Programmation en nombres entiers

1. Introduction

Dans beaucoup de problèmes d'optimisation une solution à valeurs entières est exigée. Par exemple dans le problème de la production, où l'on cherche le nombre optimal de pièces à fabriquer et où ce nombre est, pour des raisons pratiques, souvent entier. L'exemple suivant montre alors que ce nombre optimal entier n'est pas toujours l'entier le plus proche de la solution optimale si celle-ci est fractionnaire.

Exemple 1 :
Maximiser $10x_1 + 11x_2$
Sous la contrainte $10x_1 + 12x_2 \leq 59$
$x_1 , x_2 \geq 0$
à valeurs entières.

La solution optimale x est donnée par $x = (x_1 , x_2) = (5.9, 0)$. En effet, $x_1 \leq 5.9 - 1.2\, x_2$, et on obtient la solution optimale en posant $x_1 = 5.9$, $x_2 = 0$. Mais la solution $x' = (6, 0)$ n'est pas réalisable et la solution $x'' = (5, 0)$ n'est pas optimale parmi les solutions à valeurs entières.

La solution optimale à valeurs entières est donnée par $x = (1, 4)$.
Les méthodes présentées ci-dessous pour trouver la solution optimale à valeurs entières utilisent le simplexe à plusieurs reprises.

2. Méthode par séparation et évaluation (*Branch and Bound*)

Exemple 2 :
Maximiser $z(x_1 , x_2) = x_1 + 4x_2$
sous les contraintes $5x_1 + 8x_2 \leq 40,$
$- 2x_1 + 3x_2 \leq 9,$
$x_1 , x_2 \geq 0$
et à valeurs entières

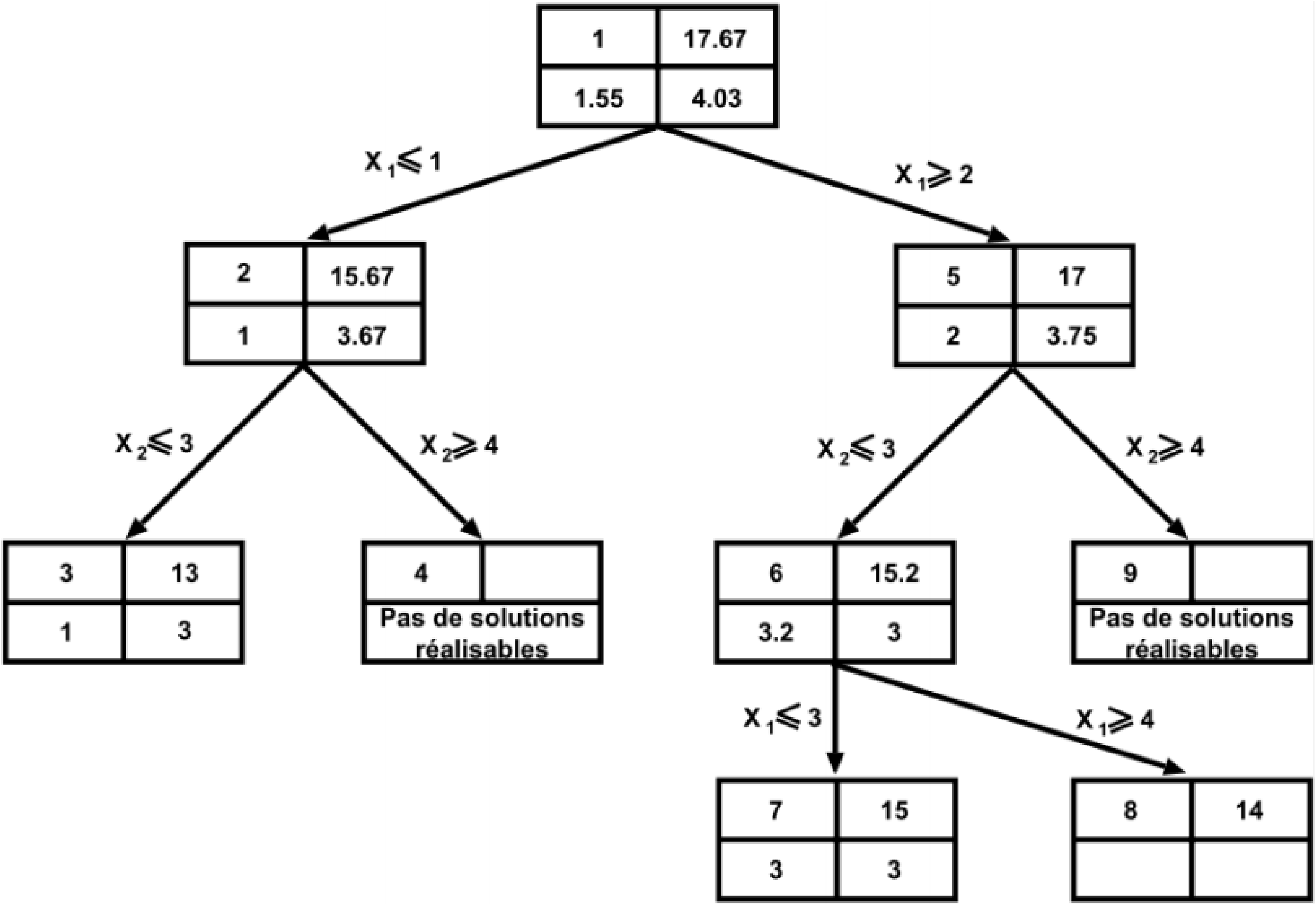

*Figure. Méthode par séparation et évaluation (**Branch and Bound**)*

Etapes :

1) Résoudre (P) à l'aide du simplexe sans tenir compte de la contrainte x_1, x_2 à valeurs entières. Solution optimale : $x = (x_1, x_2) = (1.55, 4.03).z(x) = 17, 67$.
Brancher par rapport à x_1 : $x_1 \leq 1$ ou $x_1 \geq 2$.

2) Ajouter la contrainte $x_1 \leq 1$ à (P) et résoudre ce programme à l'aide du simplexe, sans tenir compte de la contrainte x_1, x_2 à valeurs entières. Solution optimale $x = (1, 3.67),\ z(x) = 15.67$.
Brancher par rapport à x_2 : $x_2 \leq 3$ ou $x_2 \geq 4$.

3) Ajouter à (P) les contraintes $x_1 \leq 1$ et $x_2 \leq 3$. La solution optimale de ce programme est à valeurs entières : $x = (1, 3),\ z(x) = 13$.
Borner à 13 (c'est-à-dire ne pas poursuivre le branchement si on obtient des solutions optimales < 13).

4) Ajouter à (P) les contraintes $x_1 \leq 1$ et $x_2 \geq 4$. Ce programme n'a pas de solutions réalisables.

5) Ajouter à (P) la contrainte $x_1 \geq 2$. La solution optimale $x = (2, 3.75),\ z(x) = 17$.
Brancher par rapport à x_2 : $x_2 \leq 3$ ou $x_2 \geq 4$.

6) Ajouter à (P) les contraintes $x_1 \geq 2$ et $x_2 \leq 3$. Solution optimale $x = (3.2, 3),\ z(x) = 15.2$.
Brancher par rapport à x_1 : $x_1 \leq 3$ ou $x_1 \geq 4$.

7) Ajouter à (P) les contraintes $2 \leq x_1 \leq 3$ et $x_2 \leq 3$. Solution optimale $x = (3, 3),\ z(x) = 15$.
Borner à 15.

8) Ajouter à (P) les contraintes $x_1 \geq 4$ et $x_2 \leq 3$. Cas sans intérêt parce que $z(x) = 14 < 15$ pour la solution optimale x.

9) Ajouter à (P) les contraintes $x_1 \geq 2$ et $x_2 \geq 4$. Pas de solutions réalisables.

La solution optimale à valeurs entières est donc celle trouvée en 7) : $x_1 = x_2 = 3,\ z(x) = 15$.

Remarque : La méthode par séparation et évaluation n'intervient pas seulement en programmation linéaire, mais dans tous les problèmes d'optimisation, où on travaille avec des arbres de décision.