الفصل الثالث

المعادلات التفاضلية

1.3 أساسيات في المعادلات التفاضلية

يتضمن هذا الفصل مجموعة من التعريفات والمفاهيم في المعادلات التفاضلية ، ومن أهم تلك المفاهيم :

تعريف 1.1.3 : المعادله التفاضلية : هي علاقة تساوي بين متغير مستقل وليكن x ومتغير تابع وليكن $y(x)$ ، مع واحد أوأكثر من المشتقات التفاضلية ...

تعريف 2.1.3 : رتبة المعادلة التفاضلية : هي رتبة أعلى مشتقة في المعادلة .

تعريف 3.1.3 : درجة المعادلة التفاضلية: هي درجة أو قوة أو أس أعلى معامل تفاضلي في المعادلة بشرط عدم إحتواء المعادلة على معاملات تحوي قوى كسرية .
أو يقال هي أكبر أس لأعلى رتبة أشتقاق في المعادلة .

1.1.3. حل المعادلات التفاضلية

تعريف 4.1.3 : نسمي الداله $y = y(x)$ حلا للمعادلة التفاضلية $F(x, y, y', y'', . . . , y^n)$ إذا كانت :
1ـ قابلة للأشتقاق n مرة .
2ـ تحقق المعادلة التفاضلية أي :

$$F(x, y(x), y'(x), . . . , y^{(n)}(x)) = 0$$

2.1.3. الحل العام والحل الخاص للمعادلات التفاضلية

تعريف 5.1.3 : الحل العام لمعادلة تفاضلية من الرتبة n هو حل يحتوي على n من الثوابت الأختيارية وبالطبع يحقق المعادلة التفاضلية .

تعريف 6.1.3 : أي معادلة تفاضلية من الرتبة n نجد أن حلها العام يعتمد دائما على n من الثوابت الأختيارية ويكتب على الصورة :

$$F(x, y, c_1, c_2, ..., c_n) = 0$$

3.1.3. الشروط الإبتدائية والشروط والحدية

في المسائل المطلوب منك التحقق من حل المعادلة التفاضلية العادية، يمكنك أيضا أيجاد الثوابت الإختيارية الظاهرة في الحل العام للمعادلة، وذلك يتم عن طريق الشروط الإبتدائية التي تعطى في البداية .

وفي حال وجود حل عام لمعادلة تفاضلية من الرتبة الثانية مثلا، تحتوي على ثابتين أختياريين، يلزم لتحديد الثابتين شرطين إضافيين للمعادلة.

إذا أعطيت الشرطان عند نقطتين مختلفتين $y(x_1) = y_1$ ، $y(x_2) = y_2$ كانت الشروط شروطا حدية ، عندها نسمي المعادلة التفاضلية بالإضافة إلى الشروط الحدية بمسألة القيمة الحدية.

2.3 تعاريف في المعادلات التفاضلية

تعريف 1.2.3 : المعادلة التفاضلية هي كل معادلة تحوي على تفاضلات أو مشتقات لتابع أو أكثر بالنسبة لمتحولات وهي من الشكل

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (E)$$

مثال 1 :

$$\frac{dx}{dy}z + ydx = u$$

وتصنف المعادلة التفاضلية الى :

1- معادلة تفاضلية عادية : هي معادلة تفاضلية تحوي على مشتقات أو تفاضلات عادية لتابع أو أكثر

مثال 2 :

$$ydx + xdy = e^z$$

2- معادلة تفاضلية جزئية : هي معادلة تفاضلية تحوي على مشتقات أو تفاضلات جزئية لتابع أو أكثر

مثال 3 :

$$\frac{\partial x}{\partial y} = zx$$

3- المعادلة التفاضلية العادية الخطية : هي المعادلة التي تكون خطية بالنسبة لكل من التابع أو التوابع ومشتقاتها و لا تحوي على جداءات لها .

4- المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية : هي المعادلة التي تكون خطية بالنسبة للمشتقات الجزئية للتابع أو التوابع الموجودة.

ملاحظة 1 : .

1- ان مرتبة المعادلة هي مرتبة أعلى مشتق موجود فيها.

2- ويمكن تحويل المعادلة التفاضلية من شكل لآخر لتسهيل حلها.

3.3 المعادلات التفاضلية من الرتبة والدرجة الأولى

تعريف 1.3.3 : المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى ، هي علاقة بين دالة (تعتبر مجهولة) y وبين مشتقتها الأولى والمتغير x لـ y .

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

أو

$$M(x, y)d(x) + N(x, y)d(y)$$

ولحل مثل هذه المعادلات نتبع الطرق التالية :

1.3.3. طريقة فصل المتغيرات

إذا أمكن وضع المعادلة على الصورة

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

حيث أن $f(x)$ دالة في x فقط و $g(y)$ داله في y وبذلك فإن عملية فصل المتغيرات تكون تحققت ولحل المعادلة بعد عملية الفصل ، نستخدم التكامل المباشر فيكون الحل :

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = c$$

حيث c ثابت اختياري ، ويسمى ذلك الحل بالحل العام ، ويمكن وضع الثابت الاختياري على أي صورة حسب متطلبات تبسيط شكل الحل العام .

وإذا علم شرط ابتدائي ، نستطيع حذف الثابت الاختياري والحل الناتج يكون حلا خاصا.

مثال 1 : حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$xy^2dx + (1 - x^2)dy = 0$$

الحل : نقسم طرفي المعادلة على $y^2(1 - x^2)$ فنحصل على :

$$\frac{xdx}{1 - x^2} + \frac{dy}{y^2} = 0$$

والتي هي معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتغيرات وطريقة حلها تكون كمايلي :
بتكامل الطرفين

$$\begin{aligned}
\int \frac{xdx}{1 - x^2} + \int \frac{dy}{y^2} &= 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \ln\left(x^2 - 1\right) - \frac{1}{y} = c \\
&\Rightarrow \ln\left(x^2 - 1\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{y} = c \\
&\Rightarrow \frac{1}{y} = \ln\left(x^2 - 1\right)^{-\frac{1}{2}} - c
\end{aligned}$$

و بالتالي حل المعادلة التفاضلية هو

$$y = \left(\ln\left(x^2 - 1\right)^{-\frac{1}{2}} - c\right)^{-1}$$

2.3.3. المعادلات التفاضلية التامة

إذاكانت المعادلةالتفاضلية :

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

تامة ، فإنة توجد دالة $f(x,y)$ حيث ان :

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=df$$

أي أن :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=P\left(x,y\right) \tag{1}$$

و

$$\frac{\partial f}{\partial y}=Q\left(x,y\right) \tag{2}$$

بمفاضلة المعادلة (1) بالنسبة لـ y و المعادلة (2) بالنسبة لـ x نجد

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

وحتى تكون المعادلة تامة فمن الضروري توفر الشرط التالي :

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

و هو محقق لأن

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

لحل المعادلة التامة هناك بضع خطوات نتبعها :

- نفترض دالة ما تحقق

$$df\left(x,y\right)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0$$

فيكون حلها $f(x,y)=c$ حيث أن c ثابت. و تحقق

$$\frac{\partial f}{\partial x}=P \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=Q$$

بالتكامل نجد

$$f(x,y)=\int P(x,y)\,dx+\psi(y) \tag{3}$$

حيث أن $\psi(y)$ **مقدار ثابت بالنسبة إلى** x .

- نفاضل أطراف (3) **جزئيا بالنسبة ل** y **واستخدام المعادلة** $\frac{\partial f}{\partial y}=Q$ **نجد**

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx+\psi'(y)=Q(x,y)$$

أي أن

$$\psi'(y)=Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx$$

نلاحظ ان الطرف الأيمن في المعادلة الأخيرة دائما داله في y **فقط . (لماذا)؟**

- نكامل طرفي المعادلة الأخيرة بالنسبة إلى y **، نستنتج شكل الداله** $\psi'(y)$ **حيث :**

$$\psi(y)=\int Q(x,y)\,dy-\int\left(\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx\right)dy$$

وبالتعويض في المعادلة (3) **نحصل على حل المعادلة التفاضلية التامة ، ويكون على الصورة :**

$$\int P(x,y)\,dx+\int Q(x,y)\,dy-\int\left(\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx\right)dy=c$$

مثال 2 : أوجد حل المعادلة :

$$(6x^2+4xy+y^2)dx+(2x^2+2xy-3y^2)dy=0)$$

الحل :

نضع :

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{d(6x^2+4xy+y^2)}{dy}=4x+2y\\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{d(2x^2+2xy-3y^2)}{dx}=4x+2y\end{aligned}$$

وهذا يعني أن المعادلة تامة . ولحل المعادلة نتبع مايلي : نضع

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + 4xy + y^2 \\ Q(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 2xy - 3y^2 \end{aligned}$$

بالتكامل نجد :

$$\begin{aligned} \int P(x,y)\,dx &= 2x^3 + 2x^2y + xy^2 \\ \int Q(x,y)\,dy &= 2x^2y + xy^2 - y^3 \end{aligned}$$

بالتفاضل نجد

$$\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx = 2x^2 + 2xy$$

و بالتكامل نجد

$$\int \left(\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx\right) dy = 2x^2y + xy^2$$

نطبق القانون نتحصل على:

$$2x^3 + 2x^2y + xy^2 + 2x^2y + xy^2 - y^3 - \left(2x^2y + xy^2\right) = c$$

$$\Leftrightarrow c = f(x,y) = 2x^3 + 2x^2y + xy^2 - y^3.$$

3.3.3 المعادلات التفاضلية المتجانسة

هذا الصنف من المعادلات التفاضلية الغير قابلة لفصل المتغيرات في الأصل تصبح قابلة للفصل بعد تحويل المتغير .

هذه المعادلات يمكن كتابتها على الشكل :

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{x}{y}\right)$$

هذا النوع من المعادلات يصبح قابل للفصل وذلك بوضع $v = y/x$ نجد أن :

$$y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{dy}{dx} + v.$$

وبالتعويض في المعادلة الأصلية نحصل على معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى قابلة لفصل المتغيرات .

مثال 3 : أوجد حل المعادلة التالية :

$$y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$$

بوضع $F(x,y) = \frac{x^2+y^2}{xy}$ يمكن كتابة مايلي

$$F(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

وبوضع $v = y/x$ نستنتج أن المعادلة التفاضلية متجانسة . وبالتعويض في المعادلة التفاضلية الأصلية نجد ان :

$$dy = \left(\frac{1}{v} + v\right) dx$$

ولكن: $y = xv$
وبتفاضل الطرفين يصبح

$$dy = xdv + vdx$$

وبالتعويض بدلا عن dy نحصل على العلاقة التالية :

$$xdv + vdx = \left(\frac{1}{v} + v\right) dx \Rightarrow xdv = \frac{1}{v}dx \Rightarrow vdv = \frac{dx}{x}$$

بتكامل الطرفين نجد

$$\int vdv = \int \frac{dx}{x} + c \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 = \ln x + c$$

ويمكن كتابة المعادلة بالصورة

$$y^2 = 2x^2 \ln x + 2x^2 c.$$

تعريف 2.3.3 : المعادلات التفاضلية التي تكتب من الشكل :

$$N(x,y)\frac{dy}{dx} = M(x,y)$$

حيث أن N ، M دوال متجانسة من نفس الدرجة، نقول أنها معادلات تفاضلية متجانسة .
ويمكن كتابتها من الشكل :

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{x}{y}\right)$$

وبالتالي بعد تحويل المتغير تصبح قابلة لفصل المتغيرات .

تعريف 3.3.3 : نقول أن الدالة $g(x,y)$ المعرفة من أجل كل قيم (x,y) أنها متجانسة من الدرجة n إذا كان :

$$g(tx,ty)=t^n g(x,y)$$

من أجل كل قيم (x,y).

مثال 4 : بين فيما إذا كانت المعادلة التالية متجانسة ثم أوجد حلها ؟

$$xy'-y=xe^{x/y}$$

الحل: يمكن كتابة

$$xy'-y=xe^{x/y}\Rightarrow xy'=y+xe^{x/y}$$

بوضع

$$N\left(x,y\right)=x \quad \text{و} \quad M\left(x,y\right)=y+xe^{x/y}$$

نجد

$$N\left(tx,ty\right)=tx=tN\left(x,y\right)$$

و

$$M\left(tx,ty\right)=ty+txe^{tx/ty}=t\left(y+xe^{x/y}\right)=tM\left(x,y\right)$$

منه فإن الدوال N ، M دوال متجانسة من الدرجة الأولى يمكن كتابتها من الشكل :

$$\frac{dy}{dx}=F\left(\frac{x}{y}\right)$$

طريقة حلها كمايلي : بقسمة طرفي المعادلة على x تصبح المعادله :

$$y'-\frac{y}{x}=e^{y/x}\Rightarrow y'=\frac{y}{x}+e^{y/x}$$

بوضع $v=y/x$ نجد

$$y=vx\Rightarrow y'=x\frac{dv}{dx}+v$$

نعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على:

$$x\frac{dv}{dx}+v=v+e^v\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=e^v\Rightarrow\frac{dx}{x}=e^{-v}dv$$

بتكامل الطرفين نحصل على

$$\int e^{-v}dv = \int \frac{dx}{x} + c \Longrightarrow -e^{-v} = \ln x + c$$

بإدخال الـ $\ln$ على الطرفين

$$\ln\left(-e^{-v}\right) = \ln\left(\ln x + c\right) \Longrightarrow v = \ln\left(\ln x + c\right)$$

بوضع $v = y/x$ تصبح المعادلة

$$\frac{y}{x} = \ln\left(\ln x + c\right) \Longrightarrow y = x\ln\left(\ln x + c\right)$$

4.3 المعادلة التفاضلية الخطية

تعريف 1.4.3 : تكون المعادله التفاضلية خطية إذا كان المتغيرالتابع ومشتقاته في المعادلة من الدرجة الأولى .

فالصورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبةالأولى تكون :

$$\frac{dy}{dx} + yP\left(x\right) = Q\left(x\right)$$

وتسمى خطية في y.

أما المعادلة الخطية في x فإنها على الصورة :

$$\frac{dx}{dy} + xa\left(y\right) = b\left(y\right)$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى من الشكل :

$$y = e^{-I(x)}\left(\int e^{I(t)}Q\left(t\right)dt + c\right)$$

حيث :

$$I\left(x\right) = \int P\left(x\right)dx$$

و c عدد ثابت .

مثال 1 : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :

$$(y+y^2)dx-(y^2+2xy+x)dy=0$$

الحل : المعادلة خطية في x ، حيث يمكن وضعها على الشكل التالي :

$$\frac{dx}{dy}+xa\left(y\right)=b\left(y\right)$$

بقسمة طرفي المعادلة على $dy(y+y^2)$ نجد

$$\frac{dx}{dy}-\frac{y^2+2xy+x}{y+y^2}=0$$

أي أن

$$\frac{dx}{dy}-\frac{y^2}{y+y^2}-\frac{2xy+x}{y+y^2}=0\Longrightarrow\frac{dx}{dy}-\frac{2y+1}{y+y^2}x=\frac{y^2}{y+y^2}$$

بمقارنة المعادلة الناتجة مع المعادلة الأولى نجد

$$b\left(y\right)=\frac{y^2}{y+y^2},\qquad a\left(y\right)=-\frac{2y+1}{y+y^2}$$

ومنه

$$I\left(y\right)=e^{-\int\frac{2y+1}{y+y^2}dy}=e^{\ln\left(\frac{1}{y+y^2}\right)}=e^{-\ln\left(y+y^2\right)}=\frac{1}{y+y^2}$$

و

$$\int I\left(y\right)b\left(y\right)dy=\int\frac{1}{y+y^2}\frac{y}{y+1}dy=\int\frac{1}{\left(y+1\right)^2}dy=-\frac{1}{y+1}$$

يكون حل المعادلة

$$I\left(y\right)x=\int I\left(y\right)b\left(y\right)dy+c$$

$$\frac{1}{y+y^2}x=-\frac{1}{y+1}+c$$

أي

$$x=-y+c(y^2+y),c\in\mathbb{R}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية .

5.3 المعادلات التفاضلية من الرتبة والدرجة الثانية

ليكن المثال التوضيحي التالي الذي يشرح كيفية إيجاد حلول معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية.

مثال 1 : المطلوب من إيجاد حلول المعادلة التالية:

$$x^2y'' + xy' + y = 2$$

يمكنك حل هذه المعادلة بعدة طرق منها الطريقة التي ذكرناها سابقا، ولكن هذه المعادلة تختلف عن المعادلة

$$y'' + ay' + by = 0$$

في أن معاملات هذه دالة في x.
اما النوع الآخر وهو المعادلات الخطية ذات المعاملات الثابتة :

$$y'' + ay' + by = Q(x) \qquad (II)$$

والحل العام لها هو :

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} + \text{حل خاص}$$

يعني نحل كما لو كانت معادلة تفاضلية متجانسة ومن ثم ايجاد التكامل الجزئي الذي يعبر عن الدالة التي في الطرف الأيمن .
نبدأ أولاً بحل معادلة تفاضلية متجانسة، ولتكن :

$$y'' + 3y' - 4y = 0$$

في هذه الحالة: نفرض أن

$$y = Ce^{rx}$$

حيث r عدد حقيقي ما (ثابت) سوف نشرح لاحقا كيف نحصل عليه. الآن نوجد المشتقة الأولى والثانية في المعادلة التفاضلية اعلاه

$$y' = re^{rx} \quad \text{و} \quad y'' = r^2e^{rx}$$

بالتعويض في المعادلة نجد

$$y'' + 3y' - 4y = 0$$

$$r^2e^{rx} + 3re^{rx} - 4e^{rx} = 0$$

بأخذ e^{rx} عامل مشترك نجد

$$e^{rx}[r^2 + 3r - 4] = 0$$

ومنها اما $e^{rx} = 0$ وهذا مستحيل، اذاً نأخذ الحل الثانى :

$$r^2 + 3r - 4 = 0 \Longrightarrow (r+4)(r-1) = 0.$$

نجد $r = 1$ أو $r = -4$.

وبناء عليه تكون جميع الحلول الممكنة للمعادلة السابقة هي :

$$y_1 = C_1e^x \quad \text{أو} \quad y_2 = C_2e^{-4x}$$

حيث أن C_1 و C_2 ثوابت .

يمكن اثبات ان كلا المزج الخطي للحلين يشكلان حلا للمعادلة أيضاً. ومنه يكون الحل العام للمعادلة من الشكل :

$$y = C_1e^x + C_2e^{-4x}$$

وبصفة عامة الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'' + ay' + by = 0$ على الشكل :

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$$

بحيث r_1 و r_2 هما جذوراً للدالة المميزة

$$r^2 + ar + b = 0$$

الآن نأتى الى المعادلات غير المتجانسة أي التى على الشكل التالي :

$$y'' + ay' + by = Q(x) \qquad (II)$$

والحل العام لها هو :

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} + \text{حل خاص}$$

لتكن الآن المعادلة غير المتجانسة

$$y'' + 3y' - 4y = x^2$$

نلاحظ هي نفسها الدالة السابقة مع وضع x^2 بدلاً من الصفر . هذا النوع من المعادلات نحل كما لو كانت $y''+3y'-4y=0$: متجانسة.
وحلها العام كما اسلفنا القول :

$$y = C_1e^x + C_2e^{-4x}$$

هذا الحل هو حل جزئى لهذه المعادلة التفاضلية، لآن نبحث عن الحل الذى يؤكد لنا صحة أن :

$$y''+3y'-4y = x^2$$

الآن نلاحظ ان الطرف الأيمن عبارة عن دالة كثير حدود من الدرجة الثانية لذلك نفرض أن الحا الخاص لها هو دالة من الدرجة الثانية والصورة العامة له هي من الشكل :

$$y = ax^2 + bx + c$$

ومنه $y'=2ax+b$ و $y''=2a$ بالتعويض في المعادلة نجد

$$y''+3y'-4y = x^2 \Longrightarrow 2a+3(2ax+b)-4(ax^2+bx+c) = x^2$$

نرتب هذه المعادلة من الأس الأكبر الى الأس الأصغر مع إعتبار أن a, b, c ثوابت .

$$2a+6ax+3b-4a^2-4bx-4c-x^2 = 0$$

$$(-4a-1)x^2+(6a-4b)x+(2a+3b-4c) = 0$$

لكي تكون هذه المعادلة صحيحة نشترط أن يكون كل عامل من هؤلاء يساوي صفر أي:

$$4a-1 = 0 \Longrightarrow a = -1/4$$

$$6a-4b = 0 \Longrightarrow b = -3/8$$

وأخيراً $2a+3b-4c=0$ يعطينا $c=-13/32$. ومنه يكون الحل العام لهذه المعادلة غير المتجانسة هو :

$$y = C_1e^x + C_2e^{-4x} - (1/4)x^2 - (3/8)x - (13/32)$$

ماذ نفعل لو كانت الدالة هي $Q(x) = A\sin(x)$ مثلاً وليست x^2 ؟ حيث A عدد ثابت :

هنا نفرض أن الحل الخاص هو من الشكل التالي:

$$y = C\sin x + D\cos x$$

بحساب المشتق الأول والثاني ونعوض في الدالة الأصلية، ومن ثم نضع شروطاً كما فعلنا لإيجاد كلاً من C و D .

لو كانت الدالة $Q(x) = ax$ فإننا نفرض أن الحل الخاص دالة تآلفية أي من الشكل $y = Cx + D$.

لو كانت الدالة في الطرف الأيمن هي $Q(x) = e^{Ax}$ فإننا نفرض أن: $y = Ce^{Ax}$.

بإختصار الفرضية تكون من نفس فصيلة الدالة التي في الطرف الأيمن .

بإسلوب مشابه ننتقل الى الحالة التي فيها العوامل دالة أخرى في x.

$$P(x)y'' + q(x)y' + R(x)y = Q(x) \qquad (III)$$

نواصل حل المثال المطروح كي نفهم معا طريقة حل المعادلات التفاضلية من هذا النوع.

$$x^2y'' + xy' + y = 2$$

نلاحظ ان الطرف الأيمن دالة في x أو اعتبرها دالة ثابتة في x (وانتهت المشكلة) أي نتعامل معادلة تفاضلية غير متجانسة من الدرجة الثانية .

طريقة أويلر ـ كوشي تتلخص في فكرة واحدة وهي :

يمكنك تحويل المعادل السابقة الى معادلة أخرى على الشكل :

$$y'' + ay' + by = 2$$

بحيث a ، b ثوابت، ولكن لكي تتم هذه الطريقة بنجاح ننقل الدالة من المتغير x الى متغير آخر t (وهي طريقة مشابهة جزئياً لتحويل لا بلاس)

نلاحظ في المعادلة السابقة عند كتابة y' المقصود منها هو $\frac{dy}{dx}$ وعندما نكتب y'' نقصد منها $\frac{d^2y}{d^2x}$ أي المشتق الثاني بالنسبة لـ x .
الآن نضع تحويلا يحول $\frac{dy}{dx}$ الى $\frac{dy}{dt}$.

نفرض أن : $x = e^t$ نشتق الطرفين بالنسبة لـ t

$$\frac{dx}{dt} = e^t$$

نعلم ان $x = e^t$ والمشتقة الأولى ايضاً بـ x لكننا نريد $\frac{dy}{dt}$ بإستعمال القاعدة التالية :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}.\frac{dy}{dx}$$

ولكن لدينا $x = \frac{dx}{dt}$ اذاً

$$\frac{dy}{dt} = x\frac{dy}{dx}$$

نشتق مرة ثانية بالنسبة للمتغير t نجد

$$\frac{d^2y}{d^2x} = \frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dx}\right)$$

يمكنك تبسيط الحل بالشكل التالي :

$$\frac{d^2y}{d^2x} = \frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right).\frac{dx}{dt}$$

أي:

$$\frac{d^2y}{d^2x} = \left(\frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{d^2x}\right)\frac{dx}{dt}$$

علمان أن $x = \frac{dy}{dt}$ بالتعويض

$$\frac{d^2y}{d^2x} = \left(\frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{d^2x}\right)x$$

$$\frac{d^2y}{d^2x} = x\frac{dy}{dx} + x^2\frac{d^2y}{d^2x}$$

الفى نظرة على أول المسألة نجد أن :

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$$

بالتعويض

$$\frac{d^2y}{d^2x} = \frac{dy}{dt} + x^2\frac{d^2y}{d^2x}$$

ومنه :

$$x^2\frac{d^2y}{d^2x} = \frac{d^2y}{d^2x} - \frac{dy}{dt}$$

بالتعويض في المعادلة الأصلية $x^2y'' + xy' + y = 2$ نجد

$$\frac{d^2y}{d^2x} - \frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dt} + y = 2$$

أختصر .

$$\frac{d^2y}{d^2x} + y = 2$$

تحولت الى معادلة تفاضلية غير متجانسة في المتغير t. بحيث يمكنك حلها كما أسلفنا .

حلها يكون من الشكل :

$$y = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t} + \text{حل خاص}$$

حيث C_1 و C_2 ثوابت . r_1 و r_2 جذوراً للمعادلة المميزة .

أولاً نوجد الحل الجزئي للمعادلة أعلاه بوضع :

$$\frac{d^2y}{d^2x} + y = 0$$

المعادلة المميزة هي :$r^2 + 1 = 0$ و منه $r_1 = i$ و $r_2 = -i$ حيث i وحدة تخيلية . ومنه يكون الحل على الشكل

$$y = C_1e^{it} + C_2e^{-it} + \text{حل خاص}$$

وهنا نريد تبسيط هذا المقدار (وضعه في صورة أخرى وهي صيغة أويلر).

$$C_1e^{it} = C_1\cos(t) + iC_1\sin(t)$$

و

$$C_2e^{-it} = C_2\cos(t) - iC_2\sin(t)$$

بجمع المعادلتين معاً (مع مراعاة الحدود المشابهة) نجد:

$$y = C_1e^{it} + C_2e^{-it} = (C_1 + C_2)\cos(t) + i(C_1 - C_2)\sin(t)$$

و بالتعويض في المعادلة $\frac{d^2y}{d^2x} + y = 2$ أي أن الحل الخاص مساوي لـ 2 لتصبح المعادلة هي :

$$y = A\cos(t) + B\sin(t) + 2$$

بالرجوع لـ $x = e^t$: بأخذ $\ln$ للطرفين ينتج : $t = \ln(x)$ وفي الأخير يصبح شكل المعادلة (في x) هو :

$$y = A\cos(\ln(x)) + B\sin(\ln(x)) + 2$$

وهذا هو الحل العام للمعادلة .

نظرية 1.5.3 : لتكن المعادلة التفاضلية

$$y'' + ay' + by = Q(x) \qquad (I)$$

وليكن Δ مميز المعادلة المميزة لها

$$r^2 + ar + b = 0$$

1- إذا كان $\Delta > 0$ و كانت r_1 و r_2 جذوراً للمعادلة المميزة فإن الحل العام لها هو:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \text{حل خاص}$$

حيث C_1 و C_2 ثوابت.

2- إذا كان $\Delta = 0$ و كان r جذراً مضاعفا للمعادلة المميزة فإن الحل العام لها هو:

$$y = e^{rx}\left(C_1 + C_2 x\right) + \text{حل خاص}$$

حيث C_1 و C_2 ثوابت.

3- إذا كان $\Delta < 0$ و كان $r = \alpha + i\beta$ جذراً للمعادلة المميزة فإن الحل العام لها هو:

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)\right) + \text{حل خاص}$$

حيث C_1 و C_2 ثوابت.

سلسلة التمارين رقم 4

تمرين 1 : أوجد في المجال I من $\mathbb{R}$ حلول المعادلات التفاضلية التالية:

$$\begin{array}{lll} 1) & x\ln x y' + y = x, & I =]1, +\infty[\\ 2) & x(xy' + y - x) = 1, & I =]-\infty, 0[\\ 3) & 2xy' + y = x^4, & I =]-\infty, 0[\end{array}$$

الحـــل

المعادلات التفاضلية المطلوب حلها في هذا التمرين كلها خطية من الدرجة الأولى. نشير إلى أن المعادلة التفاضلية المقترحة (E) و المعادلة المتجانسة المصاحبة لها هي (E_H) .

1- الدالتان $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$ و $x \mapsto \dfrac{1}{\ln x}$ مستمرة في I

ونعلم أن حلول (E) على I من الشكل $y_0 + \lambda y_1$ حيث y_0 هو حل المتجانس لـ (E_H) و y_1 هو حل خاص غير معدوم لـ (E).

لتكن y دالة قابلة للإشتقاق على I نقول أنها حل للمعادلة (E) على I.

$$\begin{array}{ll} \Leftrightarrow & \forall x \in I,\ x\ln x y'(x) + y(x) = x \\ \Leftrightarrow & \forall x \in I,\ \ln x y'(x) + \dfrac{1}{x} y(x) = 1 \\ \Leftrightarrow & \forall x \in I,\ (\ln x . y)'(x) = 1 \\ \Leftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ y(x) = \dfrac{x+\lambda}{\ln x} \end{array}$$

2- **الدوال** $x\mapsto \frac{1}{x}$ **و** $x\mapsto 1+\frac{1}{x^2}$ **مستمرة على** I

لتكن y **دالة قابلة للإشتقاق على** I **نقول أنها حل للمعادلة** (E) **على** I.

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \forall x\in I,\ x(xy'(x)+y(x)-x)=1\\
&\Leftrightarrow \forall x\in I,\ (xy)'(x)=x+\frac{1}{x}\\
&\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R},\ \forall x\in I,\ xy(x)=\frac{x^2}{2}+\ln(-x)+\lambda\\
&\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R},\ \forall x\in I,\ y(x)=\frac{x}{2}+\frac{\ln(-x)+\lambda}{x}.
\end{aligned}$$

حلول (E) **على** I **هي دوال من الشكل**

$$x\mapsto \frac{x}{2}+\frac{\ln(-x)+\lambda}{x},\lambda\in\mathbb{R}$$

3- **الدوال** $x\mapsto \frac{1}{2x}$ **و** $x\mapsto \frac{x^3}{2}$ **مستمرة على** I

لتكن y **دالة قابلة للإشتقاق على** I **نقول أنها حل للمعادلة** (E) **على** I.

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \forall x\in I,\ y'(x)+\frac{1}{2x}y(x)=\frac{x^3}{2}\\
&\Leftrightarrow \forall x\in I,\ e^{\ln|x|/2}y'(x)+\frac{1}{2x}e^{\ln|x|/2}y(x)=\frac{x^3}{2}e^{\ln|x|/2}\\
&\Leftrightarrow \forall x\in I,\ (\sqrt{-x}y)'(x)=-\frac{1}{2}(-x)^{7/2}\\
&\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in I,\ \sqrt{-x}y(x)=\frac{1}{9}(-x)^{9/2}+\lambda\\
&\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in I,\ y(x)=\frac{1}{9}x^4+\frac{\lambda}{\sqrt{-x}}
\end{aligned}$$

حلول (E) **على** I **هي دوال من الشكل**

$$x\mapsto \frac{x^4}{9}+\frac{\lambda}{\sqrt{-x}},\lambda\in\mathbb{R}$$

تمرين 2 : أوجد في المجموعة $]-\infty,0[$ } و المجموعة $]0,+\infty[$ حلول المعادلة التفاضلية

$$|x|y' + (x-1)y = x^3$$

الحـــل إيجاد الحلول المعادلة على المجال $]0,+\infty[$:

لتكن الدالة f القابلة للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ التي تمثل حل للمعادلة، و منه

$$\begin{aligned}
&\forall x \in]0,+\infty[,\ |x|f'^3 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ xf'^3 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) + (1-\frac{1}{x})f(x) = x^2 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ e^{x-\ln x}f'(x) + (1-\frac{1}{x})e^{x-\ln x}f(x) = e^{x-\ln x}x^2 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ (\frac{e^x}{x}f)'^x = ((x-1)e^x)' \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = xe^{-x}((x-1)e^x + \lambda) = x^2 - x + \lambda xe^{-x}
\end{aligned}$$

حلول المعادلة على المجال $]0,+\infty[$ هي دوال من الشكل

$$x \mapsto x^2 - x + \lambda xe^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}$$

إيجاد الحلول المعادلة على المجال $]-\infty,0[$:

لتكن الدالة f القابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty,0[$ التي تمثل حل للمعادلة، و منه

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ -x\,(f')^3 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,0[,\ f'(x) + (-1+\frac{1}{x})f(x) = -x^2 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,0[,\ e^{-x+\ln|x|}f'(x) + (-1+\frac{1}{x})e^{-x+\ln|x|}f(x) = -e^{-x+\ln|x|}x^2 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,0[,\ \left((-xe^{-x}y)'\right)^3 e^{-x}\ (*)
\end{aligned}$$

نبحث عن الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto -x^3e^{-x}$ من الشكل $(ax^3+bx^2+cx+d)e^{-x}$.

$$\begin{aligned}
&((ax^3+bx^2+cx+d)e^{-x})'^3 + bx^2 + cx + d) + (3ax^2+2bx+c))e^{-x} \\
= \ &(-ax^3 + (3a-b)x^2 + (2b-c)x + c - d)e^{-x},
\end{aligned}$$

و

$$\left(((ax^3+bx^2+cx+d)e^{-x})'\right)^3 e^{-x} \Leftrightarrow \begin{cases} -a=-1 \\ 3a-b=0 \\ 2b-c=0 \\ c-d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=6=d \end{cases}.$$

و منه نجد

$$\begin{aligned}(*) &\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R},\ \forall x\in]-\infty,0[,\ xe^{-x}f(x)=(x^3+3x^2+6x+6)e^{-x}+\lambda \\ &\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R},\ \forall x\in]-\infty,0[,\ f(x)=x^2+3x+6+\frac{\lambda e^x+6}{x}.\end{aligned}$$

حلول المعادلة على المجال $]-\infty,0[$ هي دوال من الشكل

$$x\mapsto x^2+3x+6+\frac{\lambda e^x+6}{x},\lambda\in\mathbb{R}.$$