II التوابع المستمرة :

① تعريف : لتكن $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة حقيقية، $x_0 \in I$، نقول أن f مستمرا عند النقطة x_0 إذا تحقق : $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

ويمكن أن نعيد هذا التعريف كالآتي :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 ; \forall x \in I : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

② الاستمرار على يمين (يسار) نقطة :

- نقول أن f مستمرة على يمين x_0 إذا تحقق :

$$\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$$

- نقول أن f مستمرة على يسار x_0 إذا تحقق :

$$\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$$

- f مستمرة في x_0 إذا وفقط إذا كانت f مستمرة من يمين ومن يسار x_0 في آن واحد.

ملاحظة : إذا كان f مستمرا عند كل نقطة x_0 من I فنقول أن f مستمرا على المجموعة I.

مثال : ① الدالة $f(x) = x + 2$ مستمرة على المجموعة $\mathbb{R}$ كلها لأنه إذا كانت $x_0 \in \mathbb{R}$ نقطة ما لدينا $\lim_{x \to x_0} f(x) = x_0 + 2 = f(x_0)$

② لتكن الدالة g المعرفة بـ :

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & ; x > 1 \\ 1 & ; x = 1 \\ x + 2 & ; x < 1 \end{cases}$$

لدينا $\lim_{x \overset{<}{\to} 1} g(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} (x+2) = 3$

إذن g غير مستمرة على يسار 1 لأن $\lim_{x \overset{<}{\to} 1} g(x) \neq g(1) = 1$

و $\lim_{x \overset{>}{\to} 1} g(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} x^2 = 1 = g(1)$ ، g مستمرة على يمين 1

وغير مستمرة عند 1 .

ملاحظة: لكي تكون f مستمرة عند x_0 يجب أن تتوفر شروط ثلاثة:

1- أن تكون f معرفا عند x_0.

2- أن تكون $\lim_{x \to x_0} f(x)$ موجودة ووحيدة.

3- أن تكون $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

وعليه فإن الدالة f تكون غير مستمرة إذا لم يتحقق أحد الشروط الثلاثة السابقة.

نظرية: إذا كان $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالتين مستمرتين عند النقطة $x_0 \in I$ فإن:

1) الدوال $f \pm g$ ، $f \cdot g$ ، $\frac{f}{g}$ $(g(x_0) \neq 0)$ كلها مستمرة عند x_0

2) إذا كان $f \circ g$ معرفا وكان f مستمرا عند النقطة $g(x_0)$ فإن:
$g \circ f$ يكون مستمرا أيضا عند x_0.

3) نظريات:

نظرية 1: إذا كان $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ وكان f مستمرا عند y_0 وكانت $\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0$ و $(f \circ g)$ معرفا فإن:
$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(y_0)$$

نظرية 2: إذا كان $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ وكان f مستمرا عند y_0 وكانت $\lim_{x \to +\infty} g(x) = y_0$ فإن: $\lim_{x \to +\infty} f(g(x)) = f(y_0)$

نظرية 3: إذا كانت $\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell$ و $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ فإن:
$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \ell$$

4) التابع المحدود:

ليكن $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة، نقول أن f محدود على المجال I إذا تحقق الشرط: $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in I : |f(x)| \leq k$

نظرية: إذا كان $f : I=[a,b] \to \mathbb{R}$ مستمرا على المجال المغلق والمحدود $I=[a,b]$ فإنه لدينا ما يلي:

① f يكون محدودا على I

② f يبلغ (يدرك) حديه الأعلى و الأدنى على I، أي أنه

$\exists x_0, x_1 \in I ;\ f(x_0) = \inf f(x)$

$$f(x_1) = \sup f(x)$$

⑤ نظرية القيم المتوسطة:

إذا كان $f : I=[a,b] \to \mathbb{R}$ مستمرا على المجال المغلق والمحدود I فإذا:

$$\forall \lambda \in [\inf f(x), \sup f(x)]$$

$$\Rightarrow \exists c \in [a,b]$$

يحقق
$$f(c) = \lambda$$

⑥ الدوال الرتيبة: ليكن، $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

① نقول أن f متزايد (متزايد تماما) على I إذا تحقق:

$\forall x, y \in \mathbb{R} ;\ x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y)$ $(x < y \Rightarrow f(x) < f(y))$

② نقول أن f متناقص (متناقص تماما) إذا تحقق:

$\forall x, y \in \mathbb{R} ;\ x \le y \Rightarrow f(x) \ge f(y)$ $(x < y \Rightarrow f(x) > f(y))$

③ نقول أن f رتيبة على I إذا كان f متزايد أو متناقصا.

III الاشتقاق:

① مشتق الدالة عند نقطة، مشتق دالة على مجال (الدالة المشتقة):

ليكن
$$f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$

نقول أن f يقبل الاشتقاق عند النقطة $x_0 \in]a,b[$ إذا كانت النهاية (المنتهية) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ $(x \in [a,b])$ موجودة ووحيدة