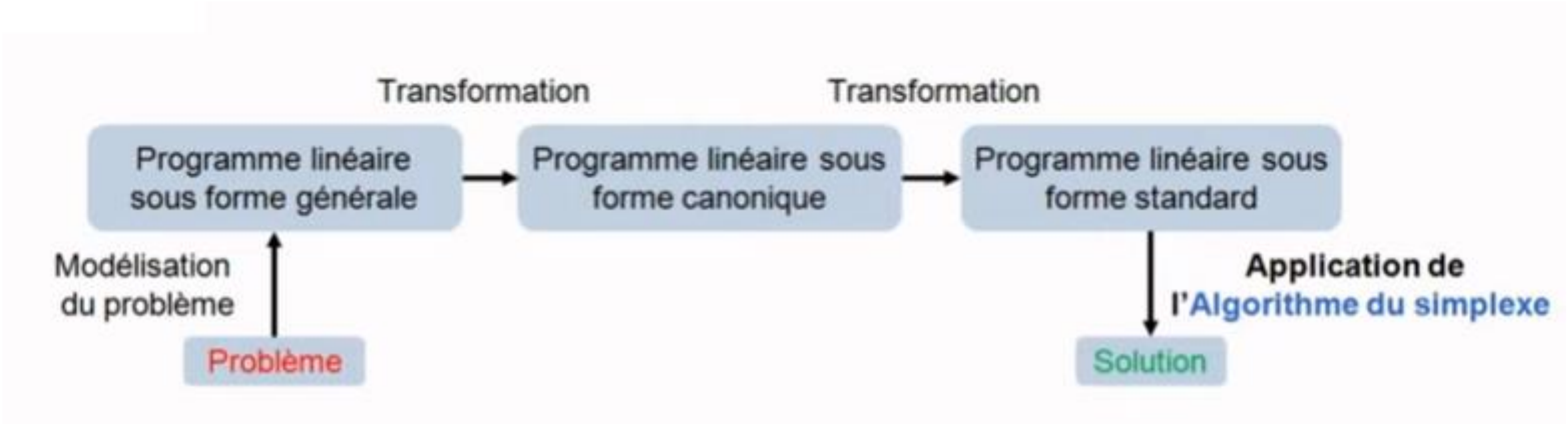
Résolution du problème par la méthode de Simplex



Forme canonique

Tout programme linéaire peut être mis sous forme canonique, c'est à dire un système avec un ensemble d'inéquation et une fonction à optimiser.

Fonction économique → $\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j . x_j$

m: contraintes

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} . x_j \leq b_i, \quad pour \quad 1 \leq i \leq m$$

n: nbre de variables $x_1, \ldots, x_n$

$$x_j \geq 0, \quad pour \quad 1 \leq j \leq n$$

Il y a *m* contraintes propres et *n* contraintes impropres (de positivité), et *n* variables naturelles.
La fonction économique est maximale, s'appelle(nt) solution(s) optimale(s).

Propriétés

Tout programme linéaire peut être mis sous forme canonique.

$$\mathrm{Min}(z) = -\mathrm{Max}\,(-z)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.x_j \geq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} (-a_{ij}).x_j \leq -b_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.x_j = b_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.x_j \leq b_i \\ \sum_{j=1}^{n} (-a_{ij}).x_j \leq -b_i \end{cases}$$

$x_j \leq 0 \Leftrightarrow -x_j \geq 0 \Rightarrow$ changement de variable $x'_j = -x_j$ dans le PL

Si certaines variables n'ont pas de condition de signe, on pose $x_i = x'_i - x''_i$, avec $x'_i \geq 0$ et $x''_i \geq 0$.

Exemple:

Si une variable x_1 est négative, on la remplace par une variable positive $x_1' = -x_1$. Par exemple :

max: $z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3$		max: $z = 3x_1 - 2x_2 - 8x_3'$
sous:		sous:
$5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8$	$\Rightarrow$	$5x_1 - 2x_2 - 4x_3' \leq 8$
$x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25$		$x_1 + 3x_2 - 8x_3' \leq 25$
$9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17$		$9x_1 + 6x_2 + 3x_3' \leq 17$
$x_1, x_2 \geq 0$ et $x_3 \leq 0$		$x_1, x_2, x_3' \geq 0$

Si une variable n’a pas de contrainte de signe, on la remplace par deux variables positives x_1’ et x_1’’ telles que $x_1 = x_1' - x_1''$. Par exemple :

$$\begin{array}{lcl}
\text{max: } z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 & & \text{max: } z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3' - 8x_3'' \\
\\
\text{sous:} & & \text{sous:} \\
5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 & \Rightarrow & 5x_1 - 2x_2 + 4x_3' - 4x_3'' \leq 8 \\
x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 & & x_1 + 3x_2 + 8x_3' - 8x_3'' \leq 25 \\
9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17 & & 9x_1 + 6x_2 - 3x_3' + 3x_3'' \leq 17 \\
x_1 , x_2 \geq 0 & & x_1 , x_2 , x_3' , x_3'' \geq 0
\end{array}$$

Si le programme linéaire a une contrainte de supériorité, on la remplace par une contrainte d’infériorité en inversant le signe des constantes. Par exemple :

$$\begin{array}{lcl}
\text{max: } z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 & & \text{max: } z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 \\
\\
\text{sous:} & & \text{sous:} \\
5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 & \Rightarrow & 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 \\
x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 & & x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 \\
9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \geq 17 & & -9x_1 - 6x_2 + 3x_3 \leq -17 \\
x_1 , x_2 , x_3 \geq 0 & & x_1 , x_2 , x_3 \geq 0
\end{array}$$

Si le programme linéaire a une contrainte d’égalité, on la remplace par deux contraintes équivalentes, l’une d’infériorité, l’autre de supériorité. Les variables du programme doivent satisfaire ces deux contraintes, ce qui revient alors à l’égalité de départ. Par exemple :

$$
\begin{array}{l}
\text{max: } z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 \\
\\
\text{sous:} \\
5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 \\
x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 \\
9x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 17 \\
x_1 , x_2 , x_3 \geq 0
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{l}
\text{max: } z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 \\
\\
\text{sous:} \\
5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 \\
x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 \\
9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17 \\
9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \geq 17 \\
x_1 , x_2 , x_3 \geq 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\text{max: } z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 \\
\\
\text{sous:} \\
5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 \\
x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 \\
9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17 \\
-9x_1 - 6x_2 + 3x_3 \leq -17 \\
x_1 , x_2 , x_3 \geq 0
\end{array}
$$

Forme standard

On introduit des variables dites d'écart. La **forme standard** d’un PL est telle que :

Théorème : tout programme linéaire peut être écrit sous forme canonique ou sous forme standard.

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j . x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} . x_j + x_{n+i} = b_i, \quad pour \quad 1 \leq i \leq m$$

$$x_j \geq 0, \qquad pour \quad 1 \leq j \leq n$$

$$x_{n+i} \geq 0, \qquad pour \quad 1 \leq i \leq m$$

Exemple:

$$\begin{array}{lcl} \text{Max } Z = 4x_1 + 5x_2 & & \text{Max } Z = 4x_1 + 5x_2 + 0\ t_1 + 0\ t_2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 & \text{Forme Standard} \quad \rightarrow & 2x_1 + x_2 + t_1 = 8 \\ x_1 + 2x_2 \leq 7 & & x_1 + 2x_2 + t_2 = 7 \\ x_3 \leq 3 & & x_3 + t_3 = 3 \end{array}$$

Résolution du problème par la méthode de Simplex

Il y a plusieurs manières d’implémenter l’algorithme du simplexe. *La méthode du tableau* est l’une des plus efficaces.

Exemple :

$$\max(z) = 2x_1 + 6x_2$$
$$x_1 + x_2 \leq 80$$
$$x_1 - x_2 \leq 30$$
$$4x_2 - x_1 \leq 160$$

On introduit des variables d’écart :

$$x_1 + x_2 + t_1 = 80$$
$$x_1 - x_2 + t_2 = 30$$
$$4x_2 - x_1 + t_3 = 160$$

0n exprime ensuite les variables d’écart en fonction des variables réelles nulles x1et x2 à l’origine

$$t_1 = 80 - x_1 - x_2$$
$$t_2 = 30 - x_1 + x_2$$
$$t_3 = 160 + x_1 - 4x_2$$

Représentons le problème sous forme du tableau simplexe

	Constantes	x_1	x_2
Z	0	2	6
t_1	80	-1	-1
t_2	30	-1	+1
t_3	160	1	-4

La méthode solution à suivre comprend neuf étapes

Etape 1 :

Localisation de l'élément PIVOT qui se fait en deux étapes :

- Choisir dans la rangée de la fonction objective Z, le plus grand coefficient positif (6), à ce coefficient correspond (La colonne de l'élément PIVOT).

- Considérons les éléments négatifs de la colonne choisie, établir les ratios en valeur absolue entre la constante et l'élément négatif. La rangée de l'élément PIVOT correspond au ratio dont la valeur est la plus petite.

	Constantes	x_1	x_2
Z	0	2	6
t_1	80	-1	-1
t_2	30	-1	+1
t_3	160	1	-4

Abs(80/-1)=80

Abs(160/-4)=40

	Constantes	x_1	x_2
Z	0		
t_1	80		
t_2	30		
t_3	160		-4

Etape 2 :

Les variables identifiant la rangée et la colonne pivot se remplacent mutuellement ($x2$ remplace $t3$)

	Constantes	x_1	t_3
Z			
t_1			
t_2			
x_2			

Etape 3 :

L'élément pivot est remplacé par son inverse multiplicatif :

	Constantes	x_1	t_3
Z			
t_1			
t_2			
x_2			1/-4

Etape 4 :

Les autres éléments de la rangée de l'élément pivot sont divisés par la valeur absolue de l'élément pivot soit 4 :

	Constantes	x_1	t_3
Z			
t_1			
t_2			
x_2	160/4=40	1/4	1/-4

Etape 5 :
Les autres éléments de la colonne de l’élément pivot sont divisés par la valeur algébrique de l’élément pivot soit -4 :

	Constantes	x_1	t_3
Z			6/-4
t_1			-1/-4
t_2			1/-4
x_2	40	1/4	1/-4

Etape 6 :
Pour tous les autres éléments du tableau, nous appliquons la formule :

Nouvel élément = ancien élément – (Produit des 2 coins)/(élément pivot)

	Constantes	x_1	x_2
Z	0	2	6
t_1	80	-1	-1
t_2	30	-1	+1
t_3	160	1	-4

	Constantes	x_1	t_3
Z	240	7/2	6/-4
t_1	40	-5/4	-1/-4
t_2	70	-3/4	1/-4
x_2	40	1/4	1/-4

0-(6/(-4)x160)=240

80-(-1/(-4)x160)=40

30-(1/(-4)x160)=70

0-(6/(-4)x160)=240

2-(6/(-4)x1)=7/2

-1-(-1/(-4)x1)=-3/4

Etape 7 :

Vérifient si la solution obtenue est possible.
Une solution est possible si toutes les valeurs de constantes dans le tableau sont non négatives, dans notre cas la solution est possible.

Etape 8 :

Vérifient si la solution obtenue est optimale.
La solution est optimale si dans la rangée de la fonction objective tous les coefficients des variables sont négatives, c’est n’est pas le cas.

Etape 9 :
On répète les huit étapes précédentes, jusqu'à l'obtention d'une solution optimale.

- Déterminer un nouveau PIVOT :

	Constantes	x_1	t_3
Z	240	7/2	6/-4
t_1	40	-5/4	-1/-4
t_2	70	-3/4	1/-4
x_2	40	1/4	1/-4

	Constantes	t_1	t_3
Z	352	-14/5	-4/5
x_1	32	-4/5	1/5
t_2	46	3/5	-2/5
x_2	48	-1/5	-1/5

- Cette solution est possible puisque toutes les valeurs des constantes sont positives.
- Dans la rangée de la fonction objective les coefficients des variables sont négatives.
- Donc la valeur optimale de Z est 352 lorsque $x1 = 32$ et $x2 = 48$.