II - التطبيقات :

1 - تعريف تطبيق: لتكن E و F مجموعتين نسمي تطبيقا من E نحو F كل علاقة f معرفة على $E\times F$ ترفق بكل عنصر x من E عنصرا وحيدا y من F. ونكتب :

$$f: E \to F \text{ تطبيق} \iff \forall x\in E, \exists! y\in F: y=f(x)$$

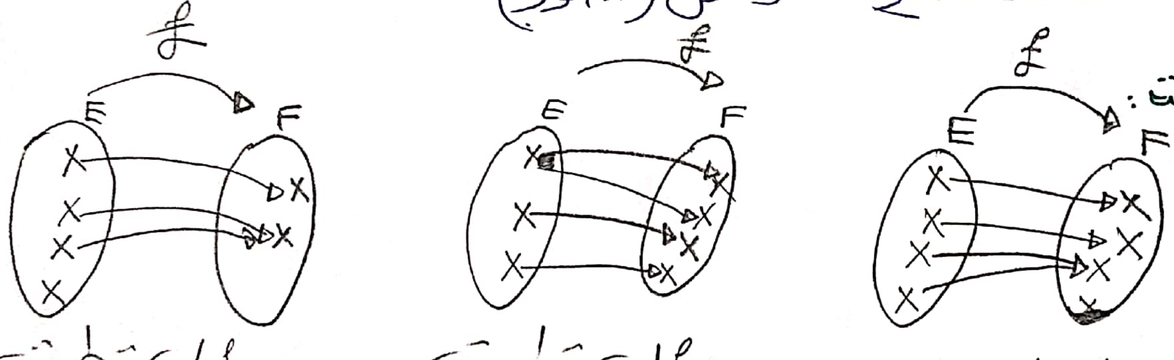
أو نكتب :

$$f: E \to F$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

ترميز:

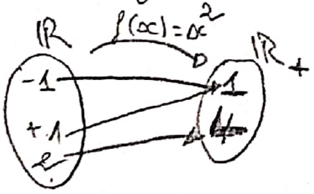
- x تسمى سابقة، y: تسمى صورة،
- E تدعى مجموعة البدء (السوابق)
- F تدعى مجموعة الوصول (الصور)

أمثلة:



f ليست تطبيق — f ليست تطبيق — f تطبيق

مثال :



$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$$
$$x \mapsto f(x) = x^2$$

f تطبيق لأن أي عنصر $x\in\mathbb{R}$ يقابله عنصر وحيد y بحيث $y\in\mathbb{R}_+$

- تطابق تطبيقين: ليكن $f: A\to B$ و $g: C\to D$ تطبيقين بحيث: $H\subseteq C$ و $H\subseteq A$ أي ($H\subseteq A\cap C$)

نقول ان f و g متطابقان في H اذا وفقط اذا كان :

$$\forall x\in H: f(x) = g(x)$$

- التطبيق الثابت : اذا كان $\forall x\in A: f(x)=K$ حيث K مقدار ثابت، فنقول أن f ثابت على A .

2- خواص تطبيق :

*- التباين (التطبيقات المتباينة): ليكن $f: E \to F$ تطبيقا نقول أن f متباين أو تباين إذا وفقط إذا كان لكل عنصر من F سابقة على الأكثر من E. أي أن:

$$f \text{ متباين} \iff \forall x_1, x_2 \in E : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

أو

$$f \text{ متباين} \iff \forall x_1, x_2 \in E : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

مثال 1: التطبيق f المعرف بـ :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sqrt{x^2+1}$$

نلاحظ أن العدد $\sqrt{2}$ يقبل سابقتين وهما 1 و -1 أي $f(-1)=f(1)$ لكن $-1 \neq 1$ ومنه f غير متباين.

مثال 2: التطبيق f معرف بـ :

$$f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$$
$$x \mapsto \frac{2}{3x}$$

$$f \text{ متباين} \iff \forall x_1, x_2 \in \mathbb{N}^* : f(x_1) = f(x_2) \overset{????}{\Rightarrow} x_1 = x_2 \ ?$$

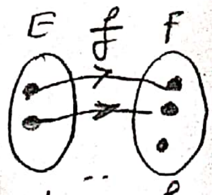
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{2}{3x_1} = \frac{2}{3x_2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{3x_1} = \frac{3}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{3x_2}$$

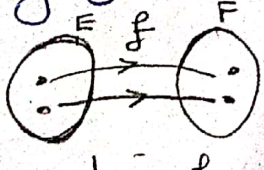
$$\Rightarrow \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2}$$

$$= x_1 = x_2$$

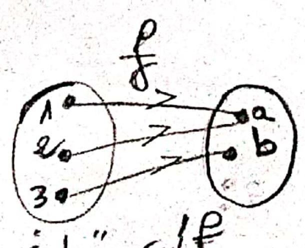
إذن f متباين.



f متباين



f متباين



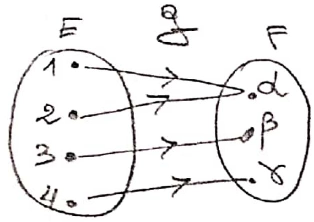
f ليس متباين

* - الغمر (التطبيقات الغامرة): ليكن $f:E\to F$ تطبيقا

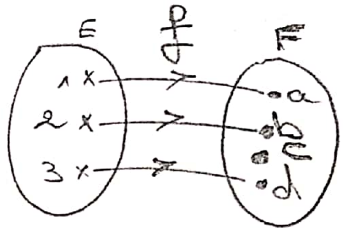
نقول ان f غامر أو غمر اذا وفقط اذا كان لكل عنصر من F سابقة على الأقل من E أي أن:

$$f \text{ غامر} \Leftrightarrow \forall y\in F, \exists x\in E : y=f(x)$$

مثال 1:



f غامر



f ليست غامر

مثال 2: التطبيق f المعرف ب:

$$f: \mathbb{R}-\{1\} \to \mathbb{R}-\{1\}$$
$$x \mapsto \frac{x}{x-1}$$

لندرس الغمر:

$$f \text{ غامر} \Leftrightarrow \forall y\in F, \exists x\in E : y=f(x)$$

$$\forall y\in \mathbb{R}-\{1\}, \exists x\in \mathbb{R}-\{1\}:$$

$$y=f(x)$$

$$y=\frac{x}{x-1}$$

$$x = xy - y$$

$$x - xy = -y$$

$$x(1-y) = -y$$

$$x = \frac{-y}{1-y} = \frac{y}{y-1} \in \mathbb{R}-\{1\}$$

نلاحظ أن x دائما موجود ومنه f غامر.

مثال: التطبيق f المعرف ب:

$$f: \mathbb{R}-\{-2\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)=\frac{x-1}{x+2}$$

$$f \text{ غامر} \Leftrightarrow \forall y\in \mathbb{R}, \exists x\in \mathbb{R}-\{-2\}: y=f(x)$$

$$y=f(x) \Rightarrow y=\frac{x-1}{x+2} \Rightarrow y(x+2)=x-1 \Rightarrow yx-x=-1-2y$$

$$\Rightarrow x(y-1) = -1-2y$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1-2y}{y-1}$$ اذن $y=+1$ ليست لها سابقة في $\mathbb{R}-\{-2\}$

* - تطبيق تقابل (التطبيق التقابلي): لتكن f بحيث $f: E \longrightarrow F$ تطبيقا

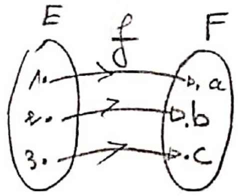
نقول ان f تطبيق تقابل (أو تقابلي) اذا وفقط اذا كان لكل عنصر

من F سابقة وحيدة من E ونكتب:

$$f \text{ تقابلي } \Leftrightarrow \forall y \in F, \exists! x \in E : y = f(x)$$

ملاحظة: f تقابلي اذا كان متباينا وغامرا.

مثال:



f : تقابلي.

مثال: التطبيق f المعرف بـ:

$$f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow [1, +\infty[$$
$$x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$$

التطبيق f تقابلي لأن المعادلة $y = \sqrt{x^2+1}$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}_+$

هو $x = \sqrt{y^2-1}$

3 - التطبيق العكسي: اذا كان $f: E \to F$ تطبيقا تقابليا

فان لـ f تطبيقا عكسيا، نرمز له بـ f^{-1} وهو

تقابلي أيضا، معرف كما يلي:

$$f^{-1}: F \longrightarrow E$$
$$y \longmapsto x = f^{-1}(y)$$

ونقول عن التطبيقين f و f^{-1} أنهما متعاكسان لأن:

$$f(f^{-1}(y)) = y$$
$$f^{-1}(f(x)) = x$$

مثال: التطبيق f المعرف بـ: $f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow [1, +\infty[$ تقابلي ويقبل تطبيق

$$x \longmapsto f(x) = \sqrt{x^2+1}$$

عكسي هو:

$$f^{-1}: [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$x \longmapsto f^{-1}(y) = \sqrt{y^2-1}$$

4- تركيب تطبيقين: اذا كان: $f: D_f \to R_f$ تطبيقين حيث

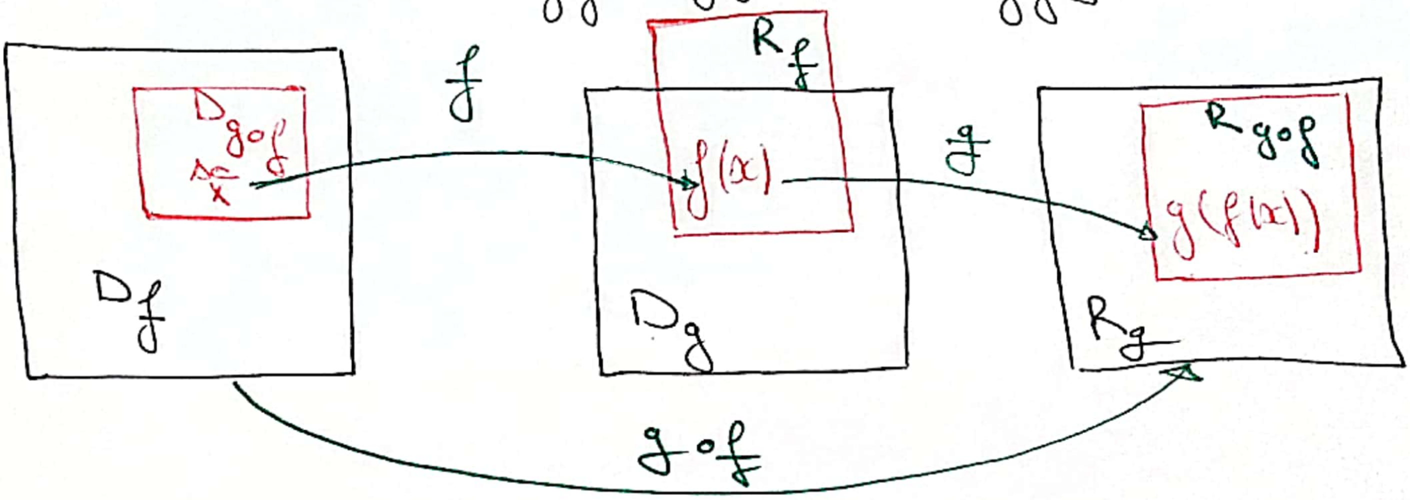
$$g: D_g \to R_g$$

اذا كان $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ في هذه الحالة يمكن أن نعرف ناتج تركيب f و g بالتطبيق:

$$g\circ f : D_{g\circ f} \to R_{g\circ f}$$
$$x \mapsto g\circ f(x) = g[f(x)]$$

حيث: $D_{g\circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$: مجموعة تعريف لـ $g\circ f$

$R_{g\circ f} = \{g(f(x)) : x \in D_{g\circ f}\}$ مجموعة وصول لـ $g\circ f$



ملاحظة:

- مجموعة تعريف $g\circ f$ هي مجموعة جزئية من مجموعة تعريف f أي ($D_{g\circ f} \subseteq D_f$)
- مجموعة وصول $g\circ f$ هي مجموعة جزئية من مجموعة وصول g أي ($R_{g\circ f} \subseteq R_g$)
- تكون $g\circ f$ معرفة على D_f بكاملها اذا كانت: $D_g = R_f$.

مثال: $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad D_f : \mathbb{R}_+$

$g(x) = -(x^2+1)$ $\quad D_g = \mathbb{R}$

- $D_{g\circ f} : \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$

$= \{x \in \mathbb{R}_+ , \sqrt{x} \in \mathbb{R}\}$

$= \mathbb{R}_+$

$$\cdot\; D_{f\circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : -(x^2+1) \geq 0\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : (x^2+1) \leq 0\}$$
$$= \emptyset$$

أي أن $f\circ g$ ليس معرفا عندأي تقاطع والسبب أن $R_g \cap D_f = \emptyset$

ملاحظة هامة:
عملية تركيب التطبيقات عموماً ليست تبديلية أي أن: $f\circ g \neq g\circ f$

5 - التطبيقات الرتيبة:

اذا كان $(E,\leq)$ و $(F,\leq)$ مجموعتين مرتبتين وكان $f: E \to F$ تطبيقاً

- نقول أن f متزايد (متزايد تماما) اذا وفقط إذا كان:

$$\forall x,y \in E : x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$
$$\forall x,y \in E : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

- تقول أن f متناقص (متناقص تماما) اذا وفقط اذا كان:

$$\forall x,y \in E : x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$
$$\forall x,y \in E : x < y \Rightarrow f(x) > f(x)$$

- تقول أن f رتيب اذا كان f متزايداً أو متناقصاً
- " " f رتيب تماما " متزايداً تماماً أو متناقصا تماماً

6 - العناصر الحادة، العنصر الاكبر، العنصر الاصغر، الحد الأعلى، الحد الأدنى:

لتكن $(E,\leq)$ مجموعة مرتبة ولتكن A مجموعة غير خالية $(\emptyset \neq A \subseteq E)$

- تقول أن X من E حاد أعلى للمجموعة A اذا وفقط إذا: $\forall a \in A,\ a \leq X$
هنا نقول أن A محدودة من الاعلى.

- تقول ان x من E حاد من الاسفل (الادنى) للمجموعة A اذا وفقط اذا: $\forall a \in A,\ a \geq x$
هنا نقول أن A محدودة من الاسفل

- اذا كانت A محدودة من الاعلى والاسفل في آن واحد، فنقول أن A مجموعة محدودة
أي:

A محدودة $\Leftrightarrow \exists x, X \in E, \forall a \in A,\ x \leq a \leq X$

- نقول أن M من E هو أكبر عنصر من A إذا وفقط إذا:
$(M \in A)$ و $(\forall a \in A,\ a \leq M)$ نرمز إلى هذا العنصر إن وجد بالرمز $max(A)$

- نقول أن m من E هو أصغر عنصر من A إذا وفقط إذا:
$(m \in A)$ و $(\forall a \in A,\ m \leq a)$، نرمز إلى هذا العنصر إن وجد بالرمز $min(A)$

- نقول أن S من E هو الحد الأعلى للمجموعة الجزئية A إذا وفقط إذا كان S أصغر الحواد العليا ونرمز إلى هذا إن وجد بالرمز $\sup(A)$

- نقول أن I من E هو الحد الأدنى للمجموعة الجزئية A إذا وفقط إذا كان I أكبر الحواد الدنيا عن A، ونرمز إلى هذا العنصر إن وجد بالرمز $Inf(A)$

مثال: لدينا

$E = \mathbb{R}$

$A =]1, 3]$

* $[3, +\infty[$ مجموعة الحواد العليا $\Leftarrow$ $\sup A = 3$
* $]-\infty, 1]$ 〃 〃 السفلى $\Leftarrow$ $\inf = 1$
* $Max(A) = 3$ لأن: $(3 \in A)$
* $min(A)$ غير موجود لأن: $1 \notin A$

* المجموعة A محدودة لأنها محدودة من الأعلى ومحدودة من الأسفل

$E = \mathbb{R}$.

$A =]2, +\infty[$

* A لا تقبل مجموعة حواد عليا.
* $]-\infty, 2]$ مجموعة الحواد السفلى $\Leftarrow$ $\inf A = 2$
* $Max(A)$ غير موجود.
* $min(A)$ غير موجود.
* A ليست محدودة لأنها محدودة من الأسفل فقط.

ج- المجالات: ليكن $a,b\in\mathbb{R}$ / $E=\mathbb{R}$

1- نسمي مجالا مفتوحا طرفاه a و b كل جزء من $\mathbb{R}$ بحيث يأخذ أحد الأشكال:

$$]a,b[=\{x\in\mathbb{R} : a<x<b\}$$
$$]a,+\infty[=\{x\in\mathbb{R} : a<x\}$$
$$]-\infty,b[=\{x\in\mathbb{R} : x<b\}$$

ونسمي أيضا مجالا مفتوحا المجموعة التالية: $\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$

2- نسمي مجالا مغلق طرفاه a و b الجزء التالي:

$$[a,b]=\{x\in\mathbb{R} : a\leq x\leq b\}$$

3- نسمي مجالا نصف مفتوح بأحد الأشكال التالية:

$$[a,b[=\{x\in\mathbb{R} : a\leq x<b\}$$
$$]a,b]=\{x\in\mathbb{R} : a<x\leq b\}$$

مثال:

$$[0,+\infty[=\{x\in\mathbb{R} : 0\leq x\}=\mathbb{R}_+$$
$$]-\infty,+\infty[=\{x\in\mathbb{R} : 0\geq x\}=\mathbb{R}_-$$
$$\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$$

ملاحظة: يسمى العدد $b-a$ بطول المجال الذي طرفاه a و b.

نسمي العدد $\frac{a+b}{2}$ بمركز المجال الذي طرفاه a و b.

$$[a,a]=\{a\}=\{a\}$$
$$]a,a]=[a,a[=]a,a[=\emptyset$$

د- القيمة المطلقة: هي تطبيق مرموز له بـ $|\cdot|$ معرف كما يلي:

$$|\cdot| : \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}_+$$
$$x\longmapsto |x|=\begin{cases} x & si\ x\geq 0\\ -x & si\ x<0\end{cases}$$

خواص:

1) $|x|>0,\ (x\neq 0)$
2) $|0|=0$
3) $|x|=|-x|$
4) $|x|\geq x,\ |x|\geq -x$ وعليه يكون $|x|=\max(-x,x)$
5) $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$
6) $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|},\ (y\neq 0)$
7) $|x\pm y|\leq|x|+|y|$
8) $\big||x|-|y|\big|\leq|x\pm y|$
9) $|x|\leq a \Longleftrightarrow -a\leq x\leq a \quad (x\in[-a,a])$
10) $|x|\geq a \Longleftrightarrow x\geq a$ أو $x\leq -a$