Equations générales de la dynamique des fluides réels

- **Cas des fluides réels (existance des Forces de viscosité) :**

Selon la direction z soit un petit parallélépipède de fluide réel qui se déplace

Les forces agissant sur un element de volume dxdydz sont :

- Les forces de volume (force de pesenteur)
- Les forces de surface (force de pression)
- Les forces d'inertie (accélération)
- Les forces de viscosité (force de frottement)

$$\begin{cases} \rho X - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu\nabla^2 v_x = \rho\frac{dv_x}{dt} \\ \rho Y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu\nabla^2 v_y = \rho\frac{dv_y}{dt} \\ \rho Z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu\nabla^2 v_z = \rho\frac{dv_z}{dt} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \rho\vec{F} - \overrightarrow{gradP} + \mu\nabla^2\vec{v} = \rho\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\underbrace{\vec{F}}_{\substack{F \\ \text{de volume}}} - \underbrace{\frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad\,P}}_{\substack{F \\ \text{de pression}}} + \underbrace{\nu\ \nabla^2\vec{v}}_{\substack{F \\ \text{de viscosité}}} = \underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{\substack{F \\ \text{d'inertie}}}$$

Ceci est l'équation de la dynamique des fluides réels incompressibles (Equation de Navier Stokes)

En introduisant les composantes de l'accélération pour un écoulement 3D :

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \upsilon\nabla^2 v_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}$$

$$Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \upsilon\nabla^2 v_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}$$

$$Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + \upsilon\nabla^2 v_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} = f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2})$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} = f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2})$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} = fz - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2})$$

Ou fx = X , fy = Y et fz = Z sont les composantes de la force $\vec{F}$ (fx, fy,fz)

En hydrodynamique comme en hydrostatique on ne considère que le champ gravitationnel terrestre :

$$F = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} - \frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}\, P + \nu\ \nabla^2 \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\,\overrightarrow{grad}\,\vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Remarques :

Pour des fluides parfaits (ν = 0) => l'équation devient équation d'Euler

Pour des fluides parfaits ou réels qui ne sont pas en mouvement ($\vec{V}$=0) => équation d'hydrostatique

- **Equation de Bernoulli appliquée entre 2 points dans un fluide réel :**

La ou il y a un ecoulement y a toujours des forces de frottement qui genent le mouvement « dissipation d'énérgie sous forme de perte d'énérgie (transformation d'une partie de l'énérgie totale en energie thermique) => ΔH_{1-2} Perte de charge totale entre les 2 points

$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + \ \Delta H_{1-2}$ Equation de Bernoulli pour un écoulement réel permanent visqueux.

Pour un écoulement d'un fluide réel et sous l'effet des forces de frottement (viscosité) la repartition des vitesses le long d'une section droite d'écoulement est non uniforme par consequant $\frac{v^2}{2g}$ ne represente pas l'énérgie cinétique réelle et pour ne pas tomber dans une contradiction on utilise le coeff α qui le facteur de correction de l'énérgie cinétique (coefficient de coriolis) on aura l'énérgie cinétique réelle de fluide a cette section égal a $\alpha \frac{v^2}{2g}$

Les valeurs numériques du coeff de correction de l'énérgie cinétique α sont comprises entre 1 et 2

- Pour un écoulement unidimensionnel α = 1
- Pour un écoulement turbulent α = 1,1
- Pour un écoulement laminaire α = 2

Dans la pratique les écoulements sont souvent turbulents une approximation de α = 1 se justifie. L'équation devient : $z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \ \Delta H_{1-2}$

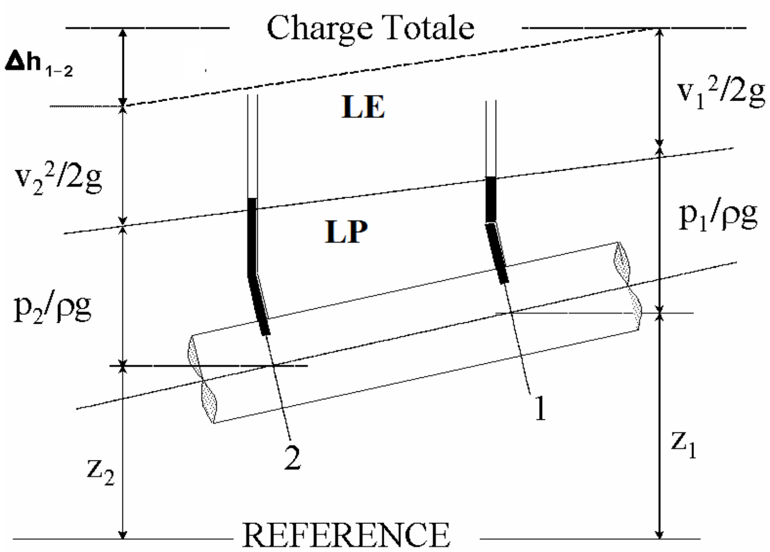
-Les équations de Navier-Stokes pour un fluide réel incompressible en mouvement permanent different aux équations d'Euler pour un fluide parfait incompressible en mouvement permanent par les forces de viscosité (force de frottement).

- L'hypothèse de (ν = 0) montre que l'énergie totale = cte le long de l'écoulement, mais tout les fluides dans la nature presentent des viscosités lorsqu'il y a écoulement, donc des forces de frottement qui interviennent qui vont gener et freiner cette écoulement.

- Par conséquant il y a « dissipation d'énérgie » ou perte d'energie ; une partie de l'énérgie totale qui va se transformer en énergie thermique.

- L'énérgie perdue par unité de poids ΔH est appelée « perte de charge ».

Ainsi l'équation de Bernoulli peut etre representé graphiquement pour les fluides réels comme suit :



Representation graphique de l'équation de Bernoulli

Avec : L.P Ligne piezometrique L.E Ligne d'énergie

-Le gradiant hydraulique c'est la pente de la ligne piezométrique

$$I_h = \frac{1}{l}\left[\left(z_1 + \frac{P_1}{\gamma}\right) - \left(z_2 + \frac{P_2}{\gamma}\right)\right]$$

-Le gradiant d'énérgie c'est la pente de la ligne d'énérgie

$$I_e = \frac{1}{l}\left[\left(z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g}\right) - \left(z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}\right)\right]$$

Pour un écoulement uniforme (v1 =v2) on aura $I_h = I_e$

Facteur de correction de l'énérgie cinétique : l'analyse des problèmes d'écoulement des fluides s'effectue dans la plupart des cas en une seule dimension.