Cours 2 : vibrations libres non-amorties (suite)

الدرس 2 : الاهتزازات الحرة الغير متخامدة (تكملة)

4- Equation de « Lagrange »

« Lagrange » (1736-1813) mathématicien Italien proposa une méthode pour la détermination de l'équation de mouvement d'un système vibratoire en vibration libre non-amortie. Cette équation est donnée comme suit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)=0 \qquad (11.1)$$

Où :

- $\dot{q}$: est la vitesse de la masse en mouvement, cette dernière varie selon la trajectoire du mouvement, elle peut être translationnelle ou rotationnelle $(\dot{x}$ ou $\dot{\theta})$.
- q : est le déplacement de la masse en mouvement, il peut être translationnel x ou rotationnel θ .
- L : est Lagrangien ce dernier est définie comme la différence entre l'énergie cinétique (E_C) et l'énergie potentielle (E_P) comme le montre l'équation (12.1)

$$L = E_C - E_P \qquad (12.1)$$

Rappel :

L'Energie cinétique :

Est l'énergie que possède un corps du fait de son mouvement par rapport à un référentiel donné. La formule simplifiée de l'énergie cinétique est donnée pas l'équation (13.1).

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}.m.\dot{x}^2 \qquad (13.1)$$

- m : est la masse du corps en mouvement translationnel,
- v ou $\dot{x}$: est la vitesse du corps en mouvement translationnel,

Pour un mouvement rotationnel l'énergie cinétique d'un corps en rotation sur un axe fixe Δ est donnée par l'équation (14.1).

$$E_C = \frac{1}{2}.I_\Delta.\dot{\theta}^2 \qquad (14.1)$$

- I_Δ : est le moment d'inertie rotationnelle d'un corps par rapport à un axe de rotation Δ
- $\dot{\theta}$: est la vitesse angulaire du corps en mouvement,

Pour un corps qui tourne autour d'un axe autre que son centre de gravité Δ', on utilise le théorème de « Huygens » qui est donné par la formule (15.1).

$$I_{\Delta'} = I_{\Delta} + m.a^2 \quad (15.1)$$

- I_{Δ} : est le moment d'inertie du corps par rapport a son centre de gravité,
- m : est la masse du corps en mouvement (rotation),
- a : est la distance entre le centre de gravité et le centre de rotation,

<u>Moments d'inertie de quelques systèmes</u>

Moment d'inertie d'un disque	$I_{\Delta} = \frac{1}{2}m.R^2$	عزم عطالة الأسطوانة
Moment d'inertie d'une barre	$I_{\Delta} = \frac{1}{12}m.l^2$	عزم عطالة الساق
Moment d'inertie d'un pendule	$I_{\Delta} = m.l^2$	عزم عطالة النواس

- R : est le rayon du disque,
- l : est la longueur de la barre ou du pendule,
- m : est la masse du disque/ la barre/ la masse du pendule,

L'Energie potentielle :

L'énergie potentielle d'un système physique est l'énergie liée à une interaction, qui a le potentiel de se transformer en d'autres énergies, le plus souvent en énergie cinétique, plusieurs types d'énergies potentielles existent dans la nature.

- Energie potentielle mécanique,
- Energie potentielle gravitationnelle,
- Energie potentielle de pesanteur,
- Energie potentielle élastique,
- Energie potentielle électrostatique,

Dans notre domaine en l'occurrence le génie civil en fait face à deux types d'énergies potentielles :

a) L'énergie potentielle de pesanteur E_{PP}

$$E_{PP} = \pm m.g.h \quad (16.1)$$

- m : est la masse du corps en mouvement,
- g : est la gravité terrestre $(g \approx 9.81\ m/s^2)$,
- h : est la position du centre de gravité par rapport au repère du mouvement,

b) L'énergie potentielle élastique E_{PE}

$$E_{PE} = \frac{1}{2}.k.(\Delta l \pm x)^2 \qquad (17.1)$$

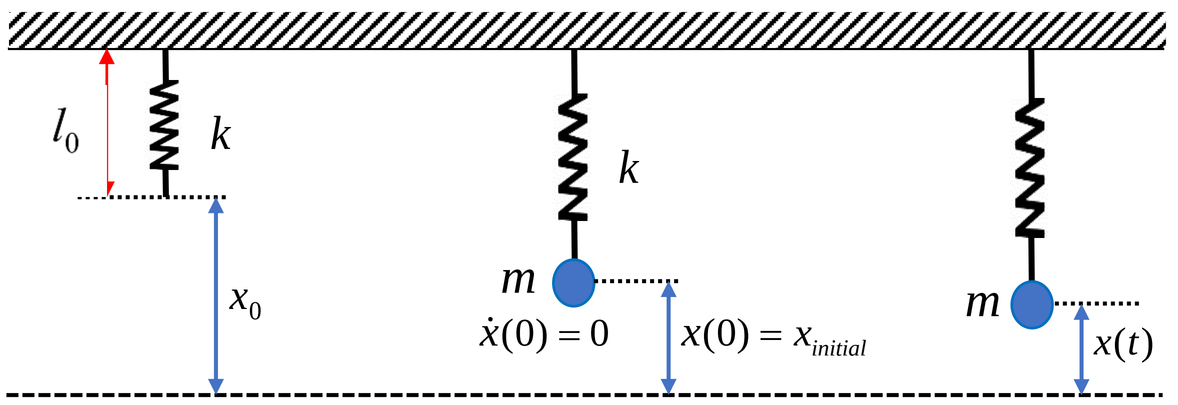
- k : est la rigidité du ressort,
- Δl : est l'élongation initiale du ressort du à la suspension d'un masse donnée,

On revient à notre exemple du premier cours :

Soit le système représenté dans la figure (1-a), on prend un ressort avec une longueur au repos (l_0) fixé au plafond, on suspend une masse (m) à la 2éme extrémité du ressort comme le montre la figure (1-b), pendant la suspension de la masse (m) le ressort est élongé, à l'instant $(t=0)$ la masse est relâchée sans vitesse initiale $\dot{x}(0)=0$ et commence a oscillé verticalement comme le montre la figure (1-c).

نأخذ نابض في وضع الراحة استطالته (l_0) كما هو مبين في الشكل (1-أ) حيث النابض معلق في السقف، نعلق كتلة (m) في الطرف الثاني للنابض كما هو مبين في الشكل (1-ب)، خلال تعليق الكتلة يسحب النابض بمقدار معين، في اللحظة $(t=0)$ تترك الكتلة حرة بدون سرعة $\dot{x}(0)=0$ ابتدائية وتبدأ في الاهتزاز افقيا كما هو مبين في الشكل (1-ج).

Ressort au repos	$t=0$ (avant de relacher la masse)	Temp variable



Repère du mouvement $(x(t)=0)$ ou les forces du ressort et de la gravité sont égales en quantité et opposées en directions.

Figure -1-	-1- الشكل

- On a :

➢ L'énergie cinétique (pour un mouvement translationnel)

$$E_C = \frac{1}{2}m.\dot{x}^2 \qquad (18.1)$$

➢ L'énergie potentielle

$$E_P = E_{PE} + E_{PP} \qquad (19.1)$$

$$E_P = \frac{1}{2}.k.(x_0 - x)^2 - m.g.h \quad (20.1)$$

La variation de h est dans le sens du mouvement donc on peut la remplacer par x, l'équation de l'énergie potentielle devient donc :

$$E_P = \frac{1}{2}.k.(x_0 - x)^2 - m.g.x \quad (21.1)$$

L'équation (21.1) contient un inconnu qu'il faut éliminer en l'occurrence x_0. Pour cela on utilise la condition d'équilibre.

Rappel :
La condition d'équilibre stipule que la dérivée partielle de l'équation d'équilibre par rapport au déplacement quand le corps est à la position d'équilibre est nulle comme le montre l'équation (22.1).

$$\left.\frac{\partial E_P}{\partial q}\right|_{q=0} = 0 \quad (22.1)$$

Pour un mouvement translationnel l'équation (22.1) devient :

$$\left.\frac{\partial E_P}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \quad (23.1)$$

Donc en appliquant la condition d'équilibre (23.1) sur l'équation de l'énergie potentielle de notre système (21.1) on obtient.

$$\frac{\partial E_P}{\partial x} = k.(x_0 - x) - m.g \quad (24.1)$$

A la position d'équilibre $(\text{ou } x = 0)$ on trouve :

$$\left.\frac{\partial E_P}{\partial x}\right|_{x=0} = k.x_0 - mg = 0 \quad (25.1)$$

De l'équation (25.1) on déduit que l'élongation initiale du ressort peut être supprimée simultanément avec l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur seulement et seulement si l'énergie potentielle de pesanteur cause l'élongation initiale.

Donc l'expression de l'énergie potentielle devient une expression réduite donnée comme suit :

$$E_P = \frac{1}{2}.k.x^2 \quad (26.1)$$

En remplace l'équation de l'énergie cinétique (18.1) et l'équation de l'énergie potentielle réduite (26.1) dans l'équation de Lagrangien (12.1). On obtient :

$$L = E_C - E_P \tag{27.1}$$

$$L = \frac{1}{2}.m.\dot{x}^2 - \frac{1}{2}.k.x \tag{28.1}$$

L’équation de Lagrange deviens donc :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = 0 \tag{29.1}$$

- *Nota : La dérivation partielle est la dérivation d’une équation avec plusieurs variables par rapport à un seul variable en considérant les autres variables comme constants.*

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m.\dot{x} \tag{30.1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}(m.\dot{x}) = m.\ddot{x} \tag{31.1}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = -k.x \tag{32.1}$$

On remplace les équations (31.1) et (32.1) dans l’équation de Lagrange (29.1), on obtient

$$m.\ddot{x} - (-k.x) = 0 \tag{33.1}$$

$$m.\ddot{x} + k.x = 0 \tag{34.1}$$

On devise par m

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}.x(t) = 0 \tag{35.1}$$

On obtient ainsi une équation de mouvement similaire à celle obtenue dans le cours précédent et donnée par l’équation (10.1), qui est une équation différentielle du second ordre sans second membre.