Université Mohamed Khider de Biskra

Faculté des FSESNV
Département des SM
Année Univairsitaire 2021/2022

Module: Mathématiques 3
Niveau: $2^{ème}$ Année Liscence
Spécialité: Physique

Travaux Dirigés N°5
(SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS)

EXERCICE 1:
Etudier la convergence des séries numériques suivantes:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{n}), \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4n+3}{n+1},$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{n+2^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n}, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)},$$

EXERCICE 2:
Soit la suite des fonctions suivante: $f_n(x) = \dfrac{\sqrt{n}x}{1+\sqrt{n}x^2}, \qquad x \in \left]0, +\infty\right].$

1. Etudier sa convergence simple.
2. Etudier sa convergence uniforme sur $\left]b, +\infty\right], b > 0$.

EXERCICE 3:
Soit la suite des fonctions définie par: $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x}, \qquad n \geq 1.$

1. Etudier sa convergence simple et sa convergence uniforme sur $\left[1, +\infty\right[$.
2. Etudier la convergence simple de la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ sur $\left[1, +\infty\right[$.
3. Montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ converge normalement sur $\left[1, +\infty\right[$.

EXERCICE 4:

I- Déterminer le domaine de convergence de la série entière suivante: $\sum\limits_{n>1} \dfrac{(-1)^n}{n^3} x^n$.

II- On considère la série entière $f(x) = \sum\limits_{n>0} n\,(-2)^n\, x^n$.

- Quel est le rayon de convergence de $f(x)$.
- Donner le rayon de convergence et la somme de le série $g(x) = \sum\limits_{n>0} (-2)^n\, x^n$.
- Déduire que $f(x) = xg^{'}(x)$.

Chargée de Cours

Dr. **OUAAR, F**