

Université Mohamed Khider de Biskra

Faculté des SESNV
Département des sciences de la matière
Année universitaire 2021/2022

Module: Fct de la Variable Complexe
Niveau: 2^{ème} année liscence
Spécialité: Physique

TD 4: Séries de Laurent et théorie des résidus

EXERCICE 1:

Donner le développement en série de Laurent des fonctions suivantes en précisant dans quelles parties de \mathbb{C} elles sont valables.

1. $\frac{1}{(z+2)(z-1)}$ autour de 0, de 1, de -2 .
2. $\frac{z}{z^2-1}$ autour de 0, de 2, de 1.

EXERCICE 2:

Donner le développement en série de Laurent de la fonction $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}$ dans les régions suivantes: a) $0 < |z-1| < 2$, et b) $0 < |z-3| < 2$.

EXERCICE 3:

- a) Quels sont les points singuliers des fonctions suivantes
- b) Préciser leurs types.
- c) Calculer les résidus de ces fonctions.

1. $\frac{e^z}{z^2(z-1)(z-2)}$, 2. $\frac{e^z}{z}$, 3. $\frac{1-\cos z}{z}$, 4. $\frac{1}{z^3-z^5}$, 5. $\frac{e^{4x}}{z^2+1}$, 6. $\frac{ze^z}{z^2-1}$.

EXERCICE 4:

Calculer les intégrales suivantes:

1. $\int_{|z|=2} \tan(z) dz$, 2. $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^4+5z^3} dz$, 3. $\int_{|z|=1} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz$, 4. $\int_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^4-1}$.

EXERCICE 5:

1. Calculer les résidus des fonctions suivantes:

a. $f(z) = z^{2n}(1+z)^{-n}$ b. $f(z) = \frac{1-e^z}{1+e^z}$ c. $f(z) = e^{2z+1}$.

2. Calculer les résidus à l'infini des fonctions suivantes:

a. $f(z) = \frac{z^3}{z'-1}$ b. $f(z) = \left(z + \frac{2}{z}\right)^4$ c. $f(z) = \frac{e^z}{z}$.

3. Calculer l'intégrale suivante: $\int_{|z|=2} \frac{z^{99} e^{\frac{1}{z}}}{z^{100} + 1} dz$.

