جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الاقتصادية و التجارية
و علوم التسييـــر

قسم مجال العلوم الاقتصادية والتسيير
و العلوم التجارية *LMD-SEGC*
السنـــة الأولـــى

مُحاضَراتٌ في مِقياسِ

الإحصـَــاءِ الرِّياضِيِّ.

المحور الثاني: التحليل التوفيقي.

إعداد الدكتور هاشمي عبابسة.

h.ababsa@univ-biskra.dz

statdesc2018@gmail.com

المحور الثاني: التحليل التوفيقي.

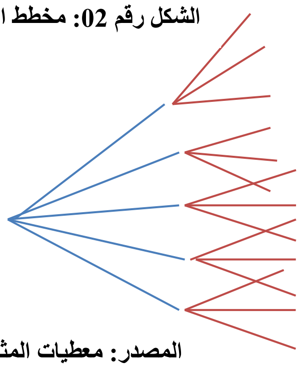
(L'analyse combinatoire)

يتضمن التحليل التوفيقي مجموعة من الطرق التي تسمح بتحديد عدد النتائج الممكنة لتجربة معينة. يمكن تعريفه بأنه "مجموعة من تقنيات العدّ التي يمكن أن تكون مفيدة في حساب الاحتمالات عندما يكون من اللازم تحديد عدد النتائج الملائمة لحدث معين.

أ- مخطط الشجرة:

إذا كان لدينا حدث يمكن أن يقع وفق n_1 طريقة، وحدث آخر يمكن أن يحدث وفق n_2 طريقة، فإن الحدثين يمكن أن يحدثا معا وفق $n_1 \times n_2$ طريقة.

الشكل رقم 02: مخطط الشجرة.



المصدر: معطيات المثال 1

***مثال1**: لدى شخص ثلاث ربطات عنق وخمسة قمصان، بكم طريقة يمكن أن يرتدي ربطة العنق مع القميص؟*

***الجواب**: يتحقق حدث لبس القميص وفق خمس طرق، ويتحقق حدث لبس ربطة العنق وفق ثلاثة طرق، وهما حدثان مستقلان، إذن يتحقق حدث لبسهما معا وفق $3 \times 5 = 15$ طريقة.*

ويكون مخطط الشجرة كالآتي: انظر الشكل رقم 02.

ب- الترتيبات (Les Arrangements)

وفيها يتم اختيار جزء k من الكل n، يرمز لها بالرمز A_n^k، وتتمتع بالخصائص الآتية:

- فقط بعض عناصر المجموعة n تُستعمل في الترتيب .
- ترتيب عناصرها مهم، أي أن الترتيبة (1 ، 2) ليست الترتيبة (2 ، 1).
- منها ما يُسمح فيه بتكرار العناصر ومنها ما لا يُسمح فيه بتكرار العناصر.

وعليه فهي نوعان حسب إمكانية تكرار العناصر:

1. الترتيبات مع التكرار: ترتيب n من العناصر مأخوذة k في كل مرة -مع إمكانية تكرار العناصر-هو قائمة من k من العناصر المختلفة أو المتكررة، مأخوذة من n عنصرا، أين يمكن لكل عنصر أن يتكرر حتى k مرة.

تحسب وفق القانون الآتي:

$$A_n^k = n^k$$

***مثال2**: ما هو عدد الكلمات ذات حرفين الممكن تشكيلها من ثلاثة أحرف a, b, c مع إمكانية تكرار الحروف؟*

***الجواب**: نلاحظ أن بعض عناصر المجموعة n فقط تُستعمل في الترتيب (جزء من الكل)، وأن ترتيبها مهم، ويسمح بتكرارها، وكل ذلك يعني أننا بصدد **ترتيبة مع التكرار**.*

$$A_3^2 = 3^2 = \mathbf{9}$$

$(a\ ,a)\quad (a\ ,b)\quad (a\ ,c)\quad (b\ ,a)\quad (b\ ,b)\quad (b\ ,c)\quad (c\ ,a)\quad (c\ ,b)\quad (c\ ,c)$

يمكن محاكاة الترتيبات مع التكرار بعملية سحب متتالٍ لـ k كرة من صندوق به n كرة **مع الإرجاع**.

2. التريبات بدون التكرار: ترتيب n من العناصر مأخوذة k في كل مرة -دون تكرار العناصر-هو قائمة من k من العناصر المختلفة، مأخوذة من n عنصرا، حيث لا يمكن لأي عنصر أن يظهر إلا مرة واحدة.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال3: *بكم طريقة يمكن تشكيل كلمة من حرفين مأخوذة من ثلاثة أحرف دون تكرار الحروف؟*

الجواب: *نلاحظ أن بعض عناصر المجموعة n فقط تُستعمل في الترتيب (جزء من الكل)، وأن ترتيبها مهم، ولكن لا يسمح بتكرارها، وكل ذلك يعني أننا بصدد **ترتيبة دون التكرار**.*

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \mathbf{6}$$

$\cancel{(a\ ,a)}\quad (a\ ,b)\quad (a\ ,c)\quad (b\ ,a)\quad \cancel{(b\ ,b)}\quad (b\ ,c)\quad (c\ ,a)\quad (c\ ,b)\quad \cancel{(c\ ,c)}$

يمكن محاكاة الترتيبات بدون التكرار بعملية سحب متتالٍ لـ k كرة من صندوق به n كرة **بدون إرجاع**.

ج- التبديلات *(Les Permutations)*

وفيها يتم اختيار الكل n من الكل n ، يرمز لها بالرمز P_n^n ، وتتمتع بالخصائص الآتية:

- جميع العناصر n تُستعمل في التبديل بينها.
- ترتيب عناصرها مهم، أي أن التبديلة (1 ، 2) ليست التبديلة (2 ، 1).
- لا يُسمح بتكرار العناصر. (السحب بدون إرجاع)

والتبديلات ثلاثة أنواع:

1. التبديلات الخطية أو المستقيمة (*rectilignes*) لـ n من العناصر المختلفة فيما بينها:

$$P_n^n = n!$$

مثال4: *ما هو عدد الكلمات الممكن تشكيلها من الحروف العشرة الآتية: a, b, c, d, e, f, g, h, i, j؟*

الجواب: *نلاحظ أن كل عناصر المجموعة n تُستعمل في الترتيب (الكل من الكل)، وأن ترتيبها مهم، وأنها غير دائرية ولا عناصر متكررة بينها، وعلى ذلك نحن بصدد **تبديلة مستقيمة مختلفة العناصر**.*

$$P_{10}^{10} = 10! = \mathbf{3628800}$$

2. التبديلات الخطية أو المستقيمة لـ n من العناصر، مع وجود مجموعات جزئية n_i من العناصر المتكررة:

$$P_n^{n_1,n_2,\dots,n_k} = \frac{P_n^n}{P_{n_1}^{n_1} \times P_{n_2}^{n_2} \times \dots \times P_{n_k}^{n_k}} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_k!}$$

مثال5: ما هو عدد الكلمات الممكن تشكيلها من حروف كلمة statistics؟

الجواب: نلاحظ أن كل عناصر المجموعة n تُستعمل في الترتيب (الكل من الكل)، وأن ترتيبها مهم، وأنها غير دائرية بينما يوجد بينها عناصر متكررة، وعلى ذلك نحن بصدد **تبديلة مستقيمة ذات عناصر متشابهة**، يمكن تصنيفها في المجموعات الجزئية الآتية: $3s \to n_1 \;,\; 3t \to n_2 \;,\; 2i \to n_3$، أما بقية الحروف فلا تكرار فيها.

$$P_{10}^{3,3,2} = \frac{10!}{3!\,3!\,2!} = \mathbf{50400}$$

نلاحظ الاختلاف بين المثالين 4 و 5 من حيث تكرار العناصر؛ فرغم أن التبديل في المثالين تم بين 10 حروف، إلا أن التكرار الذي حدث في المثال 5 قلّص عدد الحالات الممكنة من أكثر من 3 ملايين كلمة مختلفة إلى 50400 كلمة فقط. وهذا راجع إلى أن التبديل بين بعض الحروف في المثال 5 لا ينتج حالات جديدة، ولهذا اختزلنا هذا التبديل ووضعناه في المقام.

3. **التبديلات الدائرية (*circulaires*) لـ *n* من العناصر المختلفة فيما بينها:**

$$P_n^n = (n-1)!$$

مثال6: بكم طريقة يمكن أن يجلس خمسة أشخاص حول مائدة مستديرة؟

الجواب: : نلاحظ أن كل عناصر المجموعة n تُستعمل في الترتيب (الكل من الكل)، وأن ترتيبها مهم، وأنها دائرية لأن الأشخاص الخمسة يتحلقون حول طاولة مستديرة، وعلى ذلك نحن بصدد **تبديلة دائرية.**

$$P_5^5 = (5-1)! = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = \mathbf{24}$$

يمكن محاكاة التبديلات عموما بعملية سحب متتالٍ لجميع كرات صندوق به n كرة **بدون إرجاع.**

د- التوفيقات (*Les Combinaisons*)

التوفيقة هي "سحب" لـ k عنصرا مختارة من بين n عنصرا، حيث لا أهمية للترتيب بينها. أي أن اختيار k عنصرا من بين n عنصرا -دون الالتفات للترتيب بينها- هو توفيقة لـ n عنصرا مأخوذةً k في كل مرة. يرمز للتوفيقة بالرمز C_n^k. تتمتع التوفيقات بالخصائص الآتية:

- فقط بعض العناصر n تُستعمل في اختيار التوفيقة.
- ترتيب عناصرها **غير مهم**، أي أن التوفيقة (1 ، 2) هي نفسها التوفيقة (2 ، 1).
- منها ما يُسمح فيه بتكرار العناصر ومنها ما لا يُسمح فيه بتكرار العناصر.

وعليه فالتوفيقات نوعان من حيث إمكانيةُ التكرار:

1. **التوفيقات بدون تكرار**: هي "سحب" لـ k عنصرا مختارة من بين n عنصرا، حيث **لا يمكن** للعناصر أن تتكرر، ولا أهمية للترتيب بينها. وتحسب كما يأتي:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{A_n^k}{P_k^k}$$

مثال7: *صندوق به ثلاث كريات طُبع عليها الأحرف .a, b, c ، سحبنا كرتين دفعة واحدة، كم كلمة ذات حرفين يمكن الحصول عليها؟*

الجواب: *: نلاحظ أن بعض عناصر المجموعة n فقط تُستعمل في الترتيب (جزء من الكل)، وأن ترتيبها غير مهم، لأن السحب تم دفعة واحدة، ولكن لا يسمح بتكرارها، وكل ذلك يعني أننا بصدد* ***توفيقة دون التكرار.***

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = \mathbf{3}$$

~~(a , a)~~ (a , b) (a , c) ~~(b , a)~~ ~~(b , b)~~ (b ,c) ~~(c , a)~~ ~~(c , b)~~ ~~(c , c)~~

يمكن محاكاة التوفيقات دون تكرار بعملية سحب (دفعة واحدة) لـ k كرة من صندوق به n كرة **بدون إرجاع**.

ملاحظة: هناك بعض الطرق والحيل التي تسهل حساب هذا النوع من التوفيقات، أنظر بعضا من هذه الطرق في الملحق رقم 01.

2. **التوفيقات مع التكرار:** هي "سحب" لـ k عنصرا مختارة من بين n عنصرا، حيث **يمكن** للعناصر أن تتكرر (أي أن السحب هنا يكون مع الإرجاع)، ولا أهمية للترتيب بينها. وتحسب كما يأتي:

$$C_{n+(k-1)}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

مثال8: *صندوق به ثلاث كريات طُبع عليها الأحرف .a, b, c ، سحبنا كرتين متتاليتين مع الإرجاع، كم كلمة ذات حرفين يمكن الحصول عليها دون الالتفات للترتيب؟*

الجواب: *: نلاحظ أن بعض عناصر المجموعة n فقط تُستعمل في الترتيب (جزء من الكل)، وأن ترتيبها غير مهم، و يسمح بتكرارها لأن السحب تم بالإرجاع، وكل ذلك يعني أننا بصدد* ***توفيقة مع التكرار.***

$$C_{3+(2-1)}^2 = C_4^2 = \frac{4!}{2!\,(3-1)!} = \mathbf{6}$$

(a , a) (a , b) (a , c) ~~(b , a)~~ (b , b) (b ,c) ~~(c , a)~~ ~~(c , b)~~ (c , c)

ملاحظة: التوفيقة مع التكرار لـ k عنصرا مختارة من بين n عنصرا، هي نفسها التوفيقة بدون تكرار لـ k عنصرا مختارة من بين $n+(k-1)$ عنصرا.