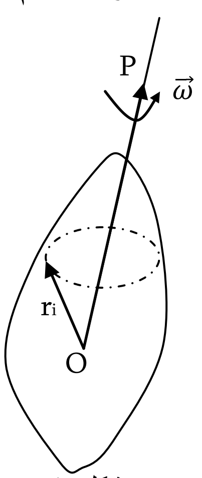
ديناميكا الأجسام الجاسئ في الفراغ

Dynamique des corps solides dans l'espace

كما تم البرهنة عليه ، الحركة الفراغية للجسم الجاسئ مركبة من : حركة انتقالية مع نقطة O من هذا الجسم (قد تكون مركز الكتلة)، وحركة دورا نية حول محور مار بهذه النقطة. إذا حركة الجسم في الفراغ تمر حتما عبر دراسة حركة الجسم ذي النقطة الثابتة.

حركة جسم جاسئ ذي النقطة الثابتة

لنعرف أن الجسم جاسئ S يتحرك بحيث تبقي النقطة O ثابتة دائما.في لحظة معطاة يدور الجسم بسرعة زاوية $\vec{\omega}$ جول المحور اللحظي للدوران P المار بالنقطة الثابتة.



شكل -1-

في لحظه معطاة يدور الجسم بسرعة زاوية ω حول المحور اللحظي للدوران P المار بالنقطة O(شكل-1-).

النقطة A يتحدد موضعها بمتجه الموضع r_i بالنسبة إلي النقطة الثابتة O و سرعتها تعطي بالعبارة:

$$\vec{V}_i = \dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i \qquad -1-$$

إذا اعتبرنا أن المميزة الديناميكية الأساسية للحركة الدورانية للجسم هو العزم الكينتيكي للجسم، هذا الأخير يعين بالعبارة التالية.

$$\vec{k} = \sum m_i \left(\vec{r}_i \wedge \vec{V}_i\right) = \sum m_i * [\vec{r}_i * (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i)] \qquad -2-$$

حيث : m_i كتلة النقطة i من الجسم

$\sum$ إشارة الجمع لكل نقاط الجسم

عزوم القصور و جداء القصور :

moments d'inertie , produits d'inerties

لنختار معلم مكون من مجموعة محاور ثابتة ZYXO .

تأخذ الكميات $\vec{k}$و$\vec{w}$،$\vec{r}_i$ بالنسبة لهذا العلم الشكل التالي :

$$\left.\begin{aligned}\vec{k} &= k_x\vec{i} + k_y\vec{j} + k_z\vec{k}\\ \vec{\omega} &= \omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k}\\ r_i &= x_i\vec{i} + y_i\vec{j} + z_i\vec{k}\end{aligned}\right\} \quad \text{-3-}$$

استناد علي العبارات في -3- و بعد النشر و الاختزال و الترتيب نحصل علي :

$$\left.\begin{aligned}k_x &= I_{xx}\,\omega_x + I_{xy}\,\omega_y + I_{xz}\,\omega_z\\ K_y &= I_{yx}\,\omega_x + I_{yy}\,\omega_y + I_{yz}\,\omega_z\\ K_z &= I_{zx}\,\omega_x + I_{zy}\,\omega_y + I_{zz}\,\omega_z\end{aligned}\right\} \quad \text{-4-}$$

و في الأخير نحصل علي العبارات الجديدة بالمعادلات التالية :

$$\left.\begin{aligned}I_{xx} &= \sum m_i\,({y_i}^2 + {z_i}^2)\\ I_{yy} &= \sum m_i\,({X_i}^2 + {z_i}^2)\\ I_{zz} &= \sum m_i\,({x_i}^2 + {y_i}^2)\end{aligned}\right\} \quad \text{-5-}$$

و

$$\left.\begin{aligned}I_{xy} &= -\sum m_i x_i y_i = I_{yx}\\ I_{yz} &= -\sum m_i y_i z_i = I_{zy}\\ I_{zx} &= -\sum m_i z_i x_i = I_{xz}\end{aligned}\right\} \quad \text{-6-}$$

الكميات I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} تسمي عزوم العطالة بالنسبة للمحاور x,y,z علي التوالي.
أما الكميات I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} فتسمى جداء العطالة بالنسبة للمحاور x,y,zعلي التوالي .

<u>ملاحظة :</u>
في حالة توزيع مستمر للكتلة تتحول الإشارة $\sum$ إلي تكامل و تصبح العلاقات السابقة كالأتي:

$$I_{xx} = \int_s (y^2 + z^2)dm,.\,I_{yy} = \int_s (x^2 + z^2)dm, I_{zz} = \int_s (x^2 + y^2)dm \quad \text{-7-}$$

$$I_{xy} = -\int_s xydm,..\,I_{yz} = -\int_s yzdm,\ldots I_{xz} = -\int_s xzdm \quad \text{-8-}$$

الكميات التسعة لعزم العطالة   وجداء العطالة يمكن كتابتها في الشكل منظم يسمي موتر (tenseur).

$$\begin{pmatrix} Ixx & Ixy & Ixz \\ Iyx & Iyy & Iyz \\ Ixz & Izy & Izz \end{pmatrix} \qquad -9-$$

المحاور الأساسية للعطالة:

Axe principaux d'inertie

نسيمي المحاور الأساسية لعطالة الجسم آو مباشرة المحاور الأساسية للجسم ، مجموعة ثلاث محاور متعامدة في ما بينها ، أصلها O ، مثبتة بالجسم و تتحرك معه ، بحيث تحقق شرط انعدام جداء العطالة للجسم بالنسبة لهذا المعلم .

عندها تحقق خاصية مهمة و هي تطابق اتجاه العزم الكينتيكي و السرعة الزاوية عندما يدور الجسم حول محور أساسي أي أن :

$$\vec{k} = I.\vec{\omega} \qquad -10-$$

فباستعمال هذه الخاصية وبالنظر الي العلاقة -4- نكتب :

$$\left.\begin{aligned} I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z &= I\omega_x \\ I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z &= I\omega_y \\ I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z &= I\omega_z \end{aligned}\right\} \quad -11-$$

$$\left.\begin{aligned} (I_{xx} - I)\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z &= 0 \\ I_{yx}\omega_x + (I_{yy} - I)\omega_y + I_{yz}\omega_z &= 0 \\ I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + (I_{zz} - I)\omega_z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad -12-$$

هذه الثلاث معادلات تشكل معادلة من الدرجة الثالثة من I . للحصول علي الحلول الغير صفرية (المغايرة للحل من $\omega_x=0$, $\omega_y=0$ و $\omega_z=0$) ، يجب بالضرورة أن تحقق المحددة الشرط التالي:

$$\begin{vmatrix} (Ixx-I) & Ixy & Ixz \\ Iyx & (Iyy-I) & Iyz \\ Izx & Izy & (Izz-)I \end{vmatrix} = 0 \qquad -13-$$

المعادلة المحصل عليها تقود إلي ثلاثة قيم I_1,I_2,I_3 التي تمثل العزوم الأساسية للعطالة.
بوضع $I_1=I$ في العلاقة 12 نتحصل علي القيم ω_x, ω_y وω_z التي تمثل مركبات ω و بالتالي تتحصل علي اتجاه ω وفي الأخير نجد اتجاه المحور الأساسي الموافق لــ I_1.
بطريقة مماثلة ، تعوض تبعا القيم I_2,I_3 في العلاقة 12 ليتم تعيين الاتجاهين الأساسين الباقين.

عبارة الطاقة الحركية الدورانية للجسم الجاسئ:

Energie cinétique de rotation

تعطي هذه الطاقة بالعبارة التالية:

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}.\vec{K}$$

أي أن

$$T = \frac{1}{2}(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2 + 2I_{xy}\omega_x\omega_y + 2I_{xz}\omega_x\omega_z + 2I_{yz}\omega_y\omega_z \qquad -14-$$

عبارة العزم الكنيتكى و الطاقة الحركية الدورانية بالنسبة للمحاور الأساسية للعطالة

ليكن $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ و K_1,K_2,K_3 مركبات السرعة الزاوية و العزم الكينتيكي للجسم الجاسئ بالنسبة للمحاور الاساسية:
كما تم اقراره في المعادلة 10 بالنسبة للعزم الكينتيكي :

$$K_1 = I_1\omega_1 \,, K_2 = I_2\omega_2, \; K_3 = I_3\omega_3 \qquad -15-$$

بينما يعطي الطاقة الحركية الدورانية للجسم بالنسبة للمحاور الأساسية بالعبارة:

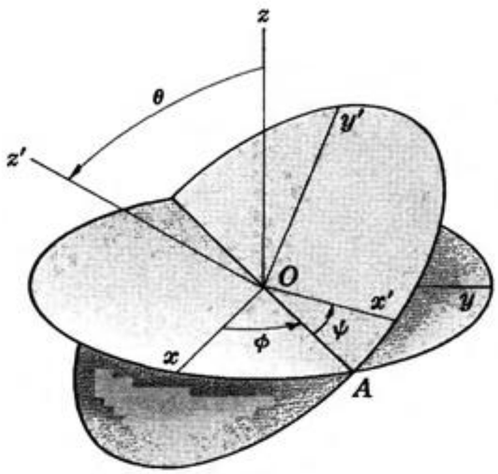
$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}.\vec{K}$$

أي أن

$$T = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) \qquad -16-$$

معادلات اولار للحركة:

Equations D'Euler de mouvement



شكل-2-

لإعطاء حركة جسم جاسئ ذي النقطة ثابتة، يكون من الأنسب استعمال معلما يوافق المحاور الأساسية للجسم.

إذا كان M_1,M_2,M_3 و $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ مركبات محصلة العزوم للتأثيرات الخارجية و السرعة الزاوية علي التوالي، و المعطاة بالنسبة للمحاور الأساسية:

عندئذ تكون معادلات حركة الجسم في الشكل التالي:

$$\left.\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 &= M_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 &= M_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 &= M_3 \end{aligned}\right\} \qquad -17-$$

هذه المعادلات تسمي معادلات أولار :Equation d'Euler

حل هذه المعادلات يتبع الحصول علي $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ أي علي المتجه $\vec{\omega}$ ، ومنه نتحصل علي قانون حركة الجسم الجاسئ ذي النقطة الثابتة.

ملاحظة:

نذكر العلاقة التي تربط العزم الخارجي و العزم الكينتيكي:

كما نذكر أن $\vec{K} = I\vec{\omega}$ و $\vec{M} = \frac{d\vec{K}}{dt}$ و أن $\vec{\omega}$ متجه متغيرا مقدار واتجاها.

زاويا أولار:Angles d'Euler

لتعين حركة جسم جاسئ ذي النقطة الثابتة، نستعين بثلاث إحداثيات زاوية تسمي زاويا أولار.

هذه الزوايا هي ψ,θ,φ .

فمجموعة من المحاور oxyz المرتبطة بالجسم يمكن جلبها لتنطبق علي مجموعة المحاور $o\acute{x}\acute{y}\acute{z}$ عبر إدارات بزوايا ψ,θ,φ علي التوالي .

خط العقد (ligne de nœuds)

نصف المستقيم OA عبارة عن تقاطع المستويان oxyz.و $o\acute{x}\acute{y}\acute{z}$ ، يسمي بخط العقد .هذا الخط يكون دوما عموديا علي المستوي المار بالمحورين oz و$o\acute{z}$.

زاوية الطواف (angle de précession)

الزاوية ψ التي تحدد دوران الجسم حول المحور $o\acute{z}$ ، تسمي زاوية الطواف.

زاوية الترنخ (angle de nutation)

الزاوية θ التي تحدد دوران الجسم حول خط العقد، تسمي زاوية الترنخ

زاوية الدوران الذاتي (angle de rotation propre)

الزاوية φ التي تحدد دوران الجسم حول المحور oz ، تسمي زاوية دوران الذاتي.

السرعة الزاوية وا لطاقة الحركية بدلالة زوايا اويلر:

باستعمال زوايا أولار ψ,θ,φ ، مركبات السرعة الزاوية $\omega_1, \omega_2; \omega_3$ بالنسبة للمحاور $\acute{x}, \acute{y}, \acute{z}$ تعطي بالعلاقة:

$$\left.\begin{aligned} \omega_{\acute{x}} = \omega_1 = \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\sin\psi \\ \omega_{\acute{y}} = \omega_2 = \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi - \dot{\theta}\sin\psi \\ \omega_{\acute{z}} = \omega_3 = \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{aligned}\right\} \qquad -18-$$

النظرية التقريبية لظواهر الجيروسكوب

الجيروسكوب هو جسم جاسئ الذي يدورا حول محور ،ويمكن أن يتغير اتجاه هذا المحور في الفراغ بمرور الزمن و سندرس فيما يلي الجيروسكوب ذي محور المتماثل الذي ، الذي يدور حول المحور. و في الأجهزة الجيروسكوبية نثبت الجيروسكوب عادة فوق مسند حلقيي الشكل (شكل-1-).بحيث يكون مركز ثقله ثابتا مهما كان دورانه.

في الواقع تكون السرعة الزاوية ω_1 كبيرة جدا للدوران الذاتي حول محور تماثلها وعندها يمكن إهمال حركة محور الجيروسكوب في التقريب الأول.

انطلاقا مما سبق نستطيع تكوين النظرية التقريبية للظواهر الجيروسكوبية و الفرضية الأساسية في النظرية التقريبية هو أن العزم الكينتيكي للجيروسكوب حول نقطة ثابتة K_0، يكون علي امتداد محور الجيروسكوب، وفي نفس اتجاه ω_1 بحيث أن:

$$k_0 = k_z = I_z\omega_1 \qquad -19-$$

وكلما ازدادت سرعة دوران ω الجيروسكوب زادت صحة هذه الفرضية للظواهرالجيروسكوبية.

زمن هنا نعين الخواص الأساسية للجيرسكوب

الجيروسكوب الحر

هو الجيروسكوب المثبت بحيث يكون مركز ثقله ثابتا وبإمكان أن يقوم محوره بأية دورة حول المحور مركز0.بإهمال الاحتكاك في المحاور نحصل علي :

$$\vec{M} = \sum \vec{m}_0 \left(\vec{F}_k^e\right) = 0 \qquad -20-$$

$$\vec{M}^e = \frac{dK}{dt}، \quad K_0 = \text{ثابت} \qquad -21-$$

M^e : عزم القوي الخارجية بالنسبة '0'

أي أن مقدار و اتجاه العزم الكينتيكي ثابت.

بما أن K_0 يمتد علي محور الدوران الذاتي نحصل علي محور الجيروسكوب الحر يحتفظ باتجاه ثابت في الفراغ بالنسبة لمجموعة قصورية.

تأثير قوة علي محور الجيروسكوب

نفرض آن القوة F تبدأ في التأثير علي محور جيروسكوب سريع الدوران (شكل- 2-) وتبعا لنظرية العزوم يكون لدينا:

$$\vec{M}^e = Fh، \qquad -22-$$

$$\vec{M}^e = \frac{d\vec{K}}{dt}، \quad \vec{K} = \overrightarrow{BO} \qquad -23-$$

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d(\overrightarrow{OB})}{dt} \qquad -24-$$

حيث B نقطة علي تنطبق علي نهاية المتجه $\vec{K}_0$.ومن هنا وباعتبار أن مشتق المتجه $\overrightarrow{OB}$ بالنسبة للزمن يساوي السرعة $\vec{V}_B$

$$\vec{V}_B = \vec{M}_0 \qquad -25-$$

المعادلة 25 تبين أن سرعة نهاية العزم الكينتيكي للجسم حول المركز تساوي في المقدار الاتجاه العزم الرئيسي للقوي الخارجية حول نفس المركز.

وعندها فان النقطة B ومعها محور الجيروسكوب تتحرك في اتجاه المتجه $\vec{M}_0$ فنحصل علي النتيجة التالية : إذا أثرت قوة علي محور جيروسكوب سريع الدوران فان المحور يبدأ في الانحراف ليس في اتجاه تأثير القوة وإنما في اتجاه $\vec{M}_0$ ، وهو متجه عزم هذه القوة حول النقطة الثابتة للجيرسكوب ان في الاتجاه العمودي للقوة

$$\overrightarrow{M}^{e} = \vec{F} \wedge \vec{r} \qquad -26-$$

الاستباق المنتظم للجيرسكوب الثقيل

لندرس جيروسكوب لا تنطبق نقطته الثابتة 0 علي مركز ثقله C (شكل-3-) عندئذ توثر علي محور جيروسكوب طوال الوقت القوة P التي وفقا لما سبق أثباته تعمل علي انحراف محور الجيروسكوب ليس إلي الأسفل ليس في اتجاه زيادة الزاوية α بل في اتجاه $\overrightarrow{m}_0(P)$ الاتجاه العمودي المستوي $(0ZZ_1)$

$$\overrightarrow{V}_B = \overrightarrow{M}_0(P) \qquad -27-$$

نتيجة لذلك يبدأ محور الجيروسكوب في الدوران حول المحور العمودي $0Z_1$ راسما سطحا مخروطيا ،و تسمي حركة الجيروسكوب بالاستباق الجيروسكوبى

ولتعين السرعة الزاوية ω_2 للسباق الجيروسكوبي لدينا :

$$\overrightarrow{V}_B = \overrightarrow{M}_0 = Ph \qquad -28-$$

$$h = OC\sin(\alpha) = Ph \qquad -29-$$

$$OC = a \qquad -30-$$

$$\overrightarrow{M}_0 = Pa\sin(\alpha) \qquad -31-$$

$$V_B = \omega_2 0B\sin(\alpha) \qquad -32-$$

$$V_B = \omega_2 k_0 \sin(\alpha) \qquad -33-$$

$$V_B = I\omega_1\omega_2 \sin(\alpha) \qquad -34-$$

بالتالي ينتج من المعادلة $\overrightarrow{V}_B = \overrightarrow{M}_0$ أن $Pa\sin(\alpha) = I\omega_1\omega_2\sin(\alpha)$ ومنها

$$\omega_2 = \frac{Pa}{I\omega_1} \qquad -35-$$

بما أن مقدار ω_1 كبير جدا ، فان السرقة الزاوية للاستباق الجيروسكوبى تكون صغيرة وبتناقص ω_1 يزداد المقدار ω_2 .

التأثيرالجيروسكوبى

لندرس جيروسكوب سريع الدوران مثبت بواسطة مسند التحميل $A،A$ في حلقة يمكن أن تدوربدوراها بسرعة زاوية حول محور (DD) (شكل-..-) وبما انه يحدث لمحور الجيروسكوب عند ذلك استباق جيروسكوبى فتكون لنقطة B نهاية متجه k_0 سرعته تكون علي الشكل التالي :

$$V_B = I\omega_1\omega_2 \sin(\alpha) \qquad -35-$$

ومن الواضح أن هذا العزم يكون M_0 يتكون من قوتين هنا $Q،Q$ وهما قوتا ضغط مسندي التحميل $A،A$ علي المحور.

وبما أن مركز الكتلة ثابت فتبعا لنظرية حركة مركز الكتلة يكون المجموع الهندسي للقوتين $Q،Q$ مساويا للصفر،وبالتالي فان القوتين تكونان ازدواجا عزمه M_0 ، والذي يجب أن يتجه في نفس اتجاه السرعة V_B.

و عند ذلك يضغط محور الجيروسكوب في نفس الوقت علي مسند التحميل $A،A$ بقوتين $N،N$.

يسمي الازدواج N،N الازدواج الجيروسكوبى،ويسمي عزمه بالعزم الجيروسكوبى .

$$M_{gy} = V_B = I\omega_1\omega_2 \sin(\alpha) \qquad -36-$$

ومن هنا نحصل علي القاعدة التالية:
إذا اكتسب الجيروسكوب سريع الدوران حركة استباقية قسرية ،يؤثر ازدوا ج عزمه M_{gy} علي مسند التحميل المثبت عليها محور الجيروسكوب ، ويعني هذا الازدواج علي جعل محور الدوران الذاتي موازيا لمحور الاستباق بأقصر طريق لكي ينطبق اتجاها المتجهين $\omega_1\omega_2$