جامعة محمد خيضر بسكرة

كلية العلوم الاقتصادية و التجارية

و علوم التسييـــر

مجال العلوم الاقتصادية والتسيير

و العلوم التجارية *LMD-SEGC*

السنـــة الأولـــى

سلسلة التمـــارين رقم 02 وحلولها في الإحصـــاء الرياضي.

مفاهيم أساسية في نظرية الاحتمال.

التمرين الأول:

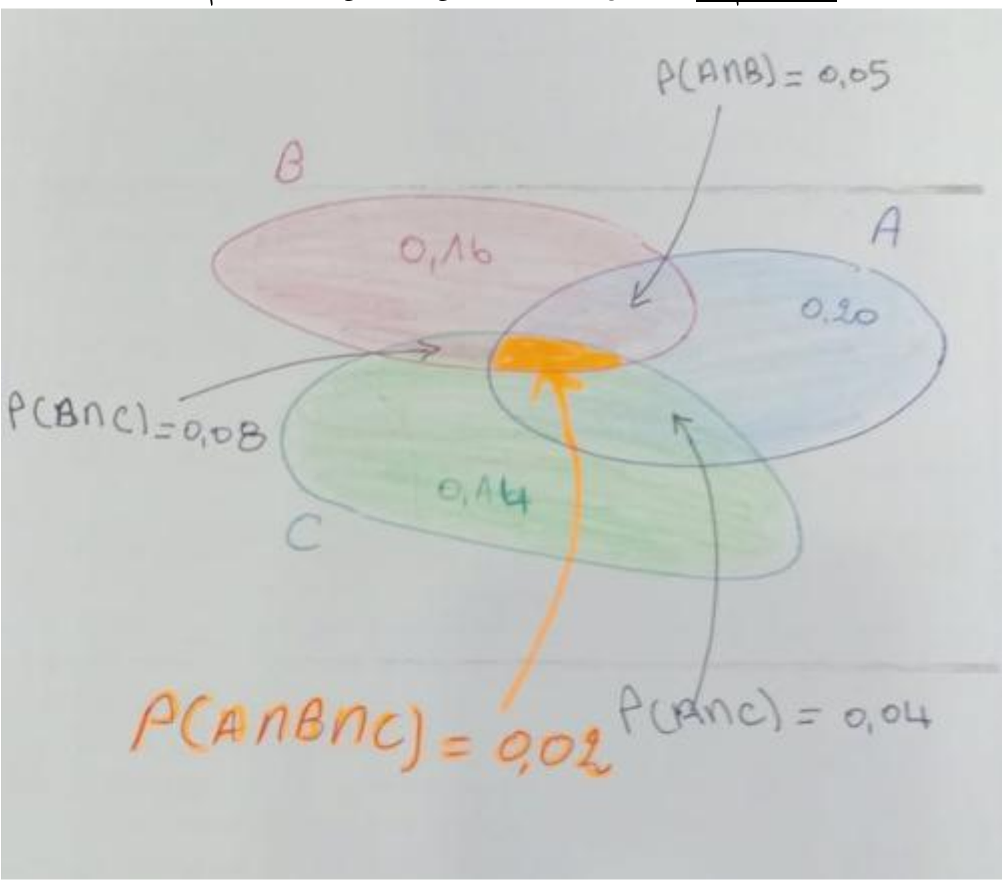
لنفرض أنه في بلد ما توجد ثلاث جرائد يومية A و B و C . فإذا علمنا أن احتمال قراءة شخص ما الجريدة A هو 0.20 ، و احتمال قراءة شخص ما الجريدة B هو 0.16 ، واحتمال قراءة شخص ما الجريدة C هو 0.14 . واحتمال قراءة شخص ما الجريدتين A و B معا هو 0.05 ، واحتمال قراءة شخص ما الجريدتين A وC معا هو 0.04 ، واحتمال قراءة شخص ما الجريدتين B و C معا هو 0.08. أما احتمال قراءة شخص ما الجرائد الثلاث معا فهو 0.02 . اخترنا شخصا ما من هذا البلد عشوائيا، المطلوب:

ما هو احتمال أن يقرأ هذا الشخص:

1. جريدة واحدة على الاقل؟
2. جريدة واحدة على الأكثر؟
3. جريدتان على الاكثر؟
4. جريدتان على الأقل؟

حل التمرين الأول: نلخص أولا المعطيات في الشكل أدناه:

الشكل رقم 01: تلخيص معطيات التمرين الأول من السلسلة رقم 02



المصدر: معطيات التمرين الأول من السلسلة رقم 02.

حساب احتمال أن يقرأ الشخص المختار عشوائيا:

1. جريدة واحدة على الأقل:

أي يقرأ الشخص جريدة **أو** إثنين **أو** ثلاثة، وهذه الجريدة قد تكون A فقط أو B فقط أو C فقط

أو جريدتان: A و B ... A أو C ... B أو C و أو الجرائد الثلاث معا.

(أو) تقابل الاتحاد في نظرية المجموعات وتعني الجمع في نظرية الاحتمالات، وبما أنه يمكن لشخص واحد أن يقرأ أكثر من جريدة في آن واحد نطبق قانون **الحوادث المتلائمة** كالتالي:

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

$P(A \cup B \cup C) = 0.20 + 0.16 + 0.14 - 0.05 - 0.04 - 0.08 + 0.02 = \mathbf{0.35}$

بمعنى هناك 35% من المجتمع المدروس يقرؤون على الأقل جريدة واحدة والبقية (65%) لا يقرؤون أي جريدة.

2-جريدة واحدة على الأكثر:(D)

<u>بمعنى إما يقرأ الشخص جريدة واحدة من الثلاث فقط **أو** لا يقرأ أي جريدة.</u>

وعليه يكون لدينا:

D: حادث قراءة الشخص جريدة واحدة على الأكثر.

H : حادث قراءة الشخص جريدة واحدة فقط.

E : حادث عدم قراءة الشخص أية جريدة.

نترجم الجملة المسطرة الى رموز نجد:

$$P(D) = P(H) + P(E)\{\text{الحادثين متنافيين}\}$$

-لا يمكن لشخص واحد أن يقرأ جريدة واحدة فقط وأن لا يقرأ أي جريدة في نفس الوقت-

أولا - حساب احتمال قراءة الشخص جريدة واحدة فقط:

إما يقرأ الشخص الجريدة A فقط ولا يقرأ B و C أو يقرأ B فقط ولا يقرأ A وC أو يقرأ C فقط ولا يقرأ A و B.

$$P(H) = P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(B) - P(A \cap B) - P(B \cap C) + P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + 3P(A \cap B \cap C)$$

وقد أضفنا التقاطع الثلاثي ثلاث مرات لأنه يتم حذفه في كل تقاطع ثنائي.

أنظر الشكل التوضيحي أسفله:

$P(H) = 0.2 - 0.05 - 0.04 + 0.16 - 0.05 - 0.08 + 0.14 - 0.04 - 0.08 + 3 \times 0.02 = \mathbf{0.22}$

حساب احتمال عدم قراءة الشخص أي جريدة:

حادث عدم قراءة الشخص أي جريدة هو الحادث المتمم لقراءة الشخص جريدة واحدة على الأقل، أي:

$$P(E) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 1 - 0.35 = \mathbf{0.65}$$

وعليه:

$$P(D) = P(H) + P(E) = 0.22 + 0.65 = \mathbf{0.87}$$

3-جريدتان على الأكثر:

إما ألا يقرأ الشخص أية جريدة، أو أن يقرأ جريدة واحدة فقط (الحادث D)، أو أن يقرأ جريدتان فقط. نسمي:

G : حادث قراءة الشخص جريدتان على الأكثر.

F : حادث قراءة الشخص جريدتان فقط.

D :حادث قراءة الشخص جريدة واحدة على الأكثر

نترجم العبارة المسطرة:

$$P(G) = P(F) + P(D)\{\text{حادثين متنافيين}\}$$

نبحث عن حادث قراءة الشخص جريدتان فقط.

وهنا يمكننا جمع التقاطعات الثنائية وحذف التقاطع الثلاثي كل مرة.

$$P(F) = [P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C)] + [P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)] + [P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)]$$

$$P(F) = [0.05 - 0.02] + [0.04 - 0.02] + [0.08 - 0.02] = \mathbf{0.11}$$

وعليه:

$$P(G) = 0.11 + 0.87 = \mathbf{0.98}$$

وبعبارة أخرى: كل المجتمع باستثناء الأشخاص الذين يقرؤون ثلاث جرائد معا (2 %).

4-جريدتان على الأقل:

أي يقرأ الشخص جريدتان فقط(F) أو ثلاث جرائد معا. نسمي:

K : حادث قراءة الشخص جريدتان على الأقل.

$$\mathrm{P(K) = P(F) + P(A \cap B \cap C)}$$

تطبيق عددي:

$$\mathrm{P(K) = 0.11 + 0.02 = 0.13}$$

التمرين الثاني:

نرمي قطعتي نرد على التوالي، نسمي A حدثا يتحقق بحصولنا على الرقم 3 من النرد الأول، و B حدثا يتحقق إذا كان مجموع نتيجتي النردين يساوي 5 . أما C فيتحقق إذا كان الرقمان المتحصل عليهما من النّردين متساويين.

1. أحسب الاحتمالات التالية: $P(A), P(B), P(C), P(A \cap B), P(A \cap C), P(B \cap C)$
2. أحسب $(A \cup B \cup C)$ وقارنه مع $(A) + P(B) + P(C)$

حل التمرين الثاني:

$$\Omega = \{(1.1).(1.2)\ldots\ldots(2.1).(2.2)\ldots\ldots(6.5).(6.6)\} = 36$$

1-**حساب الاحتمالات التالية:**

A: حادث يتحقق بحصولنا على الرقم 3 من النرد الأول.

$$A = \{(3.1).(3.2).(3.3).(3.4).(3.5).(3.6)\} = 6$$

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

B: حادث يتحقق اذا كان مجموع نتيجتي النردين يساوي خمسة.

$$B = \{(1.4).(2.3).(3.2).(4.1)\} = 4$$

$$P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

C: حادث يتحقق اذا كان الرقمان المتحصل عليهما من النردين متساويان.

$$C = \{(1.1).(2.2).(3.3).(4.4).(5.5).(6.6)\} = 6$$

$$P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$A\cap B$: حادث يتحقق بحصولنا على الرقم 3 من النرد الأول و مجموع نتيجتي النردين يساوي خمسة.

$$A \cap B = \{(3.2)\} = 1$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

$A\cap C$: حادث يتحقق بحصولنا على الرقم 3 من النرد الأول و نتيجتي النردين متساويتين.

$$A \cap C = \{(3.3)\} = 1$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{36}$$

$B\cap C$: حادث يتحقق عند حصولنا على مجموع خمسة وتكون نتيجتا النردين متساويتين.

$$A\cap C=\emptyset \Longrightarrow P(A\cap C)=0$$

2-حساب الاحتمال $P(A\cup B\cup C)$ ومقارنته مع $P(A)+P(B)+P(C)$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

$$P(A\cup B\cup C)=\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{6}-\frac{1}{36}-\frac{1}{36}+0=\frac{7}{18}$$

$$P(A)+P(B)+P(C)=\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{6}=\frac{4}{9}$$

نلاحظ أن: $P(A\cup B\cup C)\neq P(A)+P(B)+P(C)$

وعليه نقول أن الحوادث ليست متنافية مثنى مثنى.

<u>التمرين الثالث:</u>

يقوم قنّاصان بالتصويب على هدف واحد، حيث احتمال أن يصيب الرامي الأول الهدف (الحدث $E1$) هو 0,6
واحتمال أن يصيب الرامي الثاني الهدف نفسه (الحدث $E2$) هو 0,8 .
أطلق كلٌّ منهما طلقة واحدة نحو الهدف نفسه، ما هو احتمال أن يصاب الهدف:

1. بطلقة واحدة على الأقل؟
2. بطلقة واحدة فقط؟

<u>حل التمرين الثالث:</u>

1-احتمال اصابة الهدف بطلقة واحدة على الأقل:

بمعنى قد يصاب الهدف بطلقة واحدة فقط (من الرامي الأول أو من الرامي الثاني) أو **أن** يصاب بطلقتين (من الراميين معا)

(أو) تصبح اتحاد أي جمع، ويمكن للهدف أن يصاب من الراميين (حوادث متلائمة)، وعليه:

$$P(E1\cup E2)=P(E1)+P(E2)-P(E1\cap E2)$$

$$P(E1\cup E2)=0.6+0.8-0.6\times 0.8\left\{\text{الحوادث مستقلة}\right\}=0.92$$

واعتبرت الحوادث مستقلة لأن اصابة الرامي الأول الهدف أو عدم اصابته لا تؤثر البتة على نتيجة الرامي الثاني، فكل حسب مهارته.

2-احتمال اصابة الهدف بطلقة واحدة فقط:

بمعنى يصيب الرامي الأول و لا يصيب الرامي الثاني أو لا يصيب الرامي الأول و يصيب الرامي الثاني.

نترجم العبارة الى رموز (في مكان (و) نضرب وفي مكان (أو) نجمع، واحتمال "**لا يصيب**" هو متمم احتمال "**يصيب**")

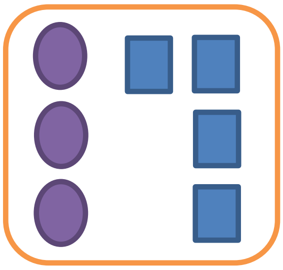
$$P(E1\ ) \times P(\overline{E2}) + P(\overline{E1}) \times P(E2) = 0.6 \times 0.2 + 0.4 \times 0.8 = 0.44$$

التمرين الرابع:

إذا أُختير الطلبة في فصل بطريقة عشوائية وبشكل متتابع واحدا بعد الآخر لإجراء اختبار معين. أوجد احتمال أن يتعاقب الطُّلاب والطالبات إذا كان بالفصل:

1. أربعةُ طُلاب و ثلاثُ طالبات.
2. ثلاثةُ طُلاب وثلاثُ طالبات.

حل التمرين الرابع:

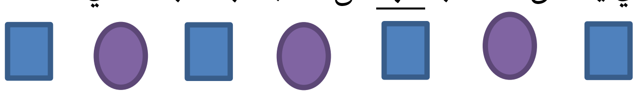


P(A) هو احتمال تعاقب الطلاب والطالبات اذا كان بالصف:

1-أربع طلاب وثلاث طالبات:

لنرمز للطالب بالمربع ، ولنرمز للطالبة بالدائرة .

كي يتحقق التعاقب لابد من أن نبدأ بطالب كالتالي:



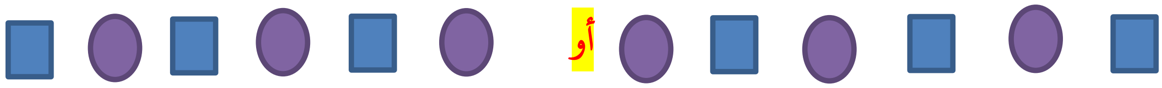
أي أن نختار طالبا عشوائيا من السبع طلبة، وبعد ذلك طالبة من بين الست وبعد ذلك طالب من الخمس ....وهكذا

ونسمي هذا الاحتمال بالاحتمالي الشرطي أي احتمال تحقق حادث بمعلومية تحقق حادث آخر.

$$P(A) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \mathbf{0.028}$$

2-بالصف ثلاث طلاب وثلاث طالبات:

كي يتحقق التعاقب هنا إما أن نختار: "طالب و طالبة و طالب و طالبة و..." أو نختار: "طالبة وطالب وطالبة و طالب و...إلخ. أي وفقا للشكل الآتي:



$$P(A) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} + \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = 0.1$$

التمرين الخامس:

في نهاية المداولات بكلية الاقتصاد كتب رئيس اللجنة تقريرا جاء فيه: " ... ولقد لاحظنا رسوب 25% من الطلبة في مقياس الإحصاء، ورسوب 15% من الطلبة في مقياس الرياضيات، ورسوب 10% من الطلبة في المقياسين معا...".

سحبنا أحد الطلبة عشوائيا، المطلوب:

1. إذا كان راسبا في الرياضيات، فما هو احتمال أن يكون راسبا في الإحصاء؟
2. إذا كان راسبا في الإحصاء، فما هو احتمال أن يكون راسبا في الرياضيات؟
3. ما هو احتمال أن يكون راسبا في الرياضيات أو الإحصاء؟

حل التمرين الخامس:

1-حساب احتمال أن يكون الطالب المختار عشوائيا راسبا في الاحصاء مع العلم أنه راسبٌ في الرياضيات:

نسمي الأحداث الآتية:

M: حدث يتحقق بكون الطالب راسبا في الرياضيات.

S: حدث يتحقق بكون الطالب راسبا في الإحصاء.

عموما... إذا طلب إلينا حساب احتمالٍ شرطيٍّ، فإنه يساوي احتمال التقاطع مقسوما على احتمال الحدث المحقق منهما، أي:

$$P(S/M) = \frac{P(S \cap M)}{P(M)} = \frac{0.1}{0.15} = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

2-حساب احتمال أن يكون الطالب المختار عشوائيا راسبا في الرياضيات مع العلم أنه راسب في الاحصاء:

$$P(M/S) = \frac{P(S \cap M)}{P(S)} = \frac{0.1}{0.25} = \mathbf{\frac{2}{5}}$$

3-حساب احتمال أن يكون راسب في الاحصاء أو الرياضيات:

بما أنه يمكن للطالب أن يكون راسبا في المادتين(حوادث متلائمة)، نطبق القانون التالي:

$$P(S \cup M) = P(S) + P(M) - P(S \cap M)$$

$$P(S \cup M) = 0.25 + 0.15 - 0.10 = 0.3$$

التمرين السادس:

تحوي ثلاثةُ صناديق متماثلة كراتٍ متجانسة: يحوي الأول 5 كرات بيضاء ومثلها سوداء، وفي الثاني 8 كرات بيضاء وكرتان سوداوان، أما الثالث ففيه 4 كريات بيضاء و 6 سوداء. بطريقة عشوائية سحبنا صندوقا ثم سحبنا منه كرة. أحسب احتمال أم تكون هذه الكرة المسحوبة بيضاء.

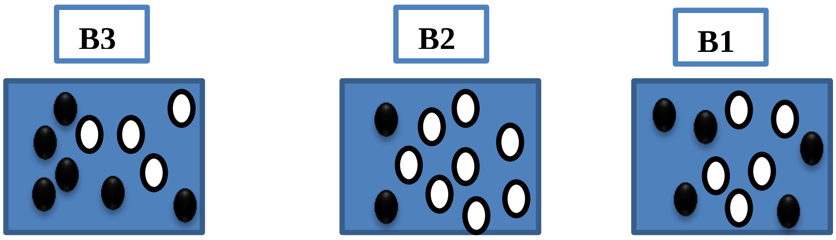
حل التمرين السادس:

حساب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء:

إما نسحب الصندوق الأول وتكون الكرة البيضاء من الصندوق الأول، أو نسحب الصندوق الثاني وتكون الكرة البيضاء من الصندوق الثاني أو نسحب الصندوق الثالث وتكون الكرة البيضاء من الصندوق الثالث. نسمي:

A : حادث سحب كرة بيضاء.

Bi : حادث سحب الصندوق i حيث، $i = \{1.2.3\}$



نترجم العبارة المسطرة نجد:

$$P(A) = P(B1)P(A/B1) + P(B2)P(A/B2) + P(B3)P(A/B3)$$

قانون الاحتمال الكلي $P(A) = P(\mathrm{B}i)P(A/\mathrm{B}i)$

بالتطبيق العددي نجد:

$$P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{5}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{8}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{10} = \mathbf{\frac{17}{30}}$$

التمرين السابع:

بالعودة إلى صناديق التمرين الثامن، ولنفرض أن أحدهم سحب عشوائيا كرة من أحد الصناديق فكانت بيضاء، فما هو احتمال أن تكون هذه الكرة البيضاء من الصندوق الثالث؟

حل التمرين السابع:

حساب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الصندوق الثالث مع العلم أنها كانت بالفعل بيضاء:(احتمال سبي)

نطبق قانون الاحتمال أي عدد الحالات الملائمة على عدد الحالات الممكنة، لكن ما يميز هذا التمرين أن عدد الحالات الممكنة هو نفسه الاحتمال الكلي. نسمي هذه الحالة بدستور "بايز" أو قانتن الاحتمال السبي.

نطبقه كالتالي:

$$P(B3/A) = \frac{P(B3)P(A/B3)}{P(A)}$$

$$P(B3/A) = \frac{P(B3)P(A/B3)}{P(B1)P(A/B1) + P(B2)P(A/B2) + P(B3)P(A/B3)}$$

$$P(B^3/A) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{4}{10}}{\frac{17}{30}} = \mathbf{\frac{4}{17}}$$

تمارين مقترحة للحل

التمرين الأول:

تقوم شركة بإنتاج الأقمصة، حيث كان احتمال وجود عيب في النسيج المستخدم في الإنتاج هو 8% ، بينما احتمال وجود عيب ناتج عن الخياطة هو 6% . فإذا كانت العمليتان الإنتاجيتان (تهيئة النسيج والخياطة)، مستقلتين عن بعضهما البعض، أوجد احتمال إنتاج قميص معيب.

حل التمرين المقترح الأول:

نسمي الأحداث الآتية:

T حدث يتحقق بكون العيب في النسيج.

P: حدث يتحقق بكون العيب في الخياطة.

انتاج قميص معيب يعني أن العيب يكون في النسيج أو في الخياطة:

$$P(T \cup P) = P(T) + P(P) - P(T \cap P) = 0.08 + 0.06 - (0.08 \times 0.06) = \mathbf{0.1352}$$

التمرين الثاني:

فيما يأتي عينة من خريجي أحد المعاهد موزعين حسب التخصص ونوع المهنة:

المجموع	عمل حر L	قطاع خاص P	قطاع حكومي F	المهنة / التخصص
30	10	5	15	اقتصاد زراعي A
35	10	17	8	اقتصاد صناعي I
35	13	10	12	اقتصاد خدمي S
100	**33**	**32**	**35**	المجموع

فإذا أُختير أحد الخرجين بطريقة عشوائية، **المطلوب**:

1. ما هو احتمال أن يكون من خرجي الاقتصاد الزراعي ويعمل بالقطاع الخاص؟
2. ما هو احتمال أن يكون ممن يعملون في القطاع الحكومي أو من خرجي الاقتصاد الصناعي؟
3. ما هو احتمال أن يكون من خرجي الاقتصاد الصناعي أو من خرجي الاقتصاد الخدمي؟
4. إذا عُلم أنه من خرجي الاقتصاد الصناعي، ما هو احتمال أن يكون ممن يعملون عملا حرّا؟

حل التمرين المقترح الثاني: نطبق القانون التقليدي المعروف: عدد الحالات الملائمة على عدد الحالات الممكنة.

1. احتمال أن يكون من خرجي الاقتصاد الزراعي ويعمل بالقطاع الخاص:

$$P(A \cap P) = \frac{5}{100} = \mathbf{0.05}$$

2. احتمال أن يكون ممن يعملون في القطاع الحكومي أو من خرجي الاقتصاد الصناعي:

$$P(F \cup I) = P(F) + P(I) - P(F \cap I) = \frac{35}{100} + \frac{35}{100} - \frac{8}{100} = \frac{62}{100} = \mathbf{0.62}$$

3. احتمال أن يكون من خرجي الاقتصاد الصناعي أو من خرجي الاقتصاد الخدمي:

$$P(I \cup S) = P(I) + P(S) = \frac{35}{100} + \frac{35}{100} = \frac{70}{100} = \mathbf{0.7}$$

4. إذا عُلم أنه من خرجي الاقتصاد الصناعي، ما هو احتمال أن يكون ممن يعملون عملا حرّا:

$$P(L/I) = \frac{P(L \cap I)}{P(I)} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{35}{100}} = \frac{10}{35} = \mathbf{0.2857}$$