جامعة محمد خيضر بسكرة
قسم علوم المادة

مقياس : رياضيات I

حلول السلسلة رقم 1

حــل تمرين 1 :

لدينا

$$A = \{2, 3, 4, 5, 6\}.$$

لكتابة B ، نلاحظ أن

$$1/2 \leq n \leq 7/2 \Rightarrow n = 1, 2 \text{ أو } 3.$$

لكل قيمة محتملة لـ n ، نكتب القيم المحتملة لـ p ، ونحصل على:

$$B = \left\{1, 2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right\}.$$

نلاحظ أنه لم نكتب عدة مرات 1 ، والتي تم الحصول عليها أيضا بـ $2/2$ و $3/3$ ، ولا عدة مرات 2، والتي حصلنا عليها بـ $2/1$ و $4/2$ و $6/3$.

حــل تمرين 2 :

لا! نأخذ مثلا $A = \{1, 2\}$، $B = \{3, 4\}$ و $C = \{2, 3\}$.

حــل تمرين 3 :

1) خطأ لأن $g \in B$ وبالتالي $g \notin \overline{B}$.

2) خطأ لنفس السبب.

3) صحيح لأن $g \in \overline{A}$.

4) لا لأن $f \in A$.

5) خطأ لأن $e \in A$.

6) يرجع هذا إلى إثبات أن $h \notin \overline{A} \cap \overline{B}$ و $b \in \overline{A} \cap \overline{B}$: و هذا خطأ.

7) يرجع هذا إلى إثبات أن $a \in A \cup C$ و $f \in A \cup C$: و هذا صحيح.

حــــل تمرين 4 :

ليكن $x \in A$. **ومنه** $x \in A \cup B$ ، **وبالتالي** $x \in B \cap C$، **أي أن،** $x \in B$ ، **وبالتالي** $A \subset B$.
الآن نأخذ $x \in B$. **ومنه** $x \in A \cup B$ ، **وبالتالي** $x \in B \cap C$، **أي أن** ، $x \in C$ ، **وبالتالي** $B \subset C$.

حــــل تمرين 5 :

في كل مرة سنبرهن بالإحتواء المزدوج.

1) **ليكن** $x \in (A \cap B) \cup C$، **ومنه** $x \in A$ **و** $x \in B$ **أو** $x \in C$. **إذا كان** $x \in A$ **و** $x \in B$ ، **فإن** $x \in A \cup C$ **و** $x \in B \cup C$ ، **ويتم إثبات الإحتواء. بخلاف ذلك ، يكون** $x \in C$ **فقط ، وفي هذه الحالة لدينا أيضا** $x \in A \cup C$ **و** $x \in B \cup C$.

   بالمقابل ، إذا كان $x \in A \cup C$ **و** $x \in B \cup C$ ، **فإننا نميز بين حالتين: إذا كان** $x \in C$ ، **ومنه** $x \in (A \cap B)$ **أو** $x \in C$ **وبالتالي** $x \in (A \cap B) \cup C$. **خلاف ذلك ،** $x \notin C$. **ولكن ، بما أن** $x \in A \cup C$، **يصبح لدينا** $x \in A$. **وبالمثل، بما أن** $x \in B \cup C$، **فإن** $x \in B$. **هذا يثبت أن** $x \in A \cap B$ **وبالتالي** $x \in (A \cap B) \cup C$.

2) **ليكن** $x \in (A^c)^c$. **ومنه** $x \notin A^c$ ، **وبالتالي** $x \in A$. **بالمقابل ، إذا كان** $x \in A$ ، **فإن** $x \notin A^c$ **وبالتالي** $x \in (A^c)^c$.

3) **ليكن** $x \in (A \cap B)^c$. **ثم** $x \notin A \cap B$. **إذن لدينا** $x \notin A$ **أو** $x \notin B$ ، **أي أن** $x \in A^c$ **أو** $x \in B^c$. **نستنتج أن** $x \in A^c \cup B^c$. **بالمقابل ، ليكن** $x \in A^c \cup B^c$. **إذن** $x \in A^c$ **أو** $x \in B^c$ ، **أي أن** ، $x \notin A$ **أو** $x \notin B$. **على وجه الخصوص ،** $x \notin A \cap B$ **وبالتالي** $x \in (A \cap B)^c$.

4) **يمكننا أيضاً تقديم المنطق السابق في نموذج التكافؤ**

$$\begin{aligned}
x \in (A \cup B)^c &\iff x \notin A \cup B \\
&\iff x \notin A \text{ و } x \notin B \\
&\iff x \in A^c \text{ و } x \in B^c \\
&\iff x \in A^c \cap B^c.
\end{aligned}$$

حـــل تمرين 6 :

1) من خلال تناظر القضية في A و B، يكفي إثبات أن $A \subset B$.
ليكن $x \in A$ ونفرض أن $x \notin B$. ومنه فإن $x \in A \cup B$ ولكن $x \notin A \cap B$ وبالتالي فإن المجموعتين $A \cap B$ و $A \cup B$ مختلفتان ، وهذا تناقض. لذلك فإن $x \in B$.

2) من خلال تناظر القضية في B و C ، يكفي إثبات أن $B \subset C$.
ليكن $x \in B$. نميز هنا حالتين:

$A)$ إما $x \in A$، في هذه الحالة ، $x \in A \cap B = A \cap C$ ، وبالتالي $x \in C$.

$B)$ أو $x \notin A$، في هذه الحالة ، $x \in A \cup B = A \cup C$ وبالتالي $x \in A$ أو $x \in C$. نظرًا لأننا في الحالة $x \notin A$ ، فإننا نستنتج أن $x \in C$.

في جميع الحالات ، أثبتنا $x \in C$ ، وبالتالي $B \subset C$. شرط واحد غير كافي.

إذا افترضنا فقط أن $A \cup B \subset A \cup C$ ، علينا فقط أن نأخذ المثال التالي لكي نبرهن ضرورة الشرطين معا.
ليكن $A = \{1, 2\}$ ، $B = \{1\}$ و $C = \{2\}$.
لدينا $A \cup B \subset A \cup C$ ، لكن ليس لدينا $B \subset C$.

إذا افترضنا فقط أن $A \cap B \subset A \cap C$ ، علينا أن نأخذ فقط كمثال $A = C = \{1\}$ و $B = \{1, 2\}$.

حـــل تمرين 7 :

(0) عنصر: لا يوجد سوى المجموعة الخالية:

$$\phi$$

(1) عنصر: هناك 4 فرديات:

$$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$$

(2) من العناصر: هناك 6 أجزاء من عنصرين:

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}.$$

(3) عناصر: هناك 4 أجزاء من 3 عناصر:

$$\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\}.$$

(4) عناصر: يوجد جزء واحد فقط به 4 عناصر: هو المجموعة E نفسها.
لذا فإن مجموعة أجزاء E تتكون من $4^2=16$ عنصراً.

حـــل تمرين 8 :

سنبرهن الإحتواء المزدوج.

لتكن $(x,y)\in(A\times B)\cap(C\times D)$. ومنه $(x,y)\in A\times B$ وبالتالي $x\in A$ ، $y\in B$.
لدينا أيضا $(x,y)\in(C\times D)$، وبالتالي $x\in C$ و $y\in D$. لذا ، $x\in A\cap C$ و $y\in B\cap D$.
هذا يثبت أن $(x,y)\in(A\cap C)\times(B\cap D)$.
بالمقابل ، لتكن $(x,y)\in(A\cap C)\times(B\cap D)$ يعني أن $x\in A\cap C$ وبالتالي $x\in A$ و $x\in C$.

وبالمثل، $y\in B\cap D$ ، لذا $y\in B$ و $y\in D$. إذن ، $(x,y)\in A\times B$ و $(x,y)\in C\times D$.
نستنتج أن $(x,y)\in(A\times B)\cap(C\times D)$.

حـــل تمرين 9 :

نذكر أولا أن الفرق التناظري يمكن كتابته ايضا على الشكل

$$A\Delta B=(A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B)$$

حيث $\bar{A}$ تمثل متمم المجموعة A في E.
هناك إحتواء سهل:
إذا كان $A=\phi$ ، فعند تعريف الفرق التناظري، لدينا $A\cap B=B$ و لأن $A=\phi$ و $\bar{A}\cap B=B$.
بالمقابل ، إذا كان $A\cap B=B$ ، يجب أن نثبت أن $A=\phi$.
سنقسم الإثبات إلى قسمين:
أولا: نثبت أن $A\cap B=\phi$

ليكن $x\in B$، و على وجه الخصوص $x\in A\cap B$ ، و يعني حتما أن $x\in A\cap\bar{B}$ أو $x\in\bar{A}\cap B$.
الاحتمال الأول مستحيل (لأن $x\in B$) وبالتالي لدينا الإحتمال الثاني هو الصحيح $x\in\bar{A}\cap B$. وبالتالي ، فإن كل عنصر من عناصر من المجموعة B موجود أيضا في $\bar{A}$ ، وبالتالي $A\cap B=\phi$.

سنثبت أيضًا أن $A \cap \bar{B} = \phi$.

في الواقع ، لنفرض أنه يمكننا إيجاد عنصر في $A \cap \bar{B}$. سيكون هذا العنصر أيضا في $A \cap B = B$ ، وهو أمر مستحيل لأنه سيكون في الوقت نفسه في B و $\bar{B}$.

في الأخير، المواجهة بين الخاصيتين السابقتين يعني أن $A = \phi$.