Chapitre III : Les variables aléatoires

1. Introduction :

Souvent, il est nécessaire d'associer à chaque résultat d'une expérience aléatoire précise une valeur réelle. Donc, la variable aléatoire est l'expression mathématique pour nécessité.

Par exemple, si on a : une expérience de lancer une pièce de monnaie 3 fois successives, donc.

L'ensemble fondamental $\Omega = \{(P,P,P), (P,P,F), (P,F,P), (F,P,P), (F,F,P), (F,P,F), (P,F,F), (F,F,F)\}$.

Supposons qu'on s'intéresse au nombre de faces obtenus à travers 3 lancés.

$(P,P,P) \longrightarrow 0$ i.e $X((P,P,P)) = 0$

$(P,P,F), (P,F,P), (F,P,P) \longrightarrow 1$ i.e $X(P,P,F) = X(P,F,P) = X(F,P,P) = 1$

$(F,F,P)\ (F,P,F), (P,F,F) \longrightarrow 2$ i.e $X(F,F,P) = X(F,P,F) = X(P,F,F) = 2$

$(F,F,F) \longrightarrow 3$. ie $X(F,F,F) = 3$

Définissons

- Définition mathématique de la variable aléatoire :

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilités, on appelle X une variable aléatoire toute application de Ω vers $\mathbb{R}$ telle que :

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\omega \longmapsto X(\omega)$$

ω : événement élémentaire.

La Probabilité d'une v.a

$$\begin{tikzcd} (\Omega, A) \arrow[r, "P"] \arrow[dr, shift left, "X"] & {[0,1]} \\ & V \arrow[ul, shift left, "X^{-1}"] \arrow[u, "P_X"'] \end{tikzcd}$$

$\boxed{V \subseteq \mathbb{R}}$ $\quad P_X = P \circ X^{-1} = P(X^{-1})$

Types des v

L'ensemble des valeurs possibles prises par X est $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ (L'exemple ci-dessus).

Exemple 1:

On lance un dé deux fois successives, Soit X une v.a qui représente la somme des deux chiffres obtenus.

Les valeurs possibles de X sont:

$$X : \Omega = \{1, 2, \dots, 6\} \times \{1, 2, \dots, 6\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$X(\Omega) = \{2, 3, \dots, 12\}$$

$X = 2 \longrightarrow \{(1,1)\}$

$X = 3 \longrightarrow \{(1,2), (2,1)\}$

$\vdots$

$X = 12 \longrightarrow \{(6,6)\}$

3- Types de variables aléatoires:

Soit: $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilités, le type d'une variable aléatoire dépend en grande partie de la nature de l'ensemble $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$.

1) Variable aléatoire discrète:

Si $X(\Omega)$ est un ensemble ~~fini~~ formé de valeurs isolées distincts alors X est une variable aléatoire discrète.

) Variable aléatoire continue:

Si $X(\Omega)$ est un ensemble qui prend toutes les valeurs d'un intervalle de $\mathbb{R}$, alors X est une variable aléatoire continue.

4- Loi de probabilité :

Si X est une v.a discrète qui prend les valeurs $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ avec les probabilités : $\{P(X=x_1), P(X=x_2), \ldots P(X=x_n)\}$ respectivement.

On appelle loi de probabilité la fonction tabulaire suivante : $P_X(x_i) = P(X^{-1}(x_i)) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\})$

x_i	x_1	x_2	x_n
$P(X=x_i)$	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	$P(X=x_n)$

- $\forall x_i \in X(\Omega)$: $P(X=x_i) \geq 0$.
- $\sum_{i=1}^{n} P(X=x_i) = 1$

Exemple 1 :

$P(X=0) = P(\{(P,P,P)\}) = 1/8$ Tq : $P_X(0) = P(X^{-1}(0)) = P(X=0)$

$P(X=1) = P(\{(P,P,F), (F,P,P), (P,F,P)\}) = 3/8$.

$P(X=2) = P(\{(F,F,P), (F,P,F), (P,F,F)\}) = 3/8$.

$P(X=3) = P(\{(F,F,F)\})$.

Alors, on peut écrire la loi de probabilite sous la forme :

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8.

La fonction de répartition :

Soit X une v.a d définie sur Ω, on appelle fonction de répartition associée à X l'application escalier, défini F comme suit :

$$F: \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$
$$x \longmapsto F_X(x) = P\{X \leq x\}$$
$$= P\{(]-\infty, x])\}$$
$$= \sum_{\substack{x_k \in X(\Omega) \\ x_k \leq x}} P(X = x_k)$$

- Les propriétés de cette fonction:

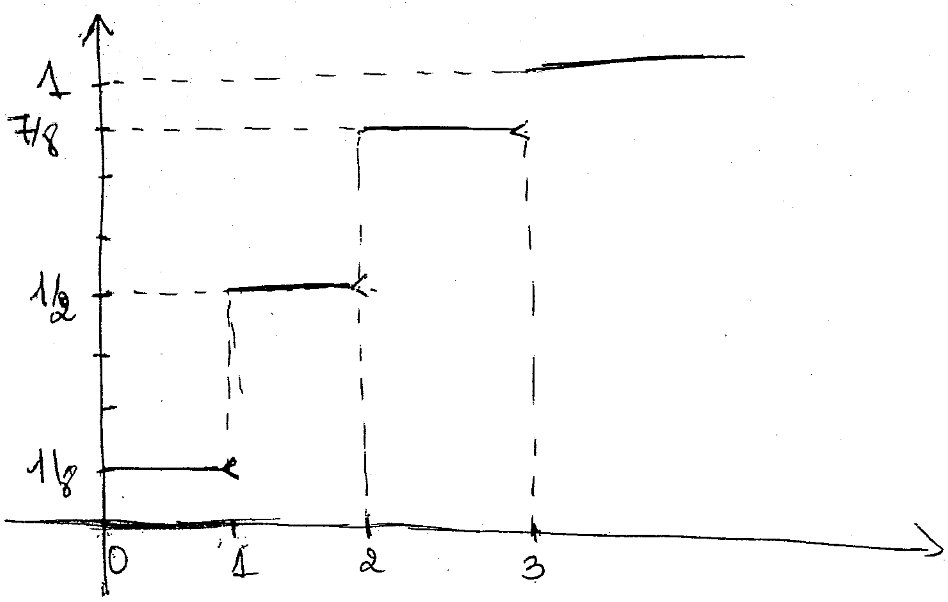
* $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$, * $0 \leq F(x) \leq 1$, si $a < b \Rightarrow F_X(a) \leq F_X(b)$

* $p(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

* F est continue sur $\mathbb{R}/X(\Omega)$ et continue à droite à cha point appartenant à $X(\Omega)$.

Exemple 1:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1/8 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1/2 & \text{si } x \in [1, 2[\\ 7/8 & \text{si } x \in [2, 3[\\ 1 & \text{si } x \in [3, +\infty[\end{cases}$$



اقلب الصفحة

Densité de Probabilité :

Def : si la fct de repartition F_X est dérivable sa dérivée notée par $f_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x}$ s'appelle densité de prob de la v.a reelle X. et on dit aussi que X est absolument continue.

Proposition :

Si X est une v.a. réelle de densité $f_X(x)$ alors :

1°) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$

2°) $f_X(x)$ est positive.

3°) $P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$

4°) $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

5°) $P(X = x) = 0$

6- Espérance:

L'éspérence mathématique pour une v.a. discrète est défini par le nombre :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i P(X = x_i) \quad (X(\Omega) = \{x_1, x_2, ---, x_4\})$$

7- La variance:

La variance pour une v.a discrète est définie par:

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) \quad \text{où}: E(X^2) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 P(X = x_i)$$

8- L'écart type:

L'écart type est définie par: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple 1:

$$E(X) = \sum x_i P(X = x_i) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}.$$

$$V(X) = \sum_i x_i^2 P(X = x_i) - E^2(X)$$

$$= 0^2\left(\frac{1}{8}\right) + 1^2\left(\frac{3}{8}\right) + 2^2\left(\frac{3}{8}\right) + 3^2\left(\frac{1}{8}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Propriétés:

$$\left.\begin{array}{l} - E(aX + b) = aE(X) + b \\ - V(aX + b) = a^2 V(X). \end{array}\right\} \forall a, b \in \mathbb{R}.$$