جامعة محمد خيضر بسكرة
قسم علوم المادة

مقياس : رياضيات I

حلول السلسلة رقم 2

حــل التمرين 1

(1) العلاقة ليست انعكاسية ، لأن 1 ليس لها علاقة بنفسها. في الواقع ، $-1 \neq 1$.

العلاقة تناظرية ، لأن $x = -y \Longleftrightarrow y = -x$.

إنها ليست ضد تناظرية ، لأن $1\mathscr{R}(-1)$ و $(-1)\mathscr{R}1$ ، بينما $1 \neq -1$.

إنها ليست متعدية ، وإلا فإنها ستكون متناظرة

ومنه هذه العلاقة ليست علاقة تكافؤ ، ولا علاقة ترتيب.

حــل التمرين 2

العلاقة $\mathscr{R}$ هي علاقة تكافؤ لأنها:

(1) إنعكاسية لأن $x = x$ مهما يكن x ومنه $(x, y)\mathscr{R}(x, y)$

(2) تناظرية: إذا كان $(x, y)R(x', y')$ فإن $x = x'$ الذي يمكن كتابته أيضا $x' = x$ الذي يكافئ $(x', y')\mathscr{R}(x, y)$.

(3) متعدية: إذا كان $(x, y)R(x', y')$ و $(x', y')R(x'', y'')$ فإن $x = x'$ من جهة و $x' = x''$ من جهة أخرى، يعني $x = x''$ الذي ينتج لنا $(x, y)R(x'', y'')$.

نبحث الآن عن صنف تكافؤ العنصر (x_0, y_0) أي تحديد الثنائيات (x, y) التي تحقق $(x, y)\mathscr{R}(x_0, y_0)$.

لدينا

$$(x, y)\mathscr{R}(x_0, y_0) \Longrightarrow x = x_0.$$

ونستطيع أن نقول أيضا أن x يجب أن يساوي x_0 أما y يكون أي قيمة.
نستنتج أن صنف تكافؤ العنصر (x_0, y_0) هو المجموعة

$$\{(x_0, y); y \in \mathbb{R}\}.$$

حـــل التمرين 3

(1) نلاحظ أن

$$x\mathscr{R}y \iff x^2-x=y^2-y \iff f(x)=f(y)$$

حيث $f:x\mapsto x^2-x$ ، من السهل بعد ذلك التحقق من خلال هذا تطبيق أن $\mathscr{R}$ هي علاقة تكافؤ ، أي أنها انعكاسية وتناظرية ومتعدية.

(2) ليكن $x\in\mathbb{R}$. نبحث عن العناصر y من $\mathbb{R}$ حيث $x\mathscr{R}y$.

لذلك يجب علينا حل المعادلة (في y)

$$x^2-y^2=x-y.$$

باستعمال

$$(x-y)(x+y)-(x-y)=0 \iff (x-y)(x+y-1)=0.$$

(3) حولها المعادلة هي $y=x$ و $y=1-x$. وبالتالي فإن صنف تكافؤ x هو المجموعة $\{x,1-x\}$. وهي مكونة من عنصرين.

إذا كان $x=1-x \Longrightarrow x=1/2$. في هذه الحالة ، صنف تكافؤ العنصر x هو المجموعة $\{1/2\}$.