النموذج الثنائي:

من الظواهر المهمة المصاحبة لمسائل البرمجة الخطية نموذج الثنائية و التي تعرف بتحويل نموذج البرمجة الخطية الأولي إلى نموذج الثنائية، و يختص هذا الأخير بسهولة حله عند حصول أي تغير في معاملات و إتاحة المتغيرات في النموذج الأولي بعد صياغته و حله، و تستخدم هذه الخاصية في تسهيل ظاهرة الحساسية لنموذج البرمجة الخطية.

يقترن أي نموذج أصلي ($Primal$) عادة بنموذج آخر يطلق عليه النموذج المرافق ($Dual$) (المقابل/الثنائي)، من أهم فوائده تسهيل إيجاد الحل الأمثل خصوصا عندما يصعب حل النموذج الأصلي.

1- تعريف النموذج الثنائي:

تشير هذه النظرية إلى أن لكل نموذج من نماذج التعظيم نموذجا مقابلا (ثنائيا) يمثل نموذج تدنية التكاليف، و أن هناك صفة مشتركة ما بين النموذجين تتمثل في أن الحل الأمثل لأحدهما يعطي الحل الأمثل للنموذج الآخر.

2- خطوات تشكيل النموذج الثنائي:

يمكن تلخيص خطوات تحويل النموذج الأصلي إلى نموذج ثنائي بالشكل التالي:

- عندما يكون النموذج الأصلي يعبر عن مشكلة الوصول إلى أقصى قيمة Max فإنه يتحول إلى الوصول إلى أدنى قيمة Min عند إعداد النموذج الثنائي، و العكس صحيح؛
- الموارد المتاحة و المذكورة في الجانب الأيسر لقيود النموذج الأصلي تصبح معاملات دالة الهدف في النموذج الثنائي؛
- معاملات متغيرات دالة الهدف في النموذج الأصلي تصبح قيم الجانب الأيسر في النموذج الثنائي؛
- تُحول أعمدة النموذج الأصلي إلى صفوف في النموذج الثنائي؛
- كلا النموذجين متحرران من مبدأ السلبية لكافة المتغيرات (إضافة شرط عدم سلبية المتغيرات).

إضافة إلى ذلك نقوم بـ:

- تحويل اتجاه المتباينات من النموذج الأصلي إلى النموذج المقابل ($\leq$ تصبح $\geq$ و العكس)؛
- تغيير ترميز المتغيرات من النموذج الأصلي إلى النموذج المرافق ($x_1 \ldots x_n$ تصبح $y_1 \ldots y_n$).

و بناء على ذلك يصبح عدد متغيرات النموذج الثنائي مساويا لعدد قيود البرنامج الأولي.

و عليه تكون الصيغ القانونية للنموذجين الأولي و الثنائي كما يلي:

$$\begin{array}{l} Max\ Z = C'x \\ s/c \begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} Min\ W = b'y \\ s/c \begin{cases} A'y \geq C \\ y \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

و للتوضيح أكثر سوف نأخذ المثال التالي:

مثال 01: ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\ Z = 100\,x_1+200\,x_2+300\,x_3$$
$$\text{Soumise aux contraintes}$$
$$\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3 \le 1000 \\ 5x_1+5x_2+7x_3 \le 1500 \\ 8x_1+9x_2+4x_3 \le 2000 \\ 5x_1+2x_2+x_3 \le 2500 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن النموذج يحتوي على 3 متغيرات و التي تمثل 3 أنواع من المنتجات، تعتمد المؤسسة في إنتاج هذه المنتجات على 4 موارد متاحة، حيث أنها تسعى من خلال هذه العملية إلى تعظيم الأرباح المترتبة عن بيع هذه المنتجات، في المقابل سيسعى مشتري هذه المنتجات إلى تدنية تكاليف شرائها مع تحفيز صاحب المؤسسة على البيع، فتصبح دالة الهدف الخاصة بهذا المشتري من نوع تدنية:

$$Min\ W = 1000\,y_1+1500\,y_2+2000\,y_3+2500\,y_4$$

حيث تمثل (y_1, y_2, y_3, y_4) أسعار المواد الأولية.

في الوقت نفسه ستقوم المؤسسة ببيع المنتجات في حال ما إذا كان العائد المحقق من بيعها أكبر من العائد على الإنتاج، فتصاغ هذه العملية كما يلي:

$$\begin{cases} 2y_1+5y_2+8y_3+5y_4 \ge 100 \\ y_1+5y_2+9y_3+2y_4 \ge 200 \\ 4y_1+7y_2+4y_3+4y_4 \ge 300 \end{cases}$$

و عليه فإن النموذج المرافق للنموذج الأولي أعلاه يكون من الشكل:

$$Min\ W = 1000\,y_1+1500\,y_2+2000\,y_3+2500\,y_4$$
$$\text{Soumise aux contraintes}$$
$$\begin{cases} 2y_1+5y_2+8y_3+5y_4 \ge 100 \\ y_1+5y_2+9y_3+2y_4 \ge 200 \\ 4y_1+7y_2+4y_3+4y_4 \ge 300 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0 \end{cases}$$

أما في حالة نماذج التدنية فيكون برنامج الثنائية كما يلي:

النموذج الثنائي	النموذج الأولي
$Min\ W = 100\,y_1+150\,y_2+220\,y_3$ Soumise aux contraintes $\begin{cases} 7y_1+2y_2+3y_3 \le 5 \\ 6y_1+4y_2+9y_3 \le 6 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}$	$Max\ Z = 5\,x_1+6\,x_2$ Soumise aux contraintes $\begin{cases} 7x_1+6x_2 \le 100 \\ 2x_1+4x_2 \le 150 \\ 3x_1+9x_2 \le 220 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

3– القواعد الأساسية لتشكيل النموذج الثنائي:

نسعى من خلال هذه المرحلة إلى التعرف على مجموعة من القواعد و التي تستخدم عادة في تشكيل البرنامج الثنائي للنماذج الأصلية التي لا تكون في صورتها النموذجية (القانونية).

3–1– الحالة الأولى: ظهور القيد *i* بإشارة $\geq$ في نموذج *Max*:

لتوضيح هذه الحالة، سوف نتناولها في شكل مثال.

مثال 02: ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\ Z = 5x_1 + 4x_2 + 9x_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 100 \\ 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 200 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن القيد الثاني لا يحقق شرط الشكل النموذجي للنموذج أعلاه، لذا وجب تحويله إلى متراجحة من الشكل **أقل أو تساوي** بضرب طرفيها في القيمة (-1)، فيصبح:

$$-7x_1 - 4x_2 - 3x_3 \leq -200$$

و عليه يصبح النموذج الثنائي كالتالي:

$$Min\ W = 100\, y_1 - 200\, \mathbf{y'_2}$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 2y_1 - 7\mathbf{y'_2} \geq 5 \\ 3y_1 - 4\mathbf{y'_2} \geq 4 \\ 8y_1 - 3\mathbf{y'_2} \geq 9 \\ y_1 \geq 0, \mathbf{y'_2} \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن القيد الثاني و بعد تعديله، لم يحافظ على إشارة بعض من معاملات النموذج الأصلي، و للمحافظة على إشارات النموذج الأولي نضع: $\mathbf{y_2} = -\mathbf{y'_2}$

فيصبح الشكل النهائي للنموذج الثنائي كما يلي:

$$Min\ W = 100\, y_1 + 200\, \mathbf{y_2}$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 2y_1 + 7\mathbf{y_2} \geq 5 \\ 3y_1 + 4\mathbf{y_2} \geq 4 \\ 8y_1 + 3\mathbf{y_2} \geq 9 \\ y_1 \geq 0, \mathbf{y_2} \leq \mathbf{0}, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

و عليه فإن ظهور القيد رقم i بإشارة أكبر أو تساوي $\geq$ في نموذج التعظيم الأولي (Max) يؤثر على المتغيرة رقم i فتكون أقل أو تساوي الصفر في نموذج التدنية الثنائي($y_i \leq 0$).

3-2- الحالة الثانية: ظهور القيد i بإشارة $=$ في نموذج Max:

سنقوم بتوضيح هذه الحالة، في المثال أدناه.

مثال 03: ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\ Z = 120\ x_1 + 240\ x_2$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \leq 60 \\ 3x_1 + 4x_2 = 50 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن القيد الثاني لا يحقق شرط الشكل النموذجي للنموذج أعلاه كونه مكتوبا في صورة معادلة، لذا وجب تحويله إلى متراجحتين إحداهما أقل أو تساوي و الأخرى أكبر أو تساوي، فيصبح:

$$3x_1 + 4x_2 \leq 50$$
$$3x_1 + 4x_2 \geq 50$$

و بما أن المتراجحة الثانية تحقق هي الأخرى شرط الشكل النموذجي لنموذج التعظيم فيجب هي الأخرى تعديلها و ذلك بضرب طرفيها في (-1) لتصبح من الشكل:

$$-3x_1 - 4x_2 \leq -50$$

و بناء على ذلك يصبح الشكل النموذجي للنموذج الأولي كما يلي:

$$Max\ Z = 120\ x_1 + 240\ x_2$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \leq 60 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 50 \\ -3x_1 - 4x_2 \leq -50 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

و عليه يمكن استنتاج النموذج الثنائي للنموذج أعلاه، فيكون كما يلي:

$$\begin{array}{l} Min\ W = 60\,y_1 + 50\,y'_2 - 50\,y''_2 \\ Soumise\ aux\ contraintes \\ \begin{cases} 2y_1 + 3\,y'_2 - 3\,y''_2 \geq 120 \\ 6y_1 + 4\,y'_2 - 4\,y''_2 \geq 240 \\ y_1 \geq 0,\ y'_2 \geq 0,\ y''_2 \geq 0 \end{cases} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} Min\ W = 60\,y_1 + 50(y'_2 - y''_2) \\ Soumise\ aux\ contraintes \\ \begin{cases} 2y_1 + 3(y'_2 - y''_2) \geq 120 \\ 6y_1 + 4(y'_2 - y''_2) \geq 240 \\ y_1 \geq 0,\ y'_2 \geq 0,\ y''_2 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

ما يلاحظ أن النموذج المقابل يحتوي على 3 متغيرات في حين أنه من المفروض وجود متغيرتين فقط باعتبار أن النموذج الأصلي يحتوي على قيدين فقط، لذلك وجب علينا تعديل البرنامج المرافق و ذلك بوضع:

$$y'_2 - y''_2 = y_2$$

فيصبح الشكل النهائي للنموذج المرافق كما يلي:

$$\begin{array}{l} Min\ W = 60\,y_1 + 50\,y_2 \\ Soumise\ aux\ contraintes \\ \begin{cases} 2y_1 + 3y_2 \geq 120 \\ 6y_1 + 4y_2 \geq 240 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \in R \end{cases} \end{array}$$

و وفقا لذلك قد تكون:

- ❖ $y_2 > 0$ إذا كانت: $y'_2 > y''_2$
- ❖ $y_2 < 0$ إذا كانت: $y'_2 < y''_2$
- ❖ $y_2 = 0$ إذا كانت: $y'_2 = y''_2$

و عليه فإن ظهور القيد رقم i بإشارة تساوي (=) في نموذج التعظيم الأولي (Max) يؤثر على المتغيرة رقم i فتكون غير محددة الإشارة في نموذج التدنية الثنائي ($y_i \in R$).

3-3- الحالة الثالثة: ظهور متغيرة j غير محددة الإشارة ($x_j \in R$):

لتوضيح هذه الحالة، سنتناول المثال أدناه.

مثال 04: ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\begin{array}{l} Max\ Z = 11\,x_1 + 32\,x_2 \\ Soumise\ aux\ contraintes \\ \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 130 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 210 \\ 7x_1 + 9x_2 \leq 90 \\ x_1 \in R,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

ما يلاحظ من النموذج أعلاه أنه ليس في شكله النموذجي باعتبار أن المتغيرة الأولى غير محددة الإشارة لذا وجب تعديله، بتعويض المتغيرة الأولى بفرق متغيرتين($x_2 = x'_2 - x''_2$)، ليصبح كما يلي:

$$\begin{array}{l} Max\ Z = 11(x'_1 - x''_1) + 32\,x_2 \\ \text{Soumise aux contraintes} \\ \begin{cases} 2(x'_1 - x''_1) + 5x_2 \le 130 \\ 4(x'_1 - x''_1) + 3x_2 \le 210 \\ 7(x'_1 - x''_1) + 9x_2 \le 90 \\ x'_1 \ge 0,\ x''_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{cases} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} Max\ Z = 11x'_1 - 11x''_1 + 32\,x_2 \\ \text{Soumise aux contraintes} \\ \begin{cases} 2x'_1 - 2x''_1 + 5x_2 \le 130 \\ 4x'_1 - 4x''_1 + 3x_2 \le 210 \\ 7x'_1 - 7x''_1 + 9x_2 \le 90 \\ x'_1 \ge 0,\ x''_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{cases} \end{array}$$

و عليه يصبح شكل النموذج الثنائي للنموذج الأولي أعلاه كما يلي:

$$\begin{array}{l} Min\ W = 130\,y_1 + 210y_2 + 90y_3 \\ \text{Soumise aux contraintes} \\ \begin{cases} 2y_1 + 4y_2 + 7y_3 \ge 11 \\ -2y_1 - 4y_2 - 7y_3 \ge -11 \\ 5y_1 + 3y_2 + 9y_3 \ge 32 \\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0 \end{cases} \end{array}$$

سبق و أن تمت الإشارة إلى أن عدد متغيرات النموذج الأولي يجب أن تكون مساوية لعدد قيود النموذج المرافق، و هذا ما لا يحققه النموذج أعلاه، لذا وجب علينا تعديله بضرب القيد الثاني في (− 1)، و ذلك بغية كتابة القيدين الأول و الثاني في شكل مساواة، فيصبح الشكل النهائي للنموذج الثنائي كما يلي:

$$\begin{array}{l} Min\ W = 130\,y_1 + 210y_2 + 90y_3 \\ \text{Soumise aux contraintes} \\ \begin{cases} 2y_1 + 4y_2 + 7y_3 \ge 11 \\ \mathbf{2y_1 + 4y_2 + 7y_3 \le 11} \\ 5y_1 + 3y_2 + 9y_3 \ge 32 \\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0 \end{cases} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} Min\ W = 130\,y_1 + 210y_2 + 90y_3 \\ \text{Soumise aux contraintes} \\ \begin{cases} \mathbf{2y_1 + 4y_2 + 7y_3 = 11} \\ 5y_1 + 3y_2 + 9y_3 \ge 32 \\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0 \end{cases} \end{array}$$

وعليه فإن ظهور المتغيرة رقم j غير محددة الإشارة $(y_i \in R)$ في نموذج التعظيم الأولي (Max)، يؤثر على القيد رقم j فيظهر بالإشارة (=) في نموذج التدنية الثنائي.

3-4- الحالة الرابعة: وجود متغيرة j أقل أو تساوي $(x_j \le 0)$:

لتوضيح هذه الحالة، سوف نتناولها في شكل مثال.

مثال 05: ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\ Z = 15x_1 + 13x_2 + 23x_3$$
$$\text{Soumise aux contraintes}$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 8x_3 \leq 210 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 240 \\ 6x_1 + 7x_2 + 6x_3 \leq 160 \\ \boldsymbol{x_1 \leq 0},\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

يلاحظ أن النموذج أعلاه غير مكتوب في شكله النموذجي باعتبار أن المتغيرة الأولى أقل أو تساوي الصفر، و لذلك وجب تعديل النموذج بحيث نضع: $\boldsymbol{x_1 = -x'_1}$ فيصبح الشكل النموذجي كما يلي:

$$Max\ Z = -15x'_1 + 13x_2 + 23x_3$$
$$\text{Soumise aux contraintes}$$
$$\begin{cases} -4x'_1 + 2x_2 + 8x_3 \leq 210 \\ -3x'_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 240 \\ -6x'_1 + 7x_2 + 6x_3 \leq 160 \\ \boldsymbol{x'_1 \geq 0},\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

و بناء عليه يصبح شكل النموذج الثنائي كما يلي:

$$Min\ W = 210y_1 + 240y_2 + 160y_3$$
$$\text{Soumise aux contraintes}$$
$$\begin{cases} \boldsymbol{-4y_1 - 3y_2 - 6y_3 \geq -15} \\ 2y_1 + 3y_2 + 7y_3 \geq 13 \\ 8y_1 + 5y_2 + 6y_3 \geq 23 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{4y_1 + 3y_2 + 6y_3 \leq 15} \\ 2y_1 + 3y_2 + 7y_3 \geq 13 \\ 8y_1 + 5y_2 + 6y_3 \geq 23 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

وعليه فإن ظهور المتغيرة رقم j بإشارة أقل أو تساوي الصفر $(x_j \leq 0)$ في نموذج التعظيم الأولي (Max)، يؤثر على القيد رقم j فيظهر بالإشارة أقل أو تساوي ($\leq$) في نموذج التدنية الثنائي.