R = \frac{V^2}{a_N}$$

من جهة أخرى:

$$a = \sqrt{{a_T}^2 + {a_N}^2} \Rightarrow a^2 = {a_T}^2 + {a_N}^2 \Rightarrow a_N = \sqrt{a^2 - {a_T}^2}$$

ومنه :

$$R = \frac{V^2}{a_N} = \frac{V^2}{\sqrt{a^2 - {a_T}^2}}$$

حالة خاصة: في حالة الحركة الدائرية المنتظمة تكون طويلة السرعة $\|\vec{V}\|$ ثابتة أي أن المركبة المماسية للتسارع والمساوية لمشتق طويلة السرعة تنعدم وبالتالي يكون التسارع مركزيا.

$$a_T = \frac{d\|\vec{V}\|}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{a} = \overrightarrow{a_N}$$

دراسة بعض الحركات

مفاهيم

المعادلات الزمنية للحركة: هي الدوال $x(t), y(t), z(t)$ أو الدوال $\rho(t), \theta(t), \varphi(t)$

مثال: في الاحداثيات الكارتيزية:

$$x(t) = V_0 t \ , \qquad y(t) = \frac{1}{2}at^2 \ , z(t) = 0$$

في الاحداثيات الاسطوانية :

$$\rho(t) = R \, , \theta(t) = wt \, , z(t) = 0$$

معادلة المسار: هي معادلة خالية من الزمن تربط ما بين الاحداثيات ونتحصل عليها إما بحذف الزمن من أحد المعادلات الزمنية للحركة ونعوض فب الباقي أو بإيجاد علاقة بين الاحداثيات خاصة في حالة العبارات المثلثية.

مثال: لتكن المعادلتين التاليتين:

$x(t) = V_0 t$ ....(1)

$y(t) = \frac{1}{2}at^2$ ....(2)

$(1) \Rightarrow t = \frac{x}{V_0}$

ومنه

$$(2) \Rightarrow y = \frac{1}{2}a\left(\frac{x}{V_0}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{{V_0}^2}\right)x^2$$

المعادلات التفاضلية: هي كل معادلة تربط دالة بمشتقاتها مثلا: الدالة $x(t)$ بالمشتقات $\dot{x}$ أو $\ddot{x}$

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

الحركة المستقيمة

الحركة المستقيمة المنتظمة:

نقول إن الحركة مستقيمة منتظمة إذا كان المسار مستقيما وشعاع السرعة ثابت وبالتالي فإن التسارع معدوم.

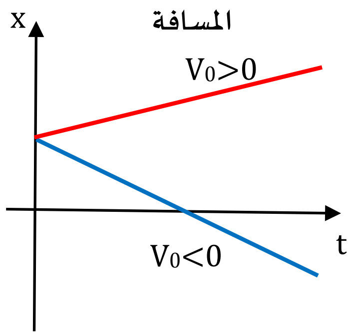
الشروط الابتدائية: $t = 0 \ \Rightarrow x = x_0 \, ; V = V_0$

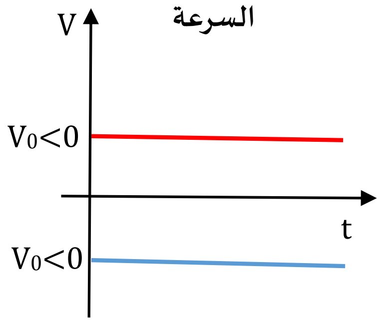
$$V = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = V_0 \Rightarrow dx = V_0 dt$$

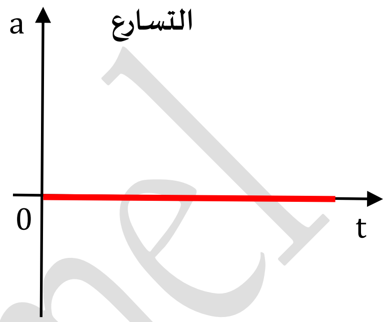
$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} V_0 dt \Rightarrow (x - x_0) = V_0(t - 0)$$

$$x = V_0 t + x_0$$

مخططات الحركة







الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام

نقول إن الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام إذا كان المسار مستقيما والتسارع ثابت. الشروط الابتدائية:

$$t = 0\,; x = x_0\,; V = V_0$$

$$a = \frac{dV}{dt} \Rightarrow dV = adt \Rightarrow \int_{V_0}^{V} dV = \int_{t=0}^{t} adt = a\int_{t=0}^{t} dt$$

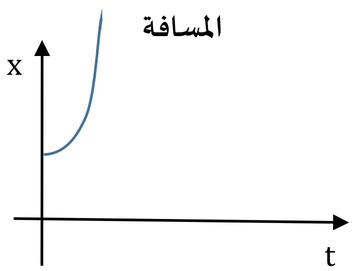
$$V|_{V_0}^{V} = at|_0^t \Rightarrow V - V_0 = a(t-0) = at \Rightarrow V(t) = at + V_0$$

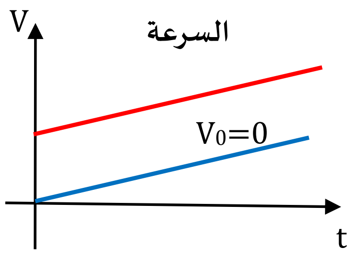
$$V = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = Vdt = (at + V_0)dt$$

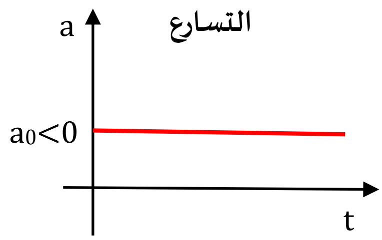
$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t=0}^{t} (at + V_0)dt \Leftrightarrow x|_{x_0}^{x} = (\frac{1}{2}at^2 + V_0 t)|_0^t$$

$$x - x_0 = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + x_0$$

مخططات الحركة







الحركة الدائرية: المسار في هذه الحركة يكون دائري الشكل نصف قطره *R* (*R=Cst*) ومركزه *O*. جملة الاحداثيات المختارة لدراسة خصائص هذه الحركة تكون إما القطبية أو الذاتية(المنحنية).

في الجملة القطبية:

- **شعاع الموضع:**

$$\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{u_\rho}$$

- **شعاع السرعة:**

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{R}\overrightarrow{u_\rho} + R\dot{\overrightarrow{u_\rho}}$$

بما ان نصف القطر في هذه الحالة ثابت فإن شعاع السرعة يصبح بالعبارة التالية:

$$\vec{V} = R\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

- **شعاع التسارع :**

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \dot{R}\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + R\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + R\dot{\varphi}\dot{\overrightarrow{u_\theta}}$$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_\rho} + R\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

في الاحداثيات المنحنية: تعطى الفاصلة المنحنية بالعبارة الموالية: $S(t) = R\theta(t)$

شعاع السرعة: طويلته هي مشتق الفاصلة المنحنية بالنسبة للزمن وهو مماسي للمسار ونكتب:

$$\vec{V} = V\overrightarrow{U_T} / V = \frac{dS}{dt} = R\dot{\theta}$$

ومنه: $\vec{V} = R\dot{\theta}\overrightarrow{U_T}$

شعاع التسارع: هو مشتق السرعة الأول أو المشتق الثاني للفاصلة المنحنية

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R\dot{\theta}\overrightarrow{U_T}\right) = \dot{R}\dot{\theta}\overrightarrow{U_T} + R\ddot{\theta}\overrightarrow{U_T} + R\dot{\theta}\dot{\overrightarrow{U_T}}$$

لدينا: $R = Cst \Rightarrow \dot{R} = 0$

$$\dot{\overrightarrow{U_T}} = \dot{\theta}\overrightarrow{U_N}$$

ومنه تصبح عبارة التسارع بالشكل الموالي :

$$\vec{a} = R\ddot{\theta}\overrightarrow{U_T} + R\dot{\theta}^2\overrightarrow{U_N} = a_T\overrightarrow{U_T} + a_N\overrightarrow{U_N}$$

الحركة الدائرية المنتظمة: هي حركة السرعة الزاوية فيها ثابتة $\left(\dot{\theta} = Cst\right)$

$$V = \frac{dS}{dt} \Rightarrow dS = Vdt \Rightarrow \int_{S_0}^{S} dS = \int_{0}^{t} Vdt$$

$$\Rightarrow S(t) - S_0 = Vt \Rightarrow S(t) = Vt + S_0$$

بما أن : $S = R\theta$ فإن:

$$S(t) = Vt + S_0 \Leftrightarrow$$

بما أن السرعة الزاوية $\omega = \frac{V}{R}$ فإن عبارة الفاصلة الزاوية تبج بالشكل:

$$\theta = \frac{V}{R}t + = \omega t + \theta_0$$

الحركة الدائرية المتغيرة بانتظام: هي حركة التسارع الزاوي فيها ثابت $\left(\ddot{\theta} = Cst\right)$

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} \Rightarrow d\dot{\theta} = \ddot{\theta}dt \Rightarrow \dot{\theta} = \ddot{\theta}t + C$$

حيث Cثابت التكامل الغير معروف الحدود ويحسب من الشروط الابتدائية

$$t = 0 \;, \quad \dot{\theta} = \dot{\theta}_0 \quad , \ddot{\theta}(0) = 0$$

$$\dot{\theta}_0 = \ddot{\theta}(0) + C \Rightarrow C = \dot{\theta}_0 \Rightarrow \dot{\theta} = \ddot{\theta}t + \dot{\theta}_0$$

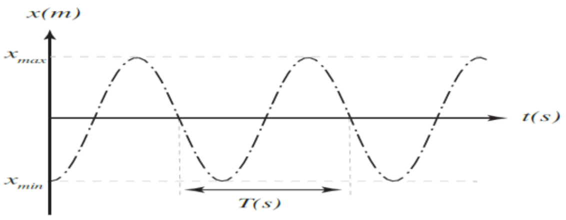
لدينا من جهة أخرى:

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \dot{\theta}dt \Rightarrow d\theta = (\ddot{\theta}t + \dot{\theta_0})dt$$

$$\Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t=0}^{t} (\ddot{\theta}t + \dot{\theta}_0)dt \;\Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 + \dot{\theta}_0 t + \theta_0$$

الحركة المستقيمة الجيبية : تعطى الفاصلة بالشكل:

$$x(t) = x_{max}\cos(\omega t + \varphi)$$



حيث : x(t) هي الفاصلة أو المطال الخطي

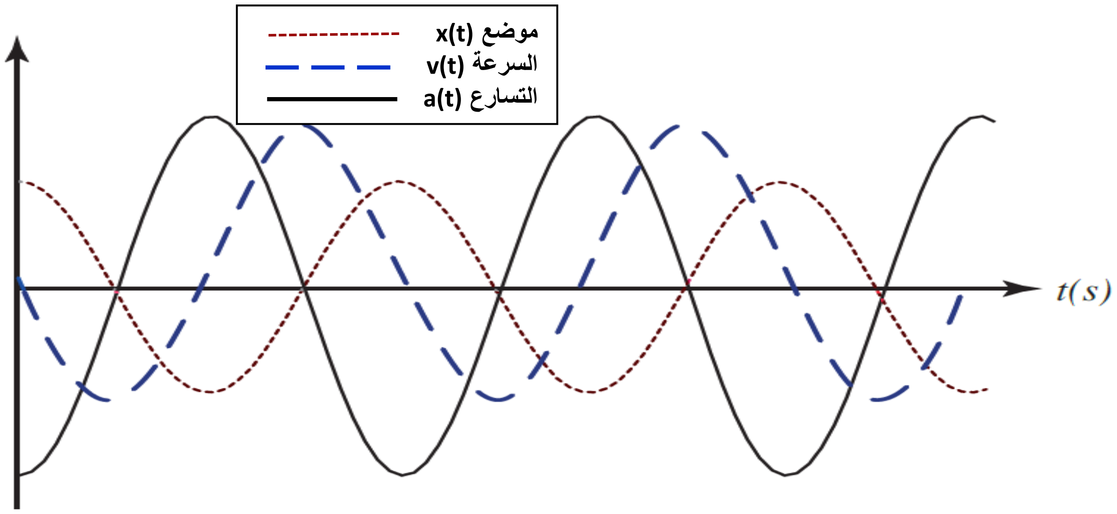
x_{max} هو سعة الحركة أو المطال الاعظمي

ω نبض الحركة , φ الطور الابتدائي و (ωt+φ) الطور اللحظي

السرعة : $V=\dot{x}=\frac{dx}{dt}=-\omega x_{max}\sin(\omega t+\varphi)$

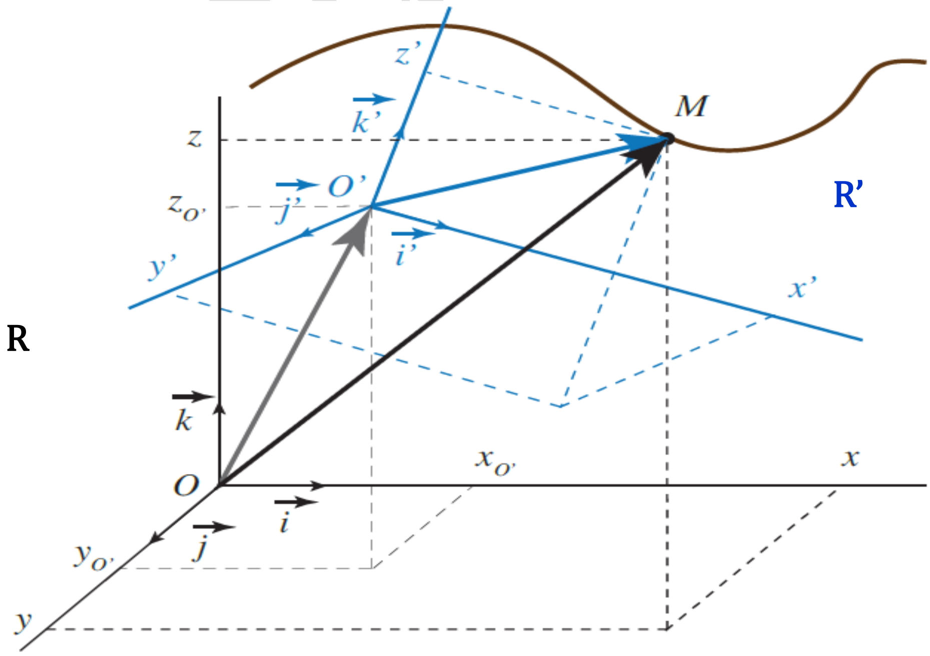
التسارع : $a=\ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^{2x_{max}}\cos(\omega t+\varphi)=-\omega^2x(t)$

مخططات الحركة من اجل صفحة ابتدائية $\varphi=\frac{\pi}{2}$



الحركة لنسبية

في الحركة النسبية تتحرك نقطة مادية M في معلمين احدهما ثابت ونرمزله ب R ويسمى المعلم المطلق والثاني متحرك بالنسبة له ونرمزله ب R' ويسمى المعلم النسبي



حركة M في المعلم R هي حركة مطلقة وحركتها في المعلم R' هي حركة نسبية أما حركة R' بالنسبة ل R فهي مكتسبة

مميزات الحركة

الموضع:

موضع M في $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$: $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

موضع M في $R'(O',\vec{\imath'},\vec{\jmath'},\vec{k'})$: $\overrightarrow{O'M} = x'\vec{\imath'} + y'\vec{\jmath'} + z'\vec{k'}$

موضع O' في $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$: $\overrightarrow{OO'} = x_{O'}\vec{\imath} + y_{O'}\vec{\jmath} + z_{O'}\vec{k}$

باستخدام علاقة شال وفق الشكل السابق يمكن كتابة شعاع موضع النقطة M في R بدلالة موضعها في R' وموضع المبدأ O' كما يلي :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \Rightarrow x_{O'}\vec{\imath} + y_{O'}\vec{\jmath} + z_{O'}\vec{k} + x'\vec{\imath'} + y'\vec{\jmath'} + z'\vec{k'} \text{..........(*)}$$

قانون تراكب السرعات:

السرعة المطلقة $\boldsymbol{\overrightarrow{V_a}}$ وهي سرعة M في $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$

$$\overrightarrow{V_{M/R}} = \overrightarrow{V_a} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}$$

السرعة النسبية $\boldsymbol{\overrightarrow{V_r}}$ وهي سرعة M في $R'(O',\vec{\imath'},\vec{\jmath'},\vec{k'})$:

$$\overrightarrow{V_{M/R'}} = \overrightarrow{V_r} = \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{R'} = \dot{x'}\vec{\imath'} + \dot{y'}\vec{\jmath'} + \dot{z'}\vec{k'}$$

سرعة O' في $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$:

$$\overrightarrow{V_{O'/R}} = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R = \dot{x}_{O'}\vec{\imath} + \dot{y}_{O'}\vec{\jmath} + \dot{z}_{O'}\vec{k}$$

بهدف إيجاد علاقة بين السرعة المطلقة والنسبية نشتق العبارة (*) بالنسبة للزمن فنجد :

$$\left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R + \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_R$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \dot{x}_{O'}\vec{\imath} + \dot{y}_{O'}\vec{\jmath} + \dot{z}_{O'}\vec{k} + \dot{x'}\vec{\imath'} + \dot{y'}\vec{\jmath'} + \dot{z'}\vec{k'} + x'\left(\dot{\vec{\imath'}}\right) + y'\left(\dot{\vec{\jmath'}}\right) + z'\left(\dot{\vec{k'}}\right) \text{....(**)}$$

$$\overrightarrow{V_{M/R}} = \overrightarrow{V_{O'/R}} + \overrightarrow{V_{M/R'}} + x'\left(\dot{\vec{\imath'}}\right) + y'\left(\dot{\vec{\jmath'}}\right) + z'\left(\dot{\vec{k'}}\right)$$

بما أن شدة اشعة الوحدة في المعلم المتحرك لا تتغير بدلالة الزمن فان مشتقاتها لا تساوي الصفر الا في الحالة التي تغير فيها هذه الاشعة من اتجاهها (حالة الدوران) ومنه وبفرض ان السرعة الزاوية $\vec{\omega}$ فان المشتقات تأخذ الشكل التالي:

$$\frac{d\vec{\imath'}}{dt}=, \quad \frac{d\vec{\jmath'}}{dt}=\vec{\omega}\wedge\vec{\jmath'} \quad , \quad \frac{d\vec{k'}}{dt}=\vec{\omega}\wedge\vec{k'}$$

نسمي سرعة الجر $\overrightarrow{Ve}$ أو السرعة المكتسبة (والتي تمثل سرعة المعلم المتحرك بالنسبة للمعلم الثابت) المقدار التالي:

$$\overrightarrow{Ve}=\dot{x_{O'}}\vec{\imath}+\dot{y_{O'}}\vec{\jmath}+\dot{z_{O'}}\vec{k}+\vec{\omega}\wedge x'\vec{\imath'}\ +\ \vec{\omega}\wedge x'\vec{\jmath'}\ +\vec{\omega}\wedge x'\vec{k'}$$

$$\overrightarrow{Ve}=\overrightarrow{V_{O'/R}}+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}$$

ومنه تصبح عبارة السرعة كما يلي

$$\vec{V_a}=\overrightarrow{V_{O'/R}}+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}+\vec{V_r}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(**)$$

ومنه يمكن كتابة السرعة المطلقة كما يلي

$$\vec{V_a}=\vec{V_e}+\vec{V_r}$$

قانون تراكب التسارعات

نبحث الان عن العلاقة بين تسارع نقطة مادية في حالة حركة في المعلم المطلق (ثابت) وذلك بمعرفة خصائص حركتها في المعلم النسبي باستخدام العلاقة (**) يكمن التعبير عن التسارع المطلق بالعبارة التالية:

$$\vec{\gamma_a}=\frac{d\vec{V_a}}{dt}=\left.\frac{d\vec{V_e}}{dt}\right|_R+\left.\frac{d\vec{V_r}}{dt}\right|_R$$

$$\vec{\gamma_a}=\underbrace{\left.\frac{d\overrightarrow{V_{O'/R}}}{dt}\right|_R}_{\vec{\gamma}_{O'/R}}+\left.\frac{d\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)}{dt}\right|_R+\left.\frac{d\vec{V_r}}{dt}\right|_R$$

$$\left.\frac{d\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}\right)}{dt}\right|_R=\underbrace{\left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_R}_{(\dot{\vec{\omega}})}\wedge\overrightarrow{O'M}+\vec{\omega}\wedge\underbrace{\left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_R}_{\vec{V_r}+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}}$$

نحسب الان مشتق السرعة النسبية في المعلم المطلق

$$\left.\frac{d\vec{V_r}}{dt}\right|_R=\underbrace{\ddot{x'}\vec{\imath'}+\ddot{y'}\vec{\jmath'}+\ddot{z'}\vec{k'}}_{\vec{\gamma}_r}+\underbrace{\dot{x'}\left(\dot{\vec{\imath'}}\right)+\dot{y'}\left(\dot{\vec{\jmath'}}\right)+\dot{z'}\left(\dot{\vec{k'}}\right)}_{\vec{\omega}\wedge\vec{V_r}}$$

ومنه تصبح عبارة التسارع المطلق كما يلي:

$$\vec{\gamma}_a = \underbrace{\vec{\gamma}_{O'/R} + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)}_{\vec{\gamma_e}} + \vec{\gamma}_r + \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{V_r}}_{\vec{\gamma}_c}$$

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_c$$

حيث:

$\vec{\gamma}_a$ التسارع المطلق

$\vec{\gamma}_e$ تسارع الجر :
$$\vec{\gamma}_e = \vec{\gamma}_{O'/R} + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$$

$\vec{\gamma}_r$ التسارع النسبي:
$$\vec{\gamma}_r = \left.\frac{d\vec{V_r}}{dt}\right|_{R'}$$

$\vec{\gamma}_c$ تسارع كوريوليس:
$$\vec{\gamma}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{V_r}$$