حل السلسلة الخامسة :نظرية الإنتاج

✓حل التمرين 01 :

1 / **حساب الإنتاج الحدي : "MpL" :و الإنتاج المتوسط" ApL " :**

لدينا : $MpL = \frac{\Delta PT}{\Delta L}$ ، $ApL = \frac{PT}{L}$

L	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Q(PT)	5	15	30	40	49	54	56	58	58	55
ApL	5	7,5	10	10	9,5	9	8	7,25	6,44	5,5
MpL	5	10	15	10	9	5	2	2	0	−3

2/ رسم بيانيا كل من الإنتاج الكلي (PT) و الإنتاج الحدي MpL و المتوسط ApL :

3 / مراحل الإنتاج الثلاثة :

المرحلة I : مرحلة التزايد بمعدل متزايد :

- بالنسبة لـ "Q" يتزايد بمعدل متزايد حتى يصل إلى نقطة الانعطاف L=3

$$L = 3 \longrightarrow L = 0$$

- بالنسبة لـ " ApL " يتزايد بمعدل متزايد و يكون دائما تحت
- بالنسبة لـ "MpL" يكون في تزايد حتى يصل إلى أعظم قيمة له (L = 3)

المرحلة II :مرحلة التزايد بمعدل متناقص :

- بالنسبة لـ Q يبدأ في التحول من نقطة التزايد بمعدل متزايد إلى التزايد بمعدل متناقص حتى يصل إلى أعظم قيمة له
- بالنسبة لـApL يكون في تزايد حتى يصل إلى أعظم قيمة له L = 4 ثم يبدأ في التناقص .
- بالنسبة لـ MpL يبدأ في التناقص في المجال الموجب و ذلك بدءا من أعظم نقطة L = 3 إلى أن يصل إلى L = 9 أي انعدامه .

و في هذه المرحلة يكونMpL = ApL

المرحلة III : مرحلة التناقص

$$L = 9 \longrightarrow L = \infty$$

- بالنسبة لـ Q يبدأ في التناقص تماما في المجال الموجب .
- بالنسبة لـ ApL كذلك يكون في تناقص تماما .
- بالنسبة لـ MpL يبدأ في تناقص في المجال السالب و ذلك ابتدءا من انعدامه MpL∞ .

✓ حل التمرين 02 :

1 / **كتابة معادلة دالة الإنتاج :**

بما أنه يوجد عنصر إنتاجي واحد فقط متغير و هو عدد العمال "L" و باقي العناصر ثابتة فإننا بصدد الفترة القصيرة للإنتاج و بالتالي فإن دالة الإنتاج تكون بالشكل التالي :

$$Q = \int (L, K') , K \quad \text{ثابت}$$

2 / إكمال الجدول و إيجاد كل من :ApL ، MpL:

$$ApL = \frac{Q}{L}, MpL = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$$

L	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Q	4	9	18	30	47	67	86	99	110	119	126	119	110
ApL	4	4.5	6	7.5	9.4	11.16	12.28	12.38	12.22	11.9	11.45	9.91	8.46
MpL	—	5	9	12	17	20	19	13	11	9	7	−7	−9

3 / التمثيل البياني لكل من الإنتاج الكلي "Q" و الحدي "MpL" و المتوسط " ApL" :

4 / تحليل المراحل الثلاثة للإنتاج :

المرحلة I : مرحلة التزايد بمعدل متزايد : MpL = ApL ⟶ L = 0

<=>L = 0⟶ L = 8

و تمثل مرحلة تزايد الإنتاج الحدي تماما (من نقطة الأصل إلى أن يصل الإنتاج الحدي إلى أعظم قيمة له (L = 6 (L = 0)

و القانون السائد في هذه المرحلة هو قانون تزايد الغلة .

المرحلة II : مرحلة التزايد بمعدل متناقص MpL = 0 و ApL =MpL

L = 8 ⟶ L = 11

و تمثل مرحلة تناقص الإنتاج الحدي في المجال الموجب (من أعظم قيمته لـ MpL إلى أن ينعدم (L = 11 L = 6) و القانون السائد في هذه المرحلة هو قانون تناقص الغلة و هو قانون يعبر عن تناقص الإنتاج الحدي MpL في المجال الموجب و هو قانون خاص بالفترة القصيرة .

المرحلة III : مرحلة التناقص التام: ∞ ⟶ ApL = 0

L =11 ⟶ ∞

و تمثل دالة تناقص الإنتاج الكلي عندما يكون الإنتاج الحدي في حالة تناقص في المجال السالب و القانون السائد هو قانون تناقص الغلة في المجال السالب .

✓ **حل التمرين 03 :**

1 / ملء الفراغات ثم التمثيل بيانيا كل من : Q , ApL,MpL :

$$ApL = \frac{Q}{L}$$

$$MpL = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$$

L	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Q	8	24	34	40	44	46	47	47	43
ApL	8	12	11,33	10	8,8	7,66	6,71	5,87	4,77
MpL	—	16	10	6	4	2	1	0	−4

2- مراحل الانتاج الثلاثة :

- المرحلة I : مرحلة التزايد بمعدل متزايد L = 2 ⟶ L = 1
- المرحلة II : مرحلة التزايد بمعدل متناقص MpL = 0 / MPL = ApL

L = 2 ⟶ L = 8

⟶ L = 8 L = ∞ مرحلة التناقص : III المرحلة –

3/ متى يتساوى الإنتاج الحدي "MpL" و الإنتاج المتوسط "ApL" :

تقريبا يكون MpL = ApL عند القيمة Q = 2,8 و عموما يتساوى MpL و ApL في أعظم قيمة لـ "ApL":

4 / شرح قانون تناقص الغلة :

هو قانون خاص بالفترة القصيرة ثابت K , Q = Y (L , K')

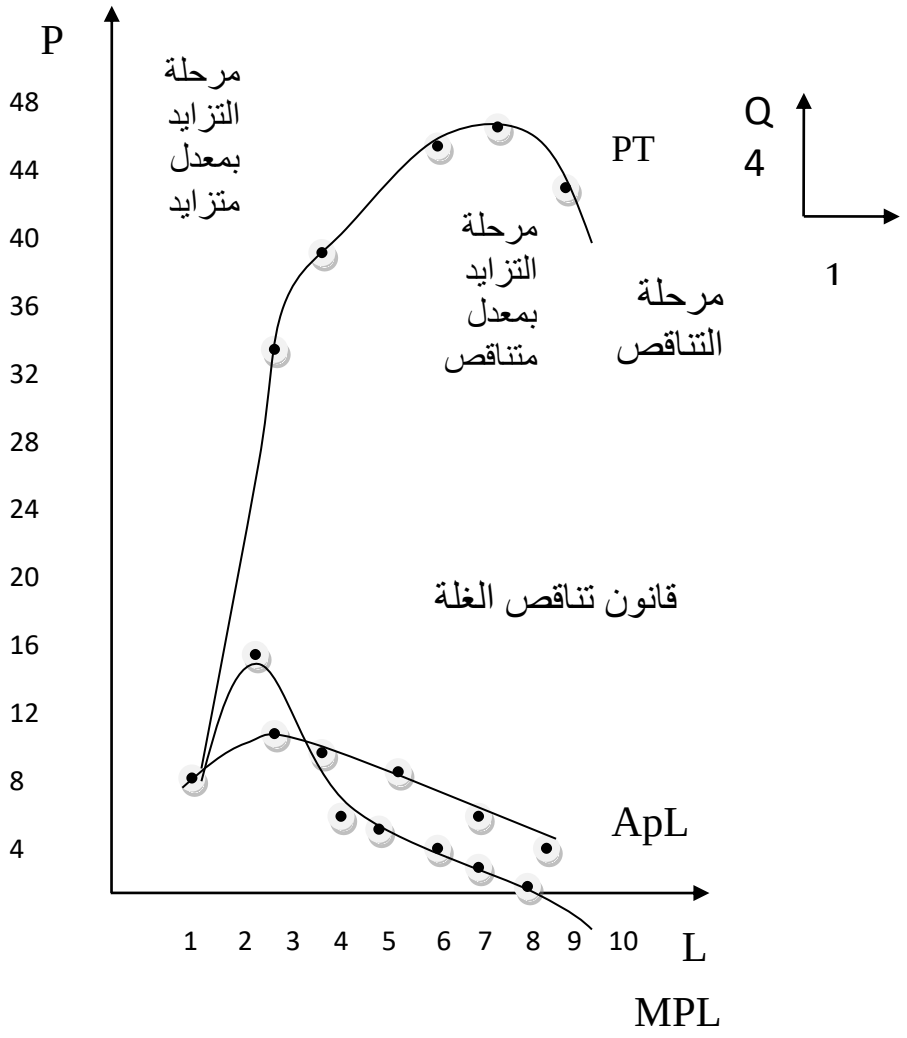
و هو قانون مرتبط بحالة منحنى الإنتاج الحدي "MpL" الذي يكون في حالة تناقص في المجال الموجب و يبدأ من أعظم قيمة لـ :MpL إلى انعدامه و يختار هذا القانون لأن المنتج يختار فيه قراراته الإنتاجية في المنطقة المفصلة اقتصادي « المرحلة الثانية » .

- ملاحظة :

هناك قانونين آخرين يوجد في الفترة القصيرة و هما :

– قانون تزايد الغلة : و عموما تكون في المرحلة 1 من مراحل الإنتاج .

– قانون تناقص الغلة السالبة : و عموما تكون في المرحلة 3 من مراحل الإنتاج و لكن لا يستطيع المنتج اتخاذ قراراته الإنتاجية .



منحنيات الإنتاج الكلي و الحدي و المتوسط

✓ **حل التمرين 04 :**

$ApL = \frac{Q}{L}$	$MpL = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$	Q(PT)	L
0	-	0	0
10	10	10	1
12.5	15	25	2
12.33	12	37	3
11.75	10	47	4
11	8	55	5
10	5	60	6

9	3	63	7
8	1	64	8
7.11	0	64	9
6.3	−1	63	10

✓ **حل التمرين 05 :**

1 / تحديد تابع الإنتاجية الحدية للعمل MpL :

$$ApL = 30 + 12L - L^2$$

لدينا : $ApL = \frac{Q}{L} \Rightarrow Q = ApL \cdot L$

و منه $Q = 30L + 12L^2 - L^3$

$$\boxed{Q = 30L + 12L^2 - L^3}$$

و لدينا كذلك $MpL = \partial Q/\partial L$

و منه

$$\boxed{L = 30 + 24\,L - 3\,L}$$

2 / تحديد عدد مناصب العمل الموفرة في حدود المنطقة I و II :

في المنطقة I و II لدينا : $MpL = ApL$

$$30 + 24L - 3L^2 = 30 + 12\,L - L^2$$

$$24L - 3L^2 - 12L + L^2 = 0$$

$$12L - 2L^2 = 0$$

$$2L(6L - L) = 0$$

⇨

$$\begin{cases} 2L = 0 \\ 6 - L = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} L = 0 \text{ مرفوض} \\ L = 6 \text{ مقبول} \end{cases}$$

إذن عدد مناصب العمل في المنطقة I و II هو 6 .

3 / عدد مناصب العمل في حدود المنطقة I و III :

في حدود المنطقة I و III لدينا : : $MpL = 0$

$$30 + 24L - 3L^2 = 0$$

$$-3L^2 + 24L + 30 = 0$$

بما أن المعادلة من الدرجة الثانية نحسب المميز :

$$\Delta = B^2 - 4A \cdot C$$

$$\sqrt{\Delta} = 936 \ , (24)^2 - 4(-3)(30) = \Delta = 30{,}59$$

$$L_1 = \frac{B - \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{-24 - 30{,}59}{-6} = 9{,}09$$ مقبول

$$L_2 = \frac{B + \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{-24 + 30{,}59}{-6} = -1{,}09$$ مرفوض

إذن عدد مناصب العمل في المنطقة I و II هو 9 مناصب .

الشرط الكافي :

$$\begin{vmatrix} V_{LL}'' & V_{LK}'' & V_{L\lambda}'' \\ V_{KL}'' & V_{KL}'' & V_{K\lambda}'' \\ V_{\lambda L}'' & V_{\lambda K}'' & V_{\lambda\lambda}'' \end{vmatrix} > 0 \quad H = \begin{vmatrix} 21L^{-1,3}K^{93} & 21\,L^{-0,3}K^{0,7} - 50 & \\ 21\,L^{-0,3}K^{-0,3} - 21L^{0,7}K^{1,7} - 100 & & \\ -50 & -1000 & 0 \end{vmatrix} >$$

$$\begin{vmatrix} -0{,}37 & 1{,}76 & -50 \\ 1{,}76 & -8{,}23 & -100 \\ -50 & -100 & 0 \end{vmatrix} > 0 \quad H = -0{,}37 \begin{vmatrix} -8{,}23 & 100 \\ -100 & 0 \end{vmatrix} -$$

$$1{,}76 \begin{vmatrix} 1{,}76 & -100 \\ -50 & 0 \end{vmatrix} + (-50)$$

$$\begin{vmatrix} 1{,}76 & -8{,}23 \\ -50 & -100 \end{vmatrix} = 41875 > 0$$

3 / طبيعة غلة الحجم :

$$Q = y(L,K) = 100\,L^{0,7}.L^{0,3}$$

$$Q = y(\lambda L\ ,\ \lambda K) = 100\,(\lambda L)^{0,7}\ ,\ (\lambda K)^{0,3}$$

$$Q = 100\lambda^{0,7}L^{0,7}\ ,\ \lambda^{0,3}K^{0,3} =$$

$$\lambda\left(100\,L^{0,7}\,K^{0,3}\right) = \lambda Q \iff 1 = \lambda$$

إذن الدالة متجانسة من الدرجة I إذن غلة الحجم ثابتة .

4 / إيجاد المعدل الحدي للإحلال التقي عند نقطة التوازن :

لدينا : $TMST_{\lambda K} = \frac{PL}{PK} = \frac{MpL}{MPK}$

بما أن : PL = 50 , PK = 100

بالتعويض نجد 0,5 $= \frac{50}{100} = \frac{PL}{PK} = TMST_{\lambda K}$

$$TMST_{\lambda K} = 0{,}5$$

<=>

5 / تحديد قيمة المرونة الكلية للإنتاج :

$$EL = EK + EL \Rightarrow EL = \frac{SQ}{SL} \cdot \frac{L}{Q} = \frac{MPL}{MPL} = \frac{70L^{-0,3}K^{0,3}}{100L^{-0,3}K^{0,3}} = 0,7$$

$$EK = \frac{SQ}{SK} \cdot \frac{K}{Q} = \frac{MPK}{APK} = \frac{30L^{0,7}K'^{0,7}}{100L^{0,7}K'^{0,3}} = 0,3$$

المرونة الكلية للإنتاج1 = E = 0,7 + 0 ,3

إيجاد العلاقة بين $TMST_{\lambda K}$ و المرونات الجزئية :

$$TMST_{\lambda K} = \frac{MpL}{MPK}$$

$$EL = \frac{MpL}{MPK} \Rightarrow MPL = EL \cdot APL$$

$$EK = \frac{MpK}{APK} \Rightarrow MPK = EK \cdot APK$$

$$\boxed{TMST_{\lambda K} = \frac{EL\ APL}{EK\ APK}}$$

6 / المنطقة المفضلة اقتصاديا :

هي المنطقة II نظرا لأن MPL و APL موجبين رغم تناقصهما :

خصائص المنطقة I : عدد العمال قليل و رأس المال كبير و بالتالي MPL كبير و MPK قليل .

خصائص المنطقة III : عدد العمال كبير و رأس المال قليل و بالتالي MPL قليل و MPK كبير .

خصائص المنطقة II : تكون فيها إنتاجية رأس المال و العمل موجبان و متناقصان في المجال الموجب و هذا فإن المنتج تتركز قراراته الرشيدة في المرحلة و هي المنطقة المفضلة اقتصاديا .

✓ **حل التمرين 06 :**

1 / إيجاد $TMST_{L,K}$ بين النقط المتعاقبة في حدود المدى لكل منحنى :

- بما أنه يوجد عنصرين متغيرين "L,K" فإننا بصدد الفترة الطويلة و بذلك تكون دالة الإنتاج من الشكل :

$$\boxed{Q = f(L,K)}$$

و لدينا المعدل الحدي له خلال التقى عند نقطة التوازن :

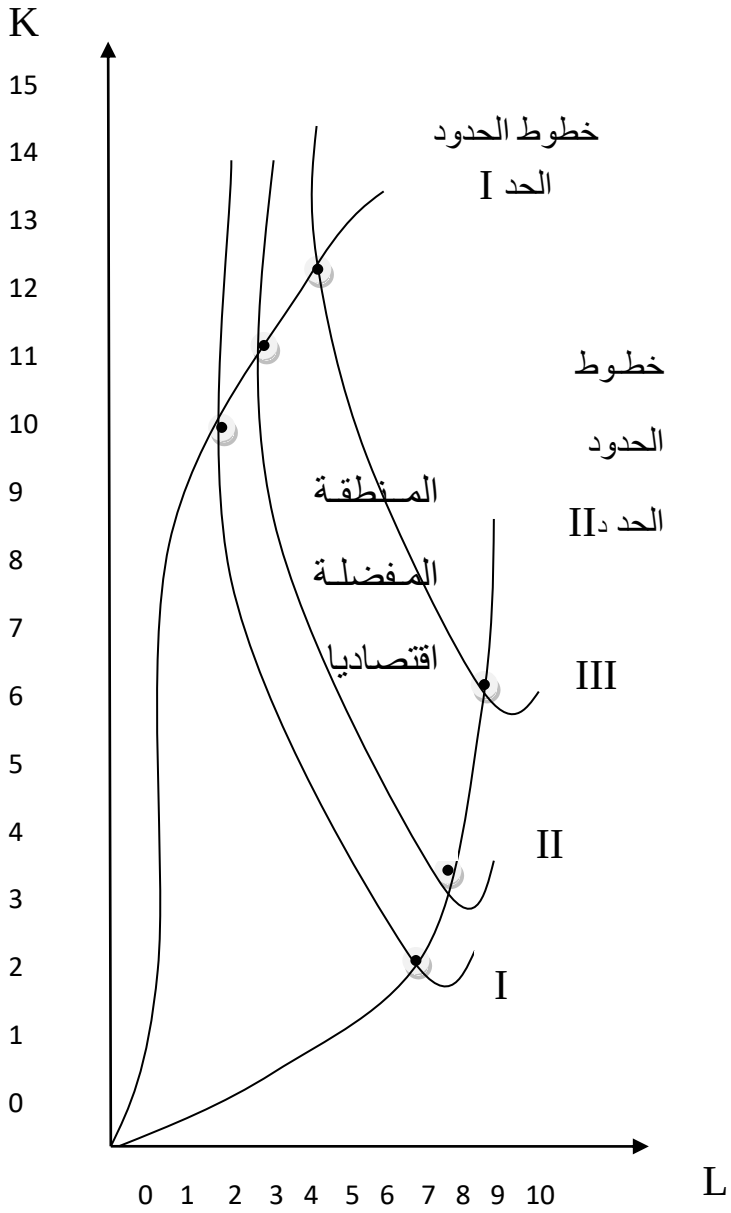
$$\boxed{TMST_{\lambda K} \frac{SK}{SL} = \frac{-\Delta K}{\Delta L} = \frac{MPL}{MPK} =}$$

I			II			III		
L	K	$TMST_{\lambda K}$	L	K	$TMST_{\lambda K}$	L	K	$TMST_{\lambda K}$
3	14	—	4	14	—	5.5	15	—
2	10	-4	3	11	-3	5	12	$-6+$
3	6	4	4	8	3	5.5	9	6
4	4.5	1.5	5	6.3	1.7	6	8.3	1,2
5	3.5	1	6	5	1.3	7	7	1,3
6	3	0.5	7	4.4	0.6	8	6	1
7	2.7	0.3	8	4	0.4	9	5.6	0,4
8	3	-0.3	9	4.4	$-0,4$	10	5	$-0,4$

2 / رسم هذه المنحنيات و تبيين خطوط الحدود و مناطق الإنتاج و تحديد المنطقة المفضلة اقتصاديا :

المنطقة المفضلة اقتصاديا : هي التي يكون فيها $TMST_{\lambda K}$ موجب و يمكن القول أن من خصائص هذه المنحنيات :

- ميلها سالب لهذا يجلسه ظاهرة الإحلال و هذا في المنطقة الاقتصادية .
- محدبة باتجاه نقطة الأصل و هي الحالة الوحيدة التي يكون فيها المعدل الحدي للإحلال التقنى متناقص .
- منحنيات الناتج المتساوي لا تتقاطع أبدا .



منحنيات الناتج المتساوي

✓ **حل التمرين 07 :**

لدينا دالة الإنتاج $Q = \frac{aK^2 L - bK^3}{cL^2}$

من الشكل $Q = y(L,K)$

1/ **ماذا يمكن القول عن غلة الحجم لهذه الدالة :**

باستعمال طريقة تجانس دالة الإنتاج من الشكل :

$$Q = y(\lambda L, \lambda K) = \lambda^{n} Q$$

إذا كان: $h = 1$ غلة الحجم ثانية

$\lambda > 1$ غلة الحجم متزايدة

$\lambda > 1$ غلة الحجم متناقصة

$$Q = \frac{a(\lambda k)^2(\lambda L) - b(\lambda K)^3}{c(\lambda L)^2} = \frac{a\lambda^2 K^2 .\lambda L - b .\lambda^3 .K^3}{c\lambda^2 L^2}$$

$$= \frac{.\lambda^2 (a.K^2\lambda L - b\lambda .K^3)}{\lambda^2 cL^2} = \frac{\lambda(akL^2 - bK^2)}{cL^2}$$

إذن غلة الحجم ثابتة <= 1= λ

2 / إيجاد دالة الإنتاج الكلي للعمل :ثابت K

$$Q = y(L, K_\circ)/K_\circ = K \text{ , } Q = \frac{aK_\circ^2 - bK_\circ^3}{cL^2}$$

3 / تحديد المنطقة الفعالة للإنتاج :

المنطقة الفعالة للإنتاج تكون دائما فيها $TMST_{L,K}$ موجب

$$TMST_{L,K} > 0 \Rightarrow \frac{MpL}{MpK} > 0 \Rightarrow MpL > 0 \text{ و } MpK > 0$$

$$MpL > 0 <=> \frac{SQ}{SL} > 0$$

$$<=> (aK^2)(cL^2) - (2cl)(aK^2 L - bK^3(cL^2)^2$$

$(cL^2)^2 > 0$ دائما موجب

$$-acK^2L^2 + 2cbLK^3 > 0$$

$$\frac{acK^2L^2}{cK^2L} < \frac{2cbLK^3}{cK^2L}$$

$$aL < 2bK <=> 2bK > aL => \frac{2bK}{2bL} > \frac{aL}{2bL} <=>$$

$$\boxed{\frac{K}{L} > \frac{a}{2b}}$$

$$MpK > 0 <=> \frac{SQ}{SK} > 0 <=> \frac{2aKL - 3bK^2 (cL^2)}{(cL^2)^2}$$

$$= 2aKL - 3bK^2 > 0 <=> 2aKL > 3bK^2$$

$$2aKL - 3bK^2 > 0 <=> 2aKL > 3bK^2$$

$$\frac{2aKL}{3bKL} > \frac{3bK^2}{3bKL}$$

$$<=> \frac{2a}{3b} > \frac{K}{L} <=> \boxed{\frac{K}{L} < \frac{2a}{3b}}$$

و منه نستنتج :

$$\frac{2a}{3b} > \frac{a}{2b}$$

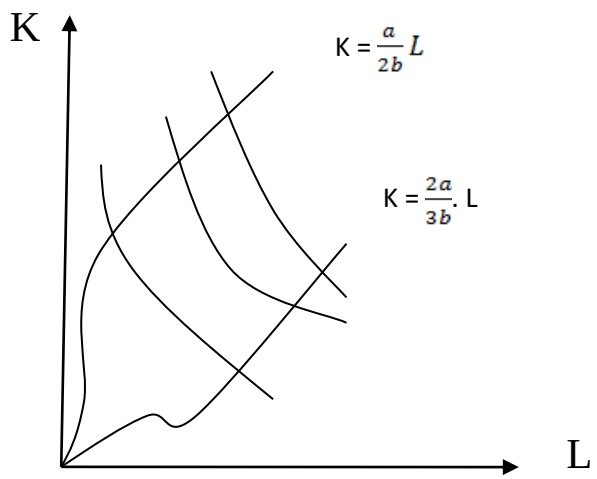
$\frac{K}{L}$	$\frac{a}{2b}$	$\frac{2a}{3b}$	
MpL	—	+	+
MpK	+	+	—
$TMST_{L,K}$	—	+ $TMST_{L,K} > 0$	—

إذن المنطقة المفضلة اقتصاديا هي لما $TMS_{L,K} > 0$ أي عندما يكون :

$$\boxed{\frac{a}{2b} < \frac{K}{L} < \frac{2a}{3b}}$$

4 / إيجاد معادلة خطي الحدود لهذه المعادلة و تمثيلها بيانيا :

- معادلة الحد الأول معادلة المسار $\frac{K}{L} = \frac{a}{2b} => K = \frac{a}{2b}$.L
- معادلة الحد الثاني معادلة المسار $\frac{K}{L} = \frac{2a}{3b} => K = \frac{2a}{3b}$.L



✓ **حل التمرين 08 :**

$$Q = \frac{1}{2} L^{\alpha} K^{B} T^{\delta}$$

1 / الشرط الواجب توفره لكي تصبح هذه الدالة : دالة كوب دوغلاس :

$Q = \int(L,K) = b\,.L^{\alpha}K^{B}\,.T^{\delta}$ بما أن الدالة من الشكل K^{B}

يجب توفر شرط و هو $\alpha, B, \delta > 0$ حتى تكون كوب دوغلاس .

حيث $\alpha + B + \delta = 1$ ثابتة / $\alpha + B + \delta > 1$ متزايدة / $\alpha + B + \delta < 1$ متناقصة .

2 / استنتاج دوال الإنتاجية المتوسطة و الإنتاجية الحدية لـ (L,K) :

الإنتاجية المتوسطة $ApL_L = \frac{Q}{L} = \frac{L^{\alpha}K^{B}.T^{\delta}}{2L} = \frac{1}{2}L^{\alpha-1}K^{B}.T^{\delta}$

لـ L,K $= \frac{Q}{K} = \frac{L^{\alpha}K^{B}.T^{\delta}}{2K} = \frac{1}{2}L^{\alpha}K^{B-1}.T^{\delta} ApL_K$

الإنتاجية الحدية لـ L, K $MpL_L = \frac{SQ}{L} = \frac{\alpha}{2L} = L^{\alpha-1}K^{B}.T^{\delta}$

$$MpL_K = \frac{SQ}{K} = \frac{B}{2}L^{\alpha}K^{B-1}.T^{\delta}$$

3 / المعدل الحدي للإحلال التقني $TMST_{L,K}$:

$$TMST_{L,K} = \frac{MpL}{MpK} = \frac{\frac{\alpha}{2}L^{\alpha-1}K^{B}.T^{\delta}}{\frac{B}{2}L^{\alpha}K^{B-1}.T^{\delta}} = \frac{\alpha K}{BL}$$

$$\boxed{TMST_{L,K} = \frac{\alpha K}{BL}}$$

4 / حساب مرونة كل عنصر من عناصر الإنتاج و مرونة الإنتاج الكلية :

لدينا مرونة الإنتاج الكلية : E = EL + EK + ET

$$EL = \frac{\Delta Q}{\Delta L}.\frac{L}{Q} = \frac{MPL_L}{APL_L} = \frac{\frac{\alpha}{2}L^{\alpha-1}K^{B}.T^{\delta}}{\frac{1}{2}L^{\alpha-1}K^{B}.T^{\delta}} = \alpha = 0{,}4$$

$$EM = \frac{\Delta Q}{\Delta K}.\frac{K}{Q} = \frac{MPL_K}{APL_K} = \frac{\frac{B}{2}L^{\propto}K^{B-1}.T^{\delta}}{\frac{1}{2}L^{\propto}K^{B-1}.T^{\delta}} = \beta = 0,4$$

$$ET = \frac{\Delta Q}{\Delta T}.\frac{T}{Q} = \frac{MPL_T}{APL_T} = \frac{\frac{T}{2}L^{\propto}K^{B}.T^{\delta-1}}{\frac{1}{2}L^{\propto}K^{B}.T^{\delta-1}} = \delta = 0,2$$

$$\propto + \beta + \delta = 0,4 + 0,4 + 0,2 = 1$$

مرونة الإنتاج الكلية 1

e = 1

5 / حساب حجم الإنتاج : الذي تعطيه التوليفة T = 2، L = 100 ، K = 200

$\propto = 0,4$ $\beta = 0,4$ $\delta = 0,2$

$$Q = \frac{1}{2}L^{\propto}K^{B}.T^{\delta} = \frac{1}{2}(100)^{0,4}(200)^{0,4}(2)^{0,2} = 30,17$$

6 / حساب الزيادة و النقصان في Q حيث :

نقصان رأس المال5% $\frac{\Delta}{K}$ ، زيادة العمل 10 % $\frac{\Delta L}{L}$

لدينا: $EL = \frac{\Delta Q}{\Delta L}.\frac{L}{Q} \longrightarrow EL = \frac{\Delta Q}{QL}.\frac{L}{\Delta L} \longrightarrow \frac{\Delta Q}{\Delta L} = EL.\frac{\Delta L}{L}$

$EK = \frac{\Delta Q}{\Delta K}.\frac{K}{Q} \longrightarrow EK = \frac{\Delta Q}{QK}.\frac{K}{\Delta K} \longrightarrow \frac{\Delta Q}{\Delta K} = EK.\frac{\Delta K}{K}$

$+\frac{\Delta Q}{K} = EL.\frac{\Delta L}{L} + EK.\frac{\Delta K}{K}$ و لدينا كذلك $\frac{\Delta Q}{Q}.\frac{\Delta \beta}{L}$

$= 0,4(10\ \%) + 0,4(5\%) = 0,2$

أي أن الإنتاج زاد بـ 2 % و منه

$$\frac{\Delta Q}{QL} = 2\ \%$$

✓ **حل التمرين 08 :**

لدينا دالة الإنتاج من الشكل : $Q = f(L,K) = 100\ L^{0,7}\ K^{0,3}$

CT = 2500, PL = 50 , PK = 100

1 / إيجاد حجم الإنتاج الذي يمكن أن يصله هذا المنتج و التأكد باستعمال الشرط الكافي :

$V = Q + \lambda(cT - LpL1 - KpK)$

$V = 100L^{0,7}\ K^{0,3} + \lambda(2500 - 50L - 100K)$

$V'_L = 70\ L^{-0,3} \times K^{+0,3} - 50\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{70L^{-0,3} \times K^{0,3}}{50}$ ——— (1)

$V'_K = 30\ K^{-0,7} - L^{0,7} - 100\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{30L^{0,7} \times K^{-0,7}}{100}$ ——— (2)

$V'_\lambda = 2500 - 50L - 100K = 0$ ——— (A)

من (1) و (2) نجد: $\frac{70L^{-0,3}\times K^{+0,3}}{50} = \frac{30\,K^{-0,7}-L^{0,7}}{100}$

$$\frac{7}{5}L^{-0,3}\times K^{+0,3} =>$$

بضرب الطرفين في 10 نجد: $14\frac{K^{+0,3}}{L^{0,3}} = 3\,.\frac{L^{0,7}}{K^{0,7}}$

$$14K = 3L \Rightarrow L = \frac{14}{3}K \quad \text{———} \quad *$$

بتعويض * في معادلة الميزانية نجد :

$$cT = LpL + KpK\ K) + 100K\frac{14}{3}2500 = 50(=>$$

$$K=> 2500 = \frac{100}{3}K + 100K\frac{700}{3} = 2500$$

$$=>K = \frac{7500}{1000} = 7,5 \qquad \boxed{K = 7,5}$$

بالتعويض في X نجد :

$$L=\frac{14}{3}\ 7,5 = 35 \qquad \boxed{L = 35}$$

و منه $Q = 100(35)^{0,7}(\ 7,5\ )^{0,3} = 2204,7$

✓ **حل التمرين 09 :**

$$Q = 100L^{0,7}.\ K^{0,3}$$

$$2500 = 50L + 100K.....(*)$$

1/ حجم الإنتاج :

شرط التوازن :

$$= \frac{70L^{-0,3}\ .K^{+0,3}}{L^{0,7}-K^{-0,7}} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} \qquad \boxed{:\frac{MpL}{MpK} = \frac{PL}{PK}}$$

$$=> \frac{7K}{3L} = \frac{1}{2} => \qquad \boxed{K = \frac{3L}{14}}$$

نعوض في (*) نجد :

$$2500 = 50L + 100(\frac{3L}{14})$$

$$2500 = 50L + \frac{300L}{14} = \frac{100L}{14} \qquad \boxed{L = 35}$$

$$=> \qquad \boxed{K = 7,5}$$

$$(\ L, K\ ) = (\ 35, 7,5\ )$$

$$Q = 100(\ 35\ )^{0,7}.\ (\ 7,5)^{+0,3} = 2203,32$$

2/هل الدالة متجانسة ، و ما درجة تجانسها مستنتجا طبيعة الحجم :

- $Z = 100L^{0,7}K^{0,3} . \lambda(2500 - 50L - 100K)$

$$Z'_L = 70\, L^{-0,3}.K^{0,7} - 50\,\lambda = 0$$

$$Z'_u = 30L^{0,7} . K^{-0,7} - 100\,\lambda = 0$$

$$Z_\lambda = 2500 - 50\,\lambda - 100K = 0$$

- تجانس دالة :

$$Q = (\lambda L , \lambda K) = 100(\lambda L)^{0,7}.(\lambda K)^{0,3} = 100\lambda^{0,7}L^{0,7}.\lambda^{0,3}K^{0,3}$$

$$Q = (\lambda L , \lambda K) = \lambda Q$$

الدالة متجانسة من الدرجة الأولى .
إذن غلة الحجم ثابتة .

$$\begin{vmatrix} Z''_{LL} & Z''_{KL} & Z''_{L\lambda} \\ Z''_{KL} & Z''_{KK} & Z''_{K\lambda} \\ Z''_{\lambda L} & Z''_{\lambda K} & Z''_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} > 0 \; . H = \begin{vmatrix} -0,37 & 1,76 & -50 \\ 1,76 & -8,23 & -100 \\ -50 & -100 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} -0,37 & 1,76 \\ 1,76 & -8,23 \\ -50 & -100 \end{matrix}$$

\- \- \- + + +

الحل الأمثل $H = 0 + 8800 + 8800 + 205\,75 + 3700 + 0 = 41875 > 0$

3/ $TMST_{L,K}$ عند نقطة التوازن :

$$TMST_{L,K} = \frac{MPL}{MPK} = \frac{7K}{3L}$$

$$= \frac{7}{3,35} = 0,5$$

4 / حساب المرونة الكلية لـ L ,K للإنتاج :

$$E = E_L + E_K = 0,7 + 0,3 = 1$$

5 / تحديد العلاقة بين $TMST_{L,K}$ و E_L و E_K

$$E_L = \frac{MpL}{ApL} \Rightarrow MPL = E_L . APL$$

$$E_K = \frac{MpK}{ApK} = ApK = E_K \text{ .APK}$$

$$TMST_{L,K} = \frac{MpL}{MpK} = \frac{EL.APL}{EK.APK}$$