Chapitre 3

Intégration complexe

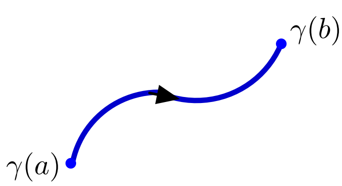
Sommaire

3.1 Intégrales curvilignes complexes

Définition 3.1. *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine. On appelle arc dans D une application dérivable*

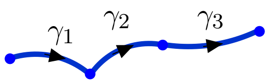
$$\begin{array}{rll} \gamma : & [a,b] & \to D \\ & t & \mapsto \gamma(t) \end{array}$$

$\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ sont appelés l'origine et l'extrimité de l'arc γ respectivement.



Définition 3.2. *La réunion d'arcs est une application dérivable par morçeaux dite chemin :*

$$\gamma = \cup_{i=1}^{n} \gamma_i$$

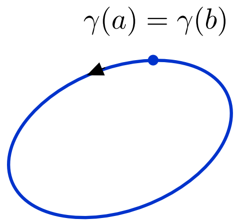


On décrit les points de l'arc au moyen de l'équation $\gamma(t) = z(t) = x(t) + iy(t)$ avec $a \leq t \leq b$.

Exemple 3.1. *les segments orirntés $[z_0, z_1]$ sont des arcs :*

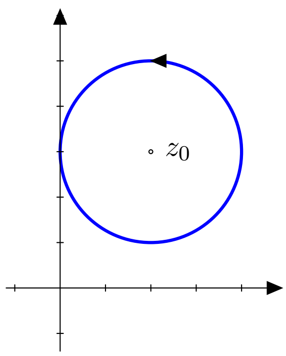
$$\gamma(t) = (1-t)z_0 + tz_1 = z_0 + t(z_1 - z_0), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Définition 3.3. *Un arc γ est dit fermé (Lacet ou contour) si son origine coïncide avec son extrimité. i.e. $\gamma(a) = \gamma(b)$.*



Exemple 3.2. *Le cercle de centre z_0 et de rayon r est un chemin fermé*

$$\gamma(t) = z_0 + re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$



Définition 3.4. *Un arc est dit simple s'il ne coupe pas lui même.*

Définition 3.5. *Une courbe simple et fermé est dite une courbe de Jordan .*

Définition 3.6. *Soit $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$, une paramétrisation qui décrit un arc γ. Si $x(t)$ et $y(t)$ sont de classe C^1 sur $[a, b]$ alors γ est appelée arc différentiable.*

La longueur de l'arc γ est

$$L(\gamma) = \int_a^b |z'(t)|dt$$

où $|z'(t)| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$.
La longueur ne dépend pas de la paramétrisation.

Exemple 3.3. $z(t) = re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$

$$\begin{aligned}
&z(t) = re^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi\\
&x(t) = r\cos(t) \Rightarrow x'(t) = -r\sin(t)\\
&y(t) = r\sin(t) \Rightarrow y'(t) = r\cos(t)\\
&L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\sin(t))^2 + (r\cos(t))^2}dt = \int_0^{2\pi} rdt = 2\pi r.
\end{aligned}$$

Définition 3.7. *Soit $f(t) = u(t) + iv(t)$, $a \le t \le b$, avec u et v deux fonctions réelles continues. On définit l'intégrale de f de a à b par*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t) + i\int_a^b v(t)dt.$$

Exemple 3.4. $\int_0^1 (2t+i)^2 dt = \int_0^1 (4t^2 - 1)dt + i\int_0^1 4tdt = \frac{1}{3} + 2i.$

Propriétés 3.1.
1. $\int_a^b kf(t)dt = k\int_a^b f(t)dt$, $k \in \mathbb{C}$.
2. $\int_a^b (f(t) + g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt.$
3. $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt.$
4. $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$

Définition 3.8. *Soit $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et $\gamma : [a,b] \to D$ un chemin. L'intégrale curviligne de f sur le chemin γ est définie par*

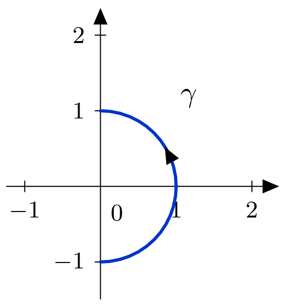
$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Exemple 3.5.

$$\int_\gamma \bar{z}dz,$$

$$\gamma(t) = e^{it}, \quad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}, \quad \gamma'(t) = ie^{it},$$

$$\int_\gamma \bar{z}dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-it}ie^{it} = i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = i\pi.$$



Remarque 3.1. *1. Si $\gamma = \cup_{i=1}^n \gamma_i$ alors*

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z)dz.$$

2. $\int_{\gamma^-} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$ *où* γ^- *est le chemin opposé (inverse) de* γ *:*

$$\begin{array}{llll} \gamma^- : & [a,b] & \to D \\ & t & \mapsto \gamma^-(t) = \gamma(a+b-t). \end{array}$$

On a $\gamma^-(a) = \gamma(b)$ *et* $\gamma^-(b) = \gamma(a)$.

3.

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq M.L(\gamma), \quad \text{où} \quad M = \sup_{z\in\gamma} |f(z)|.$$

Théorème 3.1 (Primitives)**.** *Soit* $D \subset \mathbb{C}$ *domaine et* $f : D \Rightarrow \mathbb{C}$ *continue alors* f *admet une primitive dans* $D \iff \forall \gamma \subset D$ *chemin fermé* $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Exemple 3.6. *1.* $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ *où* γ *est le cercle de centre* 0 *et de rayon* r.

$\gamma(t) = re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$

$\gamma'(t) = ire^{it},$

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_o^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = i \int_o^{2\pi} dt = 2\pi i \neq 0,$$

donc $f(z) = \frac{1}{z}$ *n'admet pas de primitive dans* $\mathbb{C}^*$.

2. $\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}$ *où* γ *est le cercle de centre* z_0 *et de rayon* r.

$\gamma(t) = z_0 + re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$

$\gamma'(t) = ire^{it},$

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = \int_o^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = i \int_o^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

3. $\int_\gamma \frac{dz}{(z-z_0)^n}, \quad n \neq 1$ *où* γ *est le cercle de centre* z_0 *et de rayon* r.

$\gamma(t) = z_0 + re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$\gamma'(t) = ire^{it}$

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{dz}{(z-z_0)^n} &= \int_o^{2\pi} \frac{ire^{it}}{(re^{it})^n} dt = ir^{-n+1} \int_o^{2\pi} e^{i(1-n)t} dt = \frac{r^{-n+1}}{1-n} \left[e^{i(1-n)t} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{r^{-n+1}}{1-n} \left[e^{i(1-n)2\pi} - 1 \right] = 0 \end{aligned}$$

3.2 Lien entre intégrales curvilignes et intégrales doubles

Théorème 3.2 (Théorème de Green)**.** *Soit* D *une partie de* $\mathbb{R}^2$ *bornée par un chemin simple et fermé* γ *orienté positivement par rapport à* D*. Soient* u *et* v *deux fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$ *dans* D*. Alors on a*

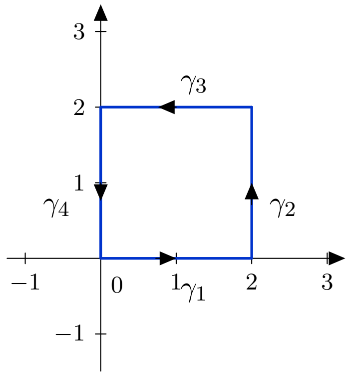
$$\iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy = \int_\gamma udx + vdy.$$

Exemple 3.7. *Vérifier la formule de Green pour l'intégrale*

$$\int_\gamma (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - x^2y)dy,$$

où γ *est le carré de sommets* $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$ *et* $(0,2)$.

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$$



$$\int_\gamma = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4}.$$

Sur γ_1 $y = 0$, $dy = 0$, *et* $0 \le x \le 2$,

$$\int_{\gamma_1} (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - x^2y)dy = \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3},$$

Sur γ_2 $x = 2$, $dx = 0$, *et* $0 \le y \le 2$,

$$\int_{\gamma_2} (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - x^2y)dy = \int_0^2 (y^2 - 4y)dy = \frac{8}{3} - 8,$$

Sur γ_3 $y = 2$, $dy = 0$, *et* $0 \le x \le 2$,

$$\int_{\gamma_3} (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - x^2y)dy = \int_2^0 (x^2 - 4x)dx = -\frac{8}{3} + 8,$$

Sur γ_4 $x = 0$, $dx = 0$, *et* $0 \le y \le 2$,

$$\int_{\gamma_4} (y^2 - 2xy)dx + (y^2 - x^2y)dy = \int_2^0 y^2 dy = -\frac{8}{3},$$

donc

$$\int_\gamma (y^2 - 2xy)dx + (y^2 - x^2y)dy = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} - 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = 0.$$

En utilisant la formule de Green on a

$$\int_\gamma (y^2 - 2xy)dx + (y^2 - x^2y)dy = \int_0^2 \int_0^2 (-2xy + 2x)dxdy = 2\int_0^2 xdx \int_0^2 (-y+1)dy$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \left[-\frac{y^2}{2} + y\right]_0^2 = 2.2(-2+2) = 0.$$

3.3 Intégration des fonctions analytiques

Définition 3.9. *Soit D un domaine de $\mathbb{C}$, le bord (la frontière) δD de D se répartira comme suit :*

- *Une courbe extérieure.*
- *$k-1$ courbes intérieures ($k \geq 1$).*

Lorsque $k=1$ on dit que le domaine D est simplement connexe.
Lorsque $k>1$ on dit que le domaine D est multiplement connexe.

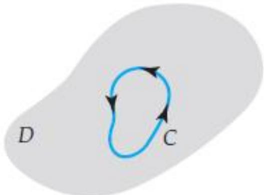


FIGURE 3.1 – Simplement connexe

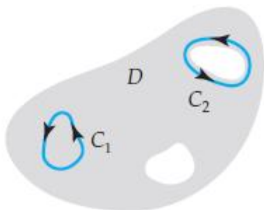


FIGURE 3.2 – Multiplement connexe

Remarque 3.2. *Un domaine simplement connexe ne comporte aucun trou.*

En 1825, le mathématicien Louis-Augustin Cauchy prouve l'un des théorèmes les plus importants de l'analyse complexe.

Théorème 3.3 (Théorème de Cauchy)**.** *Soit f une fonction holomorphe sur un domaine simplement connexe D avec f' soit continue dans D, alors*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0,$$

où γ est un chemin fermé (Lacet) quelconque inclus dans D.

La démonstration est une conséquence directe du théorème de Green (théorème 3.2) et des conditions de Cauchy-Rieman (proposition 2.1).

Preuve. Supposons que f' est continue dans le domaine D. Alors si $f = u+iv$, on sait que les dérivées partielles sont continues. D'autre part, on a

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma [u(x,y)+iv(x,y)]\, d(x+iy)$$

$$= \int_\gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_\gamma v(x,y)dx + u(x,y)dy$$

$$= \int\int_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + i\int\int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy$$

Puisque la fonction f est analytique dans D, alors les fonctions u et v vérifient les conditions de Cauchy-Rieman dans tout point de D. Ceci implique que

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

En 1883, le mathématicien Edouard Goursat prouve que la condition que f' soit continue n'est pas nécessaire.

Exemple 3.8. *Soit où γ un chemin fermé dans $\mathbb{C}$ alors*

$$\int_\gamma e^z dz = 0$$

car la fonction $z \mapsto e^z$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$.

Proposition 3.1. *Soit f une fonction holomorphe sur un domaine simplement connexe D. soient γ_1 et γ_2 deux chemins dans D ayant les mêmes extrimités, alors*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

L'intégrale dépend des extrimités.

Proposition 3.2. *Soit f une fonction holomorphe sur un domaine simplement connexe D, alors f admet une primitive F dans D, et pour tout chemin $\gamma : [a, b] \to D$ on a*

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

En particulier, si γ est fermé ($\gamma(a) = \gamma(b)$) alors

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Conséquence 3.1. *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine simplement connexe borné par un chemin orienté positivement par rapport à D.*

Si f est holomorphe dans D et continue sur $D \cup \delta D$ alors

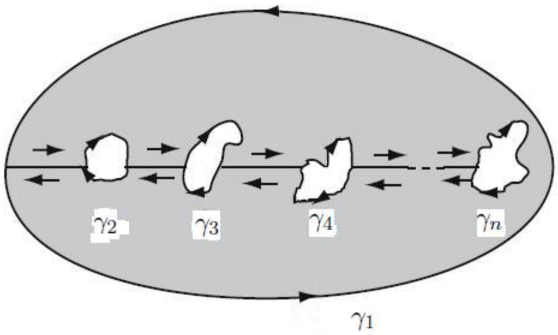
$$\int_{\delta D} f(z)dz = 0.$$

Théorème 3.4 (Généralisation du théorème de Cauchy)**.** *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine borné par un nombre fini de chemins orientés positivement par rapport à D : $\delta D = \gamma_1 \cup (\cup_{i=2}^{n} \gamma_i)$.*
Si f est holomorphe dans D et continue sur $D \cup \delta D$ alors

$$\int_{\delta D} f(z)dz = 0,$$

et on a

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \sum_{i=2}^{n} \int_{\gamma_i} f(z)dz.$$



3.4 Formule intégrale de Cauchy

Théorème 3.5 (Formule intégrale de Cauchy (F. I. C.))**.** *Soient f une fonction holomorphe sur un domaine simplement connexe D, et $z_0 \in D$. Alors on a pour tout chemin simple et fermé γ orienté positivement par rapport à D et entourant z_0*

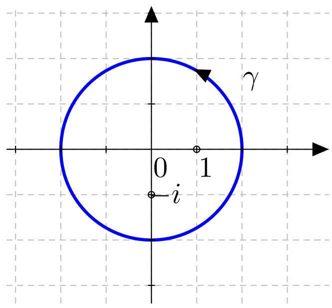
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Exemple 3.9. *1. $\int_\gamma \frac{e^z}{z-1} dz$ et γ : le cercle de centre 0 et de rayon 2.*

$$f(z) = e^z, \quad z_0 = 1, \quad f(1) = e,$$
$$\int_\gamma \frac{e^z}{z-1} dz = 2\pi i f(1) = 2\pi i e.$$

2. 1. $\int_\gamma \frac{z^2-4z+4}{z+i} dz$ et γ : le cercle de centre 0 et de rayon 2.

$$f(z) = z^2 - 4z + 4, \quad z_0 = -i, \quad f(-i) = 3 + 4i,$$
$$\int_\gamma \frac{z^2 - 4z + 4}{z + i} dz = 2\pi i f(-i) = 2\pi i (3 + 4i).$$



Théorème 3.6 (F. I. C. pour les dérivées d'ordre supérieur)**.** *Soient f une fonction holomorphe sur un domaine simplement connexe D, et $z_0 \in D$. Alors on a pour tout chemin simple et fermé γ orienté positivement par rapport à D et entourant z_0*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz.$$

Exemple 3.10. *1. $\int_\gamma \frac{z+1}{z^4+2iz^3}dz$ et γ : le cercle de centre 0 et de rayon 1.*

$$\frac{z+1}{z^4+2iz^3} = \frac{z+1}{z^3(z+2i)} = \frac{\frac{z+1}{z+2i}}{z^3}$$

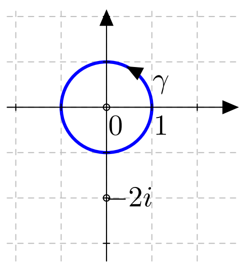
$-2i$ est à l'extérieur du cercle γ donc on pose

$$f(z) = \frac{z+1}{z+2i}, \quad z_0 = 0,$$

$$\int_\gamma \frac{\frac{z+1}{z+2i}}{z^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}f''(0),$$

$$f''(z) = \frac{2-4i}{(z+2i)^3} \Rightarrow f''(0) = \frac{2+i}{4},$$

$$\int_\gamma \frac{z+1}{z^4+2iz^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}\frac{2+i}{4} = -\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}i.$$



3.5 Conséquences et applications

Théorème 3.7 (Théorème de Moréra)**.** *Soit f une fonction continue dans un domaine simplement connexe D. Si pour tout chemin fermé γ dans D, $\int_\gamma f(z)dz = 0$ alors f est holomorphe dans D.*

Preuve. La condition $\forall \gamma \subset D$, $\int_\gamma f(z)dz = 0$ est équivalente à l'existence d'une primitive de f dans D, à savoir $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)ds$, z_0 est fixé arbitrairement dans D i.e. $\forall z \in D$, $F'(z) = f(z)$ donc F est holomorphe dans D, ainsi F est $\mathbb{C}$-analytique dans D ce qui implique que f est $\mathbb{C}$-analytique dans D.

Théorème 3.8 (Théorème de Liouville)**.** *Si f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et $|f| \leq M$ alors f est constante.*

Preuve. Soit $z \in \mathbb{C}$,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}} dz$$

$$\left| f^{(n)}(z) \right| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} 2\pi r$$

γ est un cercle $|s-z| = r$, alors

$$\left| f^{(n)}(z) \right| \leq \frac{n!}{r^n} M,$$

pour $n = 1$, on a

$$\left| f'(z) \right| \leq \frac{M}{r},$$

si $r \to +\infty$, alors $f'(z) = 0$. Donc f est constante.

Théorème 3.9 (Théorème de d'Alembert)**.** *Si $P(z)$ est un polynôme de degré n, alors l'équation $P(z) = 0$ admet n racines dans $\mathbb{C}$.*

Preuve. Posons $P(z) = a_n z^n + \ldots a_1 z + a_0$ où $n > 0$ et $a_n \neq 0$.

Supposons par l'absurde que $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) \neq 0$ alors la fonction $h(z) = \frac{1}{P(z)}$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$, de plus

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{1}{a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0} \\ &= \frac{1}{z^n} \frac{1}{a_n + a_{n-1} z^{-1} + \ldots + +a_0 z^{-n}} \to 0, \text{ quand } z \to +\infty \end{aligned}$$

i.e. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists R > 0$ tel que $|z| > R \Rightarrow |h(z)| < \varepsilon$, cela signifie que $h(z)$ est bornée dans $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0,R)$, d'autre part h est continue dans $\overline{D}(0,R)$, elle est donc bornée dans $\overline{D}(0,R)$, et par suite h est bornée sur $\mathbb{C}$ donc d'après le théorème de Liouville $h(z)$ est constante donc $P(z)$ est constante(contradiction).
Donc $P(z)$ admet au moins une racine $z_1 \in \mathbb{C}$, d'où $P(z)$ peut s'écrire $P(z) = (z - z_1)Q(z)$, avec $degQ(z) = n - 1$, ainsi on peut montrer sans peine que $P(z)$ admet n racines dans $\mathbb{C}$.

Théorème 3.10 (Principe du maximum)**.** *Soit D un domaine de $\mathbb{C}$, toute fonction holomorphe dans D possédant un maximun local dans D est constante sur D.*