جامعة محمد خيضر – بسكرة –

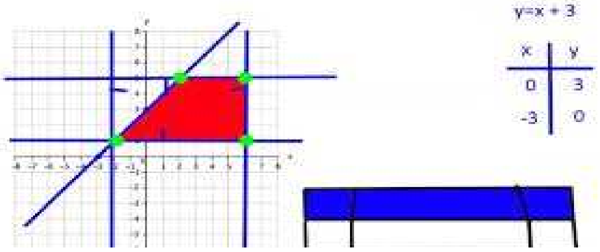
كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

قسم علوم التسيير

مطبوعة بعنوان :

محاضرات وتمارين في مقياس:

موجهة لطلبة السنة الثانية ليسانس : تخصص علوم التسيير



$$f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i-1}^{n} C_i$$

الدكتورة: ليلى بن عيسى

الموسم الجامعي 2022/2021

جامعة محمد خيضر– بسكرة –

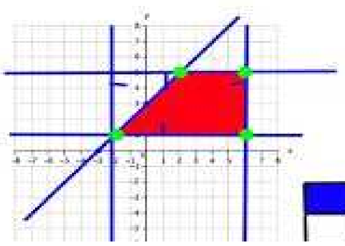
كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

قسم علوم التسيير

مطبوعة بعنوان :

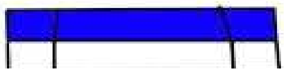
محاضرات وتمارين في مقياس:

موجهة لطلبة السنة الثانية ليسانس : تخصص علوم التسيير



y=x + 3

x	y
0	3
-3	0



$$f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i-1}^{n} C_i$$

الدكتورة: ليلى بن عيسى

الموسم الجامعي 2022/2021

﴿ وَقُلْ رَبِّ زِدْنِي عِلْمًا ﴾

-سورة طه:الآية 114-

فهرس المحتويات

مقـدمـة

تعتبر عملية اتخاذ القرار أهم مرحلة في سيرورة وظيفة التسيير،ففي ظل البيئة الديناميكية التي تميز العالم منذ عقود ومع كثرة المتغيرات التي تؤثر في كافة القرارات الإدارية ،ومع كبر حجم المنظمات وظروف عدم التأكد، بات من الضروري توظيف أساليب تساعد المديرين على اتخاذ القرارات الرشيدة في ظل ظروف وقيود معينة. وفي هذا السياق هناك منهجين يتم اتباعهما لتحليل المشاكل واتخاذ القرارات هما: المنهج النوعي والمنهج الكمي .

حيث يعتمد الأول على خبرة متخذ القرار وحكمه الشخصي المبني على الممارسة العملية والتجربة،وهذا المنهج غير قابل للتطبيق في جميع المواقف والحالات الإدارية التي تحتاج لعملية اتخاذ القرار، وهو الأمر الذي يفرض اللجوء في مثل هذه الحالات للمنهج الكيفي الذي سيصبح المنهج الأكثر ملائمة في بعض الحالات .

وهنا تظهر أهمية الطرق الكمية لحل المشكلة واتخاذ القرار كثاني منهج لاختيار البديل الأمثل اعتمادا على سيرورة وخطوات معينة، ويطلق على الطرق الكمية في الإدارة اصطلاح بحوث العمليات، التي بدأ استخدامها أثناء الحرب العالمية الثانية في مجال العمليات الحربية ،لتمتد بعدها وتشمل العديد من المشاكل الإدارية، التي من أهم فروعها ومكوناتها البرامج الخطية والتي تعرف في السياق الأكاديمي والبحثي برياضيات المؤسسة.

فرياضيات المؤسسة ينظر لها على أنها تطبيق علمي للطرق الرياضية والإحصائية في حل مختلف المشاكل الإدارية والاقتصادية، التي تواجه متخذ القرار في أداء مهامه، والقابلة للتكميم بالدرجة الأولى.

وتتميز رياضيات المؤسسة بالعديد من الأساليب المستخدمة في دراسة مختلف المشاكل الإدارية، لكل منها مجاله الخاص به، نذكر من بينها: البرمجة الخطية، نماذج النقل ... إلخ
وفي هذا السياق وهاته الأهمية، نقدم هاته المطبوعة، التي نأمل من خلالها ومن خلال هذا الجهد المتواضع عرض وتقديم سلسلة من المحاضرات نحاول فيها تقديم أبرز مكونات مقياس رياضيات

المؤسسة، بدءًا بالبرمجة الخطية وخوارزمياتها مرورا بالبرنامج الثنائي(المسألة المعكوسة) وكذا تحليل الحساسية، وصولا لمسائل النقل ، متوخين في ذلك البساطة في الطرح والتعمق في الحل من خلال تقديم أمثلة تطبيقية متنوعة، حيث سنحاول تدعيم كل محور بمجموعة من التمارين التي تصب في فحوى الحالات المختلفة التي يمكن أن يصادفها الطالب في هذا المقياس، بما يكفل له إتقان منهجية الحل في مسائل البرمجة الخطية ومسائل النقل والتعيين.

المحور الأول :

مفاهيم أساسية في البرمجة الخطية

1- مفهوم البرمجة الخطية.
2- متطلبات البرمجة الخطية.
3- تطبيقات البرمجة الخطية .
4- نموذج البرمجة الخطية.
5- أمثلة تطبيقية حول تشكيل نموذج البرمجة الخطية .
6- مسائل مقترحة حول تشكيل النموذج الرياضي.

تمهيد:

يهدف مقياس رياضيات المؤسسة بصورة عامة إلى تعريف الطالب بأسس التحضير العلمي لاتخاذ القرارات، من خلال استخدام وتوظيف الأساليب العلمية في حل مختلف المشاكل الإدارية والإقتصادية التي تحتاج لاتخاذ قرار.

وما يميز رياضيات المؤسسة هو تعدد مجالات استخدامها فلكل مجال أسلوب معين للتحليل، ومن أهم هذه الأساليب التي سنحاول التطرق لها بنوع من التفصيل نذكر :

البرمجة الخطية– نموذج النقل– نموذج التعيين .

I- مفهوم البرمجة الخطية:

تعد البرمجة الخطية من أبسط وأسهل الأساليب الرياضية التي يمكن الإستعانة بها لمعالجة المشاكل التي تواجه المؤسسة الإقتصادية، وهي تندرج –كما سبق الذكر – ضمن ما يعرف بالأساليب الكمية والتي تعرف على أنها: "مجموعة من الأدوات أو الطرق التي تستخدم من قبل متخذ القرار لمعالجة مشكلة معينة، ولترشيد قرار إداري الواجب إتخاذه بخصوص حالة معينة، ويفترض في هذه الحالة توفر القدر الكافي من البيانات المتعلقة بالمشكلة." *(عبد الله السعيد، 2007، صفحة 15)*

وتهدف عموما إلى حل المشاكل والمسائل بتعيين التوليفة المثلى للإنتاج أو غيرها وذلك لتحقيق الأهداف المحددة ولقد شهدت البرمجة الخطية العديد من التعريفات، وهذا حسب مختلف المفكرين والمحللين وميولهم الإقتصادية أو الإداري، .

وقد مثلت سنة 1947 منعرجا هاما في التحليل الكمي والبرمجة الخطية ،حيث وضع العالم جورج دانتزيغ « George Dantzig »، مسألة توزيع الموارد الإقتصادية على استخداماتها المختلفة، في نموذج رياضي متقدم عرف بأسلوب السمبلاكس " Simplex"، لحل مسائل البرمجة الخطية حيث تكون المتغيرات من الدرجة الأولى *(رسول حمزة، 2002، صفحة 1)*.

ولم يتوقف البحث في البرمجة الخطية لا سيما بعد ظهور التكنولوجيات المتطورة والمعلوماتية .

- و**تعرف** البرمجة الخطية بأنها: أسلوب رياضي يساعد على اتخاذ أفضل القرارات المتعلقة بالتوزيع أو التخصيص الأمثل لمجموعة من الموارد المحدودة على مجموعة من الإستخدامات المتعددة، ونلاحظ هنا أن المفهوم يتكون من مصطلحين *(فالته، 2006، صفحة 27)*:

✓ **البرمجة:** وهي مجموعة من الطرق المعينة تساعد على اتخاذ أفضل وهي الجزء التقني لأي دراسة وذلك وفقا لنوعين من التقنيات:

- تقنيات متعلقة بالظروف الأكيدة .
- تقنيات متعلقة بالظروف غير الأكيدة.

✓ **الخطية** :عموما هي العلاقة الرابطة بين متغيرين.

تستعمل البرمجة الخطية كتقنية تتعلق بالظروف الأكيدة وهي تتطلب توافر مجموعة من الشروط لاستخدامها.

- كما **تُعرّف** البرمجة الخطية على أنها أسلوب رياضي يهتم بتخصيص الموارد المتاحة بشكل أمثل على الاستخدامات المختلفة، بهدف تعظيم الأرباح أو تدنية التكاليف *(ابراهيم العبد، 2014، صفحة 44)*

II- متطلبات البرمجة الخطية:

نجد في بعض الأدبيات المتخصصة تحديد بعض الباحثين شروط البرمجة الخطية على النحو التالي: *(بن محمد أبو عمه و أحمد العش، 1990، الصفحات 16-18)*

- تحديد المشكلة تحديدا رياضيا دقيقا بمتغيرات القرار، التي تكون معاملاتها على شكل ثوابت و معلومة مسبقاً، هذا كله لإيجاد دالة الهدف التي يمكنها قياس فعالية المؤسسة من خلال دراسة (الربح، كمية الإنتاج، التكاليف ... إلخ)، و الهدف من البرمجة الخطية هو تعظيم أو تقليل دالة الهدف حسب حاجة النموذج.
- لتحقيق غرض أو هدف البرمجة الخطية في دالة الهدف، يجب مراعاة الموارد المتاحة للمؤسسة أي عدم تجاوزها، وتظهر هذه الخاصية على شكل مجموعة قيود في صورة علاقات رياضية خطية بمتغيرات القرار (معاملاتها عبارة عن ثوابت محددة مسبقا)

وعلاقة كل منها على شكل متباينة غالبا (أو مساواة) للتأكيد على عدم تجاوز الكميات المتاحة من الموارد.

- تتعلق كل من العلاقات الرياضية الخطية ومتغيرات القرار في المسألة المدروسة ببعضها البعض بشكل وثيق، حيث أن أي تغيير من زيادة أو نقصان لأحد هذه المتغيرات يؤثر على مجموع المتغيرات من خلال تغيير بعضها أو كلها.
- إتباع شرط عدم سلبية المتغيرات القرار، أي كميات الإنتاج المنقولة من مركز لآخر التي تكبر أو تصغر دالة الهدف يجب أن لا تكون سالبة، و يساعد هذا الشرط على تحديد منطقة الحلول المقبولة ثم إيجاد الحل الأمثل.
- أن يكون لدينا عدد من المتغيرات التي تؤثر في تغيرها على القرارات المتخذة سواءٌ بالزيادة أو النقصان حسب البرنامج المقترح، و تؤثر هذه الزيادة أو النقصان على الهدف المطلوب تحقيقه.
- يخضع تغير متغيرات القرار لحدود أو قيود تفرضها المواد المتاحة لدينا، و التي يمكن استخدامها في إنتاج كل أو بعض المنتجات، إلا أن طاقات الآلات محدودة ومعروفة والوقت المستغرق للإنتاج يكون أيضا معروفاً ومحدوداً.

وعموما يمكن تحديد ***أهم متطلبات البرمجة الخطية*** فيما يلي:

- وجود هدف تسعى المؤسسة لتحقيقه والذي يعبر عنه بدالة (تخفيض تكاليف،تعظيم أرباح...).
- القيود: هي مجموعة من القيود والشروط التي في ظلها يتم تحقيق الهدف .
- الموارد:يجب أن تكون هناك موارد متاحة للمؤسسة ،ولها استخدامات متعددة ،معبر عنها بمعاملات تقنية.
- إمكانية صياغة المسألة في شكل نموذج رياضي، يحقق العلاقة الخطية حيث ينبغي أن تتوفر العلاقة بين متغيرات الدراسة أو المشكلة، حيث ينظر لهذه العلاقة من منظورين اقتصادي يتمحور في التناسب بين المدخلات والمخرجات ، ورياضي يقصد به أن تكون المتغيرات من الدرجة الاولى .
- شرط عدم السلبية :حيث يشترط البرنامج الخطي أن لا تكون قيمة المتغيرات سالبة.

III- تطبيقات البرمجة الخطية:

تستخدم البرمجة الخطية في العديد من المجالات التي يكون غالبا الغرض فيها اتخاذ القرار حول تحديد أفضل الحلول لمشكلة معينة ، وعليه يمكن استخدام البرمجة الخطية في حل العديد من المشاكل أهمها: *(العلاونة و آخرون، 2000، الصفحات 131-132)*

- ***مشكلة تخطيط الإنتاج:***

تساعد البرمجة الخطية في تحديد الكمية الواجب إنتاجها من سلعة معينة والتي تؤدي الى تحقيق الربح الأعلى، ولان الموارد المتاحة تمتاز عادة بالندرة لكافة المؤسسات فإن البرمجة الخطية تعتبر الوسيلة الفعالة لتوزيع تلك الموارد على السلع المراد إنتاجها بطريقة من شأنها تعظيم أرباح المنشأة.

- ***مشكلة تخطيط الاستثمار:***

تساعد البرمجة الخطية المنشأة او المستثمر على تعظيم أرباحه من خلال توزيع الأموال المتاحة على البدائل الاستثمارية المتاحة بطريقة من شأنها ان تؤدي الى تعظيم الإرباح .ويعني ذلك ان المنشأة تستطيع ان تخطط استثماراتها بشكل يؤدي الى تعظيم الإرباح باستخدام أسلوب البرمجة الخطية.

- ***مشكلة توزيع العاملين:***

تحتاج المنشأة الى توزيع العاملين على المواقع والى تحديد عدد العاملين اللازم بطريقة من شأنها أن تؤدي الى تخفيض التكلفة الى أدنى حدودها.

- ***مشكلة توزيع الإنتاج:***

تساعد البرمجة الخطية المنشأة على توزيع منتجاتها التي تنتجها من خلال عدة مصانع على الأسواق المختلفة وتساعدها أيضا على تخفيض تكلفة نقل المواد من المصانع المتعددة الى الى المخازن المتعددة للمنشأة.

- المشاكل المتعلقة بالإنتاج ،كتحديد التشكيلة الممكنة من مختلف المنتجات وكمياتها في ظل تحقيق هدف محدد،وفي ظل الكميات المتاحة من عوامل الإنتاج.
- تستعمل في اختيار وتعيين الأفراد في المؤسسة (مسألة التعيين).

- توزيع الموارد والمنتجات المتجانسة من مصادر تواجدها نحو أماكن استخدامها (مسألة النقل).
- يمكن استخدام البرمجة الخطية في تخطيط الإشهار ،تخطيط المخزون،المفاضلة بين طرق الإنتاج المتاحة ....إلخ.

IV- نموذج البرمجة الخطية:

يعتبر تشكيل النموذج الرياضي أهم مرحلة لحل مشاكل البرمجة الخطية في مختلف المجالات السابق ذكرها، والنموذج هو ترجمة رياضية للمشكلة .

ويعرف ***النموذج*** على أنه : عبارة عن عينة أو صورة مصغرة لمجتمع معين ويمكن أن يكون صيغة رياضية تحمل مواصفات حالة معينة، من خلال عدد من العلاقات الرياضية تعبر عن المشكلة أو الحالة التي يتم دراستها بشكل أو بأخر. *(محمد مرسي، 2004، صفحة 29)*

ويأخذ النموذج إحدى الصيغتين:

- *تعظيم الأرباح La Maximisation*، والتي ندها عادة لما يكون الهدف تحقيق أقصى العوائد والمداخيل ،تحقيق أقصى إنتاج ،...إلخ.
- *تقليل التكاليف La Minimisation*، والتي تستخدم في الحالة العكسية للتعظيم ،اي عندما يكون الهدف هو تدنية التكاليف لأدنى قيمة لها .

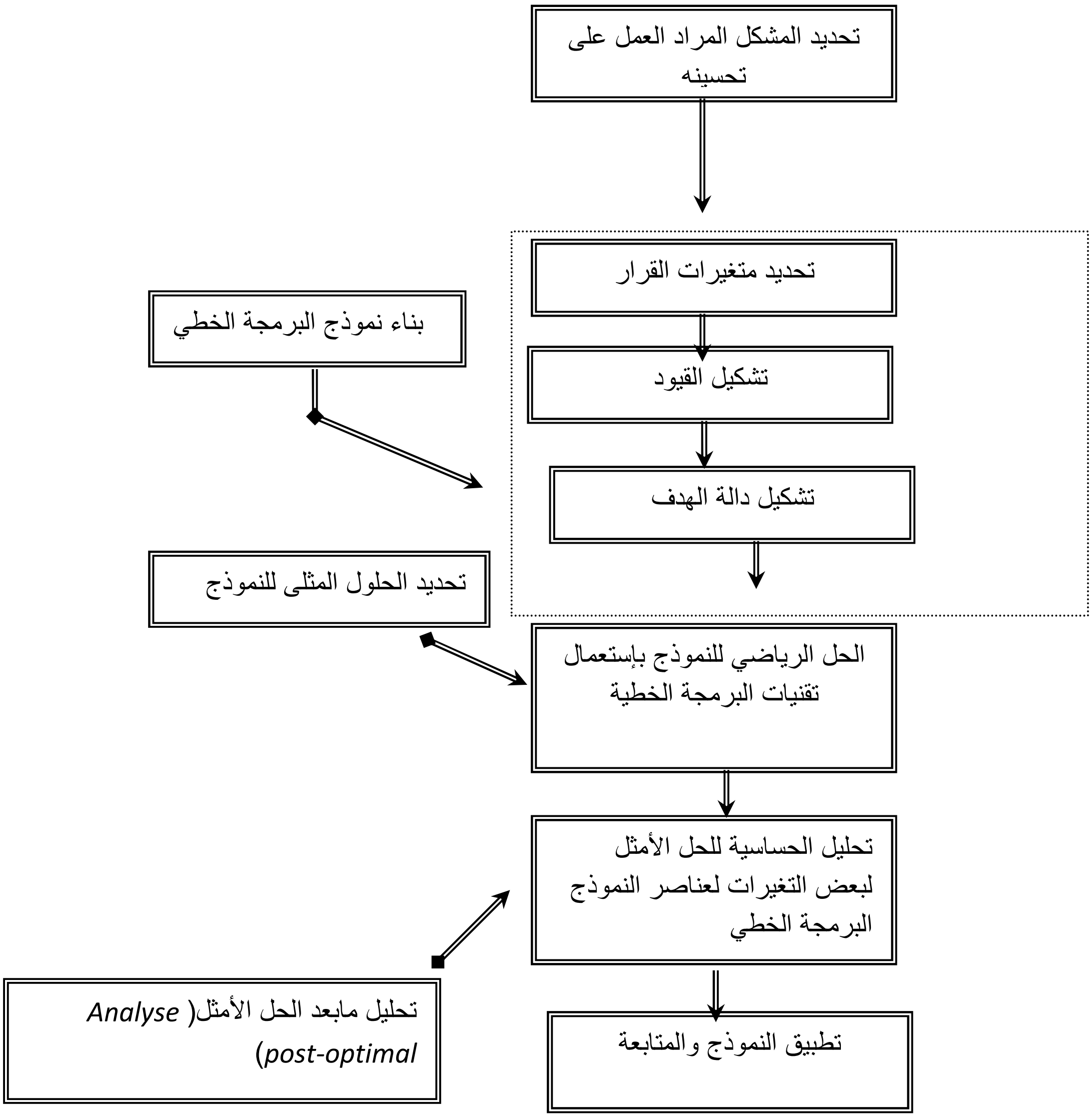
وقد حدد المختصون خطوات لمشاكل البرمجة الخطية، ومنهم من حددها بناءا على الخطوات المعروفة في اتخاذ القرار في علوم الإدارة والتسيير والمتمثلة في :

- ضرورة تحديد المشكلة ،
- وتحديد مجموعة من البدائل ،
- دراسة وتقييم البدائل ،
- ثم اختير البديل الملائم .

بناءا على هذا نجد أن جل المساهمات المقدمة في هذا السياق من طرف مختلف الباحثين تتفق في مضمون وخطوات حل النموذج ، الذي يظهر بالشكل الموالي:

<u>شكل (1)</u> " طريقة النمذجة والتحليل في البرمجة الخطية ".

(Baillageon، 1996، صفحة 6)



يمثل الشكل تلخيص لخطوات إتخاذ القرار بإ ستخدام البرمجة الخطية , وتكون البداية ببناء النموذج الرياضي للمسالة من البيانات المجمعة من الواقع الفعلي ، وهذا يستدعي تحديد الهدف المطلوب تحقيقه وتعريف جميع المتغيرات التي تأثر فيه وذلك من خلال النظام ككل.

– ثم فحص ودراسة الحلول البديلة المتاحة وتطوير عمليات نظامية لعلاجها والوصول إلى الهدف المطلوب تحقيقه .

– و أخيرا تطوير الحل للوصول إلى الحل الأمثل.

IV-1 مكونات نموذج البرمجة الخطية :

عند تحديد الهدف من المشكلة يتم صياغتها في شكل نموذج رياضي يتضمن المكونات التالية:

✓ **دالة الهدفLa fonction objective :**

إن الهدف الذي نسعى إلى الوصول إليه من وراء حل المشكلة يتمثل في الوصول إلى أمثلية الحل(L'Optimalité) ، والتي تأخذ أحد الوجهين السابق ذكرهما :

- التعظيم .
- التقليل.

ويتم التعبير عن هاته الحالة الرياضية بمعادلة رياضية تضم متغيرات من الدرجة الأولى.

✓ **القيود les contraintes**

تعكس القيود في معظم الحالات محدودية الموارد، و تعبر عن مجموعة المحددات التي لا يستطيع متخذ القرار التحكم فيها.ويتم ترجمة القيود في شكل متراجحات أو معادلات حسب مضمون وشروط التخصيص المحددة في المسألة المراد حلها.

✓ **شرط عدم السلبية: non négativité des variables**

ويقصد به أن الكميات المستهدفة لمتغيرات القرار لا يمكن أن تكون سالبة، لأن ذلك ليس له معنى في الواقع، و بتعبير آخر لا يمكن للمؤسسة أن لا تنتج منتوجاً معينا و لكن لا يمكن أن تستهدف إنتاج كمية سالبة.

IV -2 الشكل القانوني والشكل المعياري في نموذج البرمجة الخطية :

يأخذ نموذج البرمجة الخطية شكلين :الشكل القانوني والشكل المعياري.

- **الشكل القانوني (النظامي):** يكون عندما تكون مسألة قيود المسألة عبارة عن متراجحات/متباينات ودالة الهدف من نوع التعظيم (Max) أو تقليل(Min) وذلك على النحو التالي :

في حالة التعظيم : يظهر الشكل العام للنموذج كما يلي:

$$\text{Max } Z = \sum_{i=1}^{n} CiXi$$

$$a_iX_i \le bi$$

حيث يكون النموذج في صيغته التفصيلية كما يلي:

$$a_iX_i \ge 0$$

- ***دالة الهدف:***

$\text{Max } Z = C_1X_1+C_2X_2+C_3X_3+\ldots\ldots\ldots C_nX_n$

- ***القيود:***

- القيد الأول $a_{11}X_1+a_{12}X_2+a_{13}X_3+\ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n}Xn \le b_1.$

القيد الثاني- $a_{21}X_1+a_{22}X_2+a_{23}X_3+\ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n}Xn \le b_2.$

شرط عدم السلبية

$X_1,X_2,\ldots\ldots\ldots\ldots X_n \ge 0$

في حالة التقليل: يظهر الشكل العام للنموذج كما يلي:

$$\text{Min } C= \sum_{i=1}^{n} CiXi$$

$$a_iX_i \ge bi$$

$$a_iX_i \ge 0$$

حيث يكون النموذج في صيغته التفصيلية كما يلي:

- ***دالة الهدف:***

$\text{Min } C = C_1X_1+C_2X_2+C_3X_3+\ldots\ldots\ldots C_nX_n$

- ***القيود:***

- القيد الأول $a_{11}X_1+a_{12}X_2+a_{13}X_3+\ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n}Xn \ge b_1.$

- القيد الثاني $a_{21}X_1+a_{22}X_2+a_{23}X_3+\ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n}Xn \ge b_2.$

- ***شرط عدم السلبية :***

$X_1,X_2,\ldots\ldots\ldots\ldots X_n \ge 0$

حيث a_{ij},b_i,C_i ثوابت تحدد من معطيات المسألة وعموما هي تمثل الآتي :

- b_i تعبر عن الكمية المتوفرة من المورد i.
- a_{ij} تعبر عن الإستعمالات من المورد b_i للحصول على وحدة واحدة من المتغير X_i.
- C_i تمثل مساهمة الوحدة الواحدة من X_i في تحقيق هدف البرنامج الرياضي.

نشير هنا إلى وجود صيغتين للنموذج الرياضي في الشكل القانوني لمسألة البرمجة الخطية:

- الصيغة الأولى : وتتحقق في حالة التعظيم أو التقليل وتمثل الشكل الأولي الذي يأخذه النموذج عند تشكيل المسألة والتي تكون صيغة القيود فيها موحدة (متراجحات) من الشكل $\leq$ في حالة التقليل ،و من الشكل $\geq$ في حالة التعظيم.
- الصيغة الثانية : وتكون بدورها في الحالتين وتتحقق عندما تكون القيود مختلطة بين متراجحات ومعادلات، حيث يمكن أن تكون المتراجحات مختلطة بين $\leq$ أو $\geq$.

***الشكل المعياري**: وهي الصيغة الموالية والتي يجب تحديدها قبل الشروع في عملية الحل ، حيث يتم تحويل جميع القيود إلى معادلات (على شكل مساواة) مهما كان نوع النموذج ونوع دالة الهدف)حالة تعظيم /حالة تقليل(.

وعليه يظهر **الشكل العام للنموذج المعياري** في الحالتين على النحو التالي:

حالة تعظيم	حالة تقليل
$\text{Max } Z = \sum_{i=1}^{n} CiXi$	$\text{Min } C= \sum_{i=1}^{n} CiXi$
$a_iX_i = bi$	$a_iX_i = bi$
$a_iX_i \geq 0$	$a_iX_i \geq 0$

V- أمثلة تطبيقية حول كيفية صياغة النموذج الرياضي :

- **<u>مثال تطبيقي رقم 01:</u>**

تقوم مؤسسة ما بإنتاج الكراسي والطاولات وبيعها للمدارس، حيث أن إنتاج كرسي واحد يتطلب 3 صفائح خشبية و 4 قطع من الحديد، وبعد بيعه يحقق ربحا قدره 250 دج، أما إنتاج الطاولة الواحدة فيتطلب 6 صفائح خشبية و 7 قطع من الحديد، وبعد بيعها تحقق ربحا قدره 430 دج، حيث أن المؤسسة لا تتوفر إلا على 180 قطعة خشبية و 320 قطعة من الحديد.

المطلوب: ما هي الكميات المثلى الواجب إنتاجها من كلا المنتجين، و التي تحقق لمؤسسة أكبر ربح ممكن؟

<u>الحل :</u>

تحديد المتغيرات:

X_1: تمثل كمية الكراسي التي سوف تنتجها المؤسسة وتحقق لها أكبر ربح؛

X_2: تمثل كمية الطاولات التي سوف تنتجها المؤسسة و تحقق لها أعظم ربح.

1- **صياغة دالة الهدف:** إن ربح المؤسسة ناتج عن إنتاج و بيع كل من الكراسي و الطاولات و عليه:

- **إنتاج الكراسي:**

إنتاج X_1 كرسي يحقق ربحا قدره $(250 \times x_1)$

- **إنتاج الطاولات:**

إنتاج X_2 طاولة يحقق ربحا قدره $(430 \times x_2)$

و عليه و بما أن هذه المؤسسة تسعى إلى تعظيم أرباحها فإنه يمكن صياغة دالة الهدف على النحو التالي:

$$Max\ Z = 250\ X_1 + 430\ X_2$$

2- **تشكيل القيود:** فعلى المؤسسة أن تحترم ما تتوفر عليه من مواد أولية عند تعظيمها لأرباحها.

- **قيد المادة الأولية الأولى (الخشب):** تمثل كمية الخشب الكلية مجموع الخشب المستخدم في إنتاج الكراسي $(x_1 \times 3)$ و الخشب المستخدم لإنتاج الطاولات $(x_2 \times 6)$ و الذي يجب أن لا

يتجاوز الكمية المتاحة و المقدرة بـ 180 قطعة. و هذا يمكن التعبير عنه رياضيا بالصياغة التالية:

$$3\,x_1 + 6\,x_2 \leq 180$$

– **قيد المادة الأولية الثانية (الحديد):** تمثل كمية الحديد الكلية مجموع الحديد المستخدم في إنتاج الكراسي ($x_1 \times 4$) و الحديد المستخدم لإنتاج الطاولات ($x_2 \times 7$) و الذي يجب أن لا يتجاوز الكمية المتاحة و المقدرة بـ 320 قطعة. و هذا يمكن التعبير عنه رياضيا بالصياغة التالية:

$$4\,x_1 + 7\,x_2 \leq 320$$

3– شرط عدم السلبية: حيث أن إنتاج كل من الكراسي والطاولات لا يمكن أن يكون بكميات سالبة، فإما يكون موجبا أو معدوما، وهو ما يُعبر عنه بالصياغة التالية:

$$X_1, X_2, \geq 0$$

و عليه و بتجميع الصيغ الرياضية المحصل عليها سابقا، نحصل على الشكل النهائي لنموذج البرمجة الخطية:

دالة الهدف $Max\ Z = 250\,x_1 + 430\,x_2$

تحت القيود *Soumise aux contraintes*

قيد الخشب $3\,x_1 + 6\,x_2 \leq 180$

قيد الحديد $4\,x_1 + 7\,x_2 \leq 320$

شرط عدم السلبية $x_1,\ x_2 \geq 0$

<u>مثال تطبيقي رقم 02 :</u>

نفترض أن مؤسسة لإنتاج الكوابل ،تقوم بإنتاج نوعين من المنتوج X_1 و X_2 حيث (X_1 كابل ذو ضغط مرتفع ،و X_2 كابل ذو ضغط منخفض) ،تحتاج في ذلك لثلاث مواد أولية (نحاس ، بلاستيك، مادة تغليف)، احتياجات الإستخدام من هذه المواد تظهر في الجدول الموالي:

	المنتوج X_1	المنتوج X_2
نحاس	0.2 كغ	0.3 كغ
بلاستيك	0.4 كغ	0.1 كغ
مادة تغليف	0.2 كغ	0.5 كغ

ونفترض أن للمؤسسة 20000 كغ من النحاس ، و10000 كغ من البلاستيك، و12000 كغ من مادة التغليف ،وأن هدف هذه المؤسسة هو تعظيم الأرباح ،علما أن الربح في الكابل الأول 4 ون و في الثاني 5 ون .

المطلوب : تحويل هذه المعطيات إلى نموذج رياضي.

الحــل :

1- دالة الهدف:

تمثل متغيرات المسألة في المنتوجين X_1و X_2 ونلاحظ أن الهدف هو تحقيق أعظم ربح ،وعليه نحدد دالة الهدف من مجموع ربح المنتوجين بالشكل التالي:

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 5X_2$$

2- **القيود:**من خلال نص المسألة نميز أن عملية الإنتاج تتم تحت ظل ثلاثة شروط /قيود وحددت متطلبات كل منتوج والكميات المتوفرة في الجدول المقدم في النص ومن ثم تظهر القيود كما يلي:

قيد النحاس : $$0.2\,X_1 + 0.3X_2 \le 20000$$

قيد البلاستيك $$0.4\,X_1 + 0.1X_2 \le 10000$$

قيد مادة التغليف $$0.2\,X_1 + 0.5X_2 \le 12000$$

3- **شرط عدم السلبية:** بطبيعة الحال ووفقا لشروط بناء النموذج الرياضي في مسائل البرمجة الخطية فإنه لا يمكن أن يكون الإنتاج ذو قيم سالبة وعليه يظهر شرط عدم السلبية على النحو التالي:

$$X_1, X_2, \ge 0$$

<u>مثال تطبيقي رقم 03:</u>

تحاول مؤسسة نقاوس إنتاج أكبر عدد من منتجين اثنين: مربى و عصائر، و ذلك في ظل القيود التي تفرضها الطاقة الإنتاجية والطاقة التمويلية، والجدول أدناه يوضح البيانات الخاصة بالمنتجين.

المنتجات	سعر بيع الوحدة	تكلفة الوحدة	عدد الساعات المطلوبة لإنتاج وحدة واحدة		
			القسم أ	القسم ب	القسم ج
المربى	14	10	0,5	0,3	0,2
العصائر	11	8	0,3	0,4	0,1
الطاقة المتاحة بالأقسام	–	–	500	400	200

حيث أن المؤسسة تتوفر على مبلغ 30000دج، علما أنه يتم تخزين هذه المنتجات قبل تسويقها في مخزن طاقته الاستيعابية 300 وحدة، حيث أن الحجم التخزيني للعصائر ضعف الحجم التخزيني للمربى.

المطلوب: بناء النموذج الرياضي لهذه المسألة.

<u>الحل :</u>

تمثل x_1 عدد الوحدات المنتجة من **المربى** و التي تحقق للمؤسسة أعظم ربح؛

تمثل x_2 عدد الوحدات المنتجة من **العصائر** و التي تحقق للمؤسسة أعظم ربح.

1- دالة الهدف:

الربح الإجمالي للمؤسسة = الربح المترتب عن بيع المياه المعدنية + الربح المترتب عن بيع العصائر

الربح الإجمالي للمؤسسة = ($14 - 10 = 4\ x_1$) + ($11 - 8 = 3\ x_2$)

و عليه تصبح دالة الهدف كالتالي:

$$Max\ Z = 3\ x_1 + 4\ x_2$$

2- تشكيل القيود:

إنتاج المنتجتين يجب أن لا يتجاوز المبلغ المتاح و المقدر بـ 30.000دج.

الوقت المستغرق في كل قسم = الوقت المستغرق لإنتاج المربى + الوقت المستغرق لإنتاج العصائر

مثلا: الوقت المستغرق في القسم أ = الوقت المستغرق لإنتاج المربى $(0.5\ x_1)$ + الوقت المستغرق لإنتاج العصائر $(0.3\ x_2)$ و عليه تصبح القيود كالتالي:

قيد القسم الأول	$0.3\ x_2 \leq 500 + 0.5\ x_1$
قيد القسم الثاني	$0.3\ x_1 + 0.4\ x_2 \leq 400$
قيد القسم الثالث	$0.2\ x_1 + 0.1\ x_2 \leq 200$
قيد المبلغ المتاح	$10\ x_1 + 8\ x_2 \leq 30.000$
قيد التخزين	$1\ x_1 2 + x_2 \leq 300$

3-شرط عدم السلبية:

$$X_1, X_2, \geq 0$$

تمارين مقترحة حول تشكيل النموذج الرياضي

التمرين 01:

تنتج مؤسسة مختصة في الخياطة ثلاثة أنواع من الملابس الجاهزة مخصصة للرجال، للنساء، للأطفال) ضمن ورشاتها الثلاث التفصيل، القطع والتركيب. لإنتاج الوحدة الواحدة من ملابس الرجال يتطلب خمس ساعات عمل في التفصيل وعشر ساعات قطع وساعة واحدة تركيب بينما تستغرق الوحدة الواحدة من ملابس النساء عشر ساعات تفصيل وخمس ساعات في ورشة القطع وساعة عمل واحدة في ورشة التركيب، ولإنتاج وحدة واحدة من ملابس الأطفال تستغرق ساعتين في التركيب وأربع ساعات في التفصيل وساعتين قطع. الوقت المتاح للموسم القادم بالنسبة لكل ورشة هي (التفصيل:3600، القطع: 3000، التركيب: 500) ساعة عمل.

المطلوب : ضع النموذج الرياضي الذي يسمح لهذه المؤسسة تحقيق أكبر ربح ممكن إذا علمت الربح في الوحدة الواحدة من ملابس الرجال 1200 و.ن و1500 و.ن للوحدة من ملابس النساء و1500 و.ن للوحدة من ملابس الأطفال.

التمرين 02:

تلقت إحدى المؤسسات طلبية لإنتاج 1000 كغ من خليط خاص من المواد الدهنية التاليةM1 , M2 , M3 تكاليف إنتاجها هي 05،06،07 وحدات نقدية على الترتيب، من بين الشروط التي يخضع لها قسم الإنتاج بهذه المؤسسة أنه لا يمكن استعمال أكثر من 300 كغ من المادة M1 ويجب استخدام 130 كغ على الأقل من المادة M2 ، وكذلك 200 كغ على الأقل من المادة M3.

المطلوب: شكل هذه المسألة في صورة مسألة برمجة خطية؟.

التمرين 03:

على قطعة أرض مساحتها الإجمالية 42000 متر مربع نريد أن ننجز عمارات البعض منها ذات خمس أدوار، والبعض الآخر يتكون من دورين فقط، من أجل أن تستوعب هذه العمارات أكبر عدد ممكن من العائلات، والجدول التالي يبين بعض المعطيات المتعلقة بالمبنى الواحد:

الأنواع	المساحة اللازمة	تكلفة الإنجاز	زمن الإنجاز	عدد العائلات
العمارة ذات 5 أدوار	800 م^2	600 ألف	120 ساعة عمل	30
العمارة ذات الدورين	600 م^2	200 ألف	60 ساعة عمل	12

يتطلب إنجاز هذا المشروع 4500 ساعة عمل وقد خصصت له ميزانية تقدر بـ 18000 ألف دينار

المطلوب: صياغة المسألة في شكل نموذج رياضي.

التمرين 04:

قام صانع أثاث بإدخال مجموعة من المنتجات في السوق، تتكون هذه المجموعة من خزائن وكراسي ومكتبات ومكاتب، يؤدي بيع هذه المنتجات إلى ربح قدره 1000 و.ن بالنسبة للخزانة الواحدة، 2000 و.ن للكرسي، 3000 و.ن للمكتبة، 4000 و.ن للمكتب، يحدد انتاج هذه الوحدات بحوالي 400 على الأكثر شهريا، إذا جمعنا انتاج المكتبات وانتاج المكاتب فإن هذا المجموع لا يفوق انتاج الوحدتين الباقيتين بأكثر من 25 وحدة اسبوعيا. إن مجموع إنتاج الكراسي والمكاتب لا يمكن أن يفوق إنتاج الخزائن والمكتبات بأكثر من 150 وحدة في الثلاثي الواحد.

المطلوب: ضع النموذج الرياضي للمسألة والذي يؤدي إلى الربح الأمثل؟.

التمرين 05:

تدعيما لخطها الإنتاجي خصصت إحدى المؤسسات مبلغ 8000000 دج لشراء آلات حديثة، وبعد دراسة مختلف العروض وقع الاختيار على شراء ما لا يقل عن 15 آلة من بين مختلف أنواع الآلات الموضحة معطياتها في الجدول التالي:

نوع الآلة	تكلفة شراء الآلة الواحدة	مدة تشغيل الآلة الواحدة في اليوم (ساعة)	إنتاج الآلة الواحدة (وحدة/ساعة)	عدد العمال اللازمين لكل آلة
النوع الأول	6000	8	10	1
النوع الثاني	8000	7	15	2
النوع الثالث	10000	6	30	3

ومن أجل تشغيل هذه الآلات تم تعيين 10% من عدد عمال المؤسسة والبالغ عددهم 1000 عامل من أجل العمل على هذه الآلات فإذا كان هدف المؤسسة الحصول على أقصى طاقة إنتاجية يومية. **فما هو النموذج الرياضي لهذه المسألة في هذه الحالة.**

التمرين06:

تبحث مصلحة الإشهار بإحدى المؤسسات عن إيجاد الكيفية المناسبة لتخصيص ميزانية الإشهار المقدرة بمبلغ 70000 وحدة نقدية على وسائل الإعلام المختلفة والمبينة في الجدول أدناه، إذ يجب إعداد على الأقل 10 إعلانات إشهارية متلفزة، وفي نفس الوقت لا يمكن صرف أكثر من 42000 وحدة نقدية لهذه العملية، كما أن الوقت المخصص للقناة الفضائية الثانية يجب أن يفوق على الأقل الوقت المتاح للقناتين الفضائية الأولى والأرضية بدقيقتين، بينما عدد مرات الإشهار الإذاعي يجب أن لا يتجاوز 20 إشهار أكثر من الإشهار المتلفز .

وسيلة الإعلام	تكلفة الإعلان	درجة التأثير	الوقت المتاح للإعلان
القناة الأرضية	3000	120	45 ثانية
القناة الفضائية الأولى	4500	150	30 ثانية
القناة الفضائية الثانية	2500	90	50 ثانية
الإذاعة	2000	75	40 ثانية

المطلوب : ضع المسألة في شكل نموذج رياضي دون حلها .

المحور الثاني :

الطريقة الجبرية والبيانية لحل مسائل البرمجة الخطية.

1-الطريقة الجبرية:

1-1 الطريقة الجبرية في حالة التعظيم .

1-2 الطريقة الجبرية في حالة التقليل .

2 الطريقة البيانية:

2-1 الطريقة البيانية في حالة التعظيم .

2-2 الطريقة البيانية في حالة التقليل.

2-3 حالات خاصة للطريقة البيانية.

3- تمارين مقترحة.

تمهيد:

بعد تشكيل النموذج الرياضي لمسائل البرمجة الخطية ، نمر لمرحلة موالية وهي إيجاد الحل الأمثل لقيم المتغيرات الموضوعة وفقا للهدف المحدد سواء في حالة التعظيم أو في حالة التقليل ،ويتم ذلك باستخدام إحدى الطرق التالية :

- الطريقة الجبرية .
- الطريقة البيانية.
- طريقة السمبلاكس أو كما تعرف بطريقة الجداول.

سنحاول فيما يلي التطرق بنوع من التفصيل للطريقتين الجبرية والبيانية ، لنعرض في المحور اللاحق طريقة السمبلاكس .

I. الطريقة الجبرية :

في الحقيقة تمثل هذه الطريقة أبسط طرق حل مسائل البرمجة الخطية إلا أنها غير قابلة للإستخدام في جميع الحالات ،لاسيما إذا كان عدد المتغيرات يتجاوز الإثنان ،إلا أنها تعتبر الأسهل في حالة تحقق الشرط المذكور.

I-1 الطريقة الجبرية في حالة التعظيم:

لتبسيط شرح هذه الطريقة نورد مباشرة ***المثال التطبيقي*** التالي:

مثال تطبيقي رقم I-01:

لنفترض أن هناك مصنعا يقوم بإنتاج نوعين من أثاث المكتب هما (مكتبات وطاولات)،هذان المنتجان يتطلب انتاجهما المرور على قسمين هما :قسم التقطيع،وقسم التجميع ،إذا فرضنا أن الطاقة الإنتاجية للقسمين المذكورين هي 60 ساعة لقسم التقطيع و 48 ساعة لقسم التجميع ،إذ تحتاج كل مكتبة لأربع ساعات في قسم التقطيع،وساعتين في قسم التجميع ،بينما تحتاج كل طاولة لساعتين في القسم الأول وأربع ساعات في الثاني.

فإذا علمت أن العائد في كل مكتبة هو 8 و.ن و6 و.ن هي العائد في الطاولة.

المطلوب : حدد عدد المكتبات وعدد الطاولات الواجب إنتاجهما بما يجعل العوائد في أقصى قيمة لها.

الحل :

- أولا/ تشكيل النموذج الرياضي :

نرمز للمنتج بالرمز X،حيث:

X_1 يمثل المكتبات.

X_2 يمثل الطاولات

1-دالة الهدف :

$$\text{Max } Z = 8X_1 + 6X_2$$

2-القيود:

قيد قسم التقطيع : $4X_1 + 2X_2 \leq 60$

قيد قسم التجميع: $2X_1 + 4X_2 \leq 48$

3-شرط عدم السلبية:

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

ثانيا / التحويل للشكل المعياري:

$$(1)\ldots\ldots\ 4X_1 + 2X_2 = 60$$

$$(2)\ldots\ldots 2X_1 + 4X_2 = 48$$

$$(1) \Leftrightarrow \quad 2X_1 + X_2 = 30 \ldots\ldots(3)$$

نعوض 3 في 2 نجد :

$$2X_1 + 4(30 - 2X_1) = 48$$

$2X_1+120-8X_1= 48$

$2X_1 - 8X_1 = -72 \Rightarrow X_1 = 12 \Rightarrow X_2= 6.$

بعد الحصول على قيم الثنائية المطلوبة، نقم بتعويضها في دالة الهدف لتحديد قيمة العائد الإجمالي

Max Z= 8(12) + 6(6) = 96+36 = 132 و.ن

وعليه لكي تحقق المؤسسة أقصى ربح /عائد عليها أن تنتج 12 وحدة من المكتبات و 6 وحدات من الطاولات .

I-2 الطريقة الجبرية في حالة التقليل:

وهي الحالة التي تكون فيها الدالة من النوع Min ، ويتم الحل فيها باتباع نفس الخطوات السابقة ، إلا أن الهدف يكون الحصول على أدنى تكلفة ، كما أن القيود تكون من الشكل أكبر من أو تساوي

وللتوضيح أكثر نورد **المثال التطبيقي** التالي:

<u>مثال تطبيقي I-02 :</u>

$$Min\ (C) = 300x_1 + 400x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 16 & \text{...........(1)} \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 25 & \text{...........(2)} \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 21 & \text{...........(3)} \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

بعد الحصول على الشكل المعياري كما يلي :

$$x_1 + 3x_2 = 16 \quad \text{...........(1)}$$
$$3x_1 + 2x_2 = 25 \quad \text{...........(2)}$$
$$2x_1 + 2x_2 = 21 \quad \text{...........(3)}$$

لنأخذ المعادلتين (2) و (3) ونطرحهما من بعض:

$$\begin{array}{r} 3X_1 + 2X_2 = 25 \\ - \quad 2X_1 + 2X_2 = 21 \\ \hline \end{array}$$

$$= X_1 + 0 = 4 \quad \Rightarrow \quad X_1 = 4$$

بالتعويض عن قيمة X1 في المعادلة (1):

$$4 + 3X_2 = 16 \Rightarrow 3X_2 = 12$$

$$\Rightarrow X_2 = 4$$

ومنه: (X1 , X2) = (4 ، 4)

وتكون: Min (C) = 300(4) + 400(4)

$$\text{Min (C)} = 1200 + 1600 \Rightarrow \text{Min (C)} = 2800.$$

II-الطريقة البيانية:

إن الطريقة البيانية تتطلب أن يكون عدد المتغيرات اثنان فقط ليس أكثر من ذلك حتى يتسنى تمثيلهما على المعلم المتعامد والمتجانس الذي على أساسه يتم تحديد الحلول ، وتتمثل خطوات الحل بالطريقة البيانية في الآتي *(نخلة، عبد العليم، و عبد العال، 2003، الصفحات 113-114) :*

- يتم تمثيل المتغير الاول على المحور الأفقي والمتغير الثاني على المحور العمودي .
- يتم التعبير عن كل قيد بخط مستقيم يمر من خلال نقطتين ،النقطة الاولى على النحور الأفقي ،والنقطة الثانية على المحور العمودي ،ويمكن الحصول على هاتين النقطتين على ثلاث خطوات هي :

• نفترض أن المتغير الثاني ممثلا للمحور العمودي يساوي الصفر فنحصل على الإحداثي الخاص بالمتغير الأول وتصبح النقطة هي (X_1,0) ويتم تحديد موقعها على المحور الأفقي.
• نفترض أن المتغير الأول ممثلا للمحور الأفقي يساوي صفر فنحصل على الإحداثي الخاص بالمتغير الثاني وتصبح النقطة (0, X_2) ويتم تحديد موقعها على المحور العمودي.
• يتم توصيل هاتين النقطتين بخط مستقيم معبرا عن القيد .

- يتم التعبير بيانيا عن جميع القيود ،ليتم تحديد منطقة الحلول الممكنة ،التي تمثل منطقة ينطبق عليها جميع القيود ، بمعنى آخر يتحقق فيها جميع القيود ،ويلاحظ أنه إذا كانت القيود أصغر من فإن منطقة الحلول تقع أسفل المستقيمات المعبرة عن القيود

وفي اتجاه نقطة الأصل ، أما إذا كانت القيود أكبر من فإن منطقة الحلول تقع أعلى المستقيمات المعبرة عن القيود وفي اتجاه معاكس لنقطة الأصل.

- يتم اختبار نقاط منطقة الحلول الممكنة مع دالة الهدف واختيار النقطة التي تحقق أعلى قيمة إفي حالة كان دالة الهدف من نوع التعظيم، والعكس في حالة التقليل.
- إذا احتوى قيد على متغير واحد فيمكن التعبير عليه بخط مستقيم رأسيا أو أفقيا حسب المتغير إما أن يكون على المحور الأفقي في حال كان القيد يتكون من X_1 فقط، أو أن يكون على المحور العمودي في حال كان القيد يتكون من X_2 .

باختصار تتمحور هذه الطريقة في رسم أو تمثيل مختلف القيود في معلم متعامد ومتجانس انطلاقا من الشكل المعياري للمسألة ،حيث يتم اسقاط معادلات القيود على محور الفواصل والتراتيب في كل مرة يتم فيها جعل أحد المتغيرين معدوما ،ليتم تحديد قيمة المتغير الآخر.

II-1 الطريقة البيانية في حالة التعظيم :

مثال تطبيقي II-01:

لتوضيح خطوات هذه الطريقة نأخذ نفس معطيات **المثال التطبيقي I-01** .

والذي يظهر نموذجه الرياضي كما يلي:

1-دالة الهدف :

$$\mathbf{Max\ Z= 8X_1 + 6X_2}$$

2- القيود:

قيد قسم التقطيع : $4\,X_1 + 2\,X_2 \leq 60$

قيد قسم التجميع: $2\,X_1 + 4\,X_2 \leq 48$

3-شرط عدم السلبية:

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحل :

- <u>التمثيل البياني للقيود</u>

القيد الأول : $4\,x_1 + 2\,x_2 \leq 60$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $4\,x_1 + 2\,x_2 = 60$

نضع $x_1 = 0 \Rightarrow 2\,x_2 = 60 \Rightarrow x_2 = 30$ A (0, 30)

نضع $x_2 = 0 \Rightarrow 4\,x_1 = 60 \Rightarrow x_1 = 15$ B (15, 0)

القيد الثاني: $2\,x_1 + 4\,x_2 \leq 48$

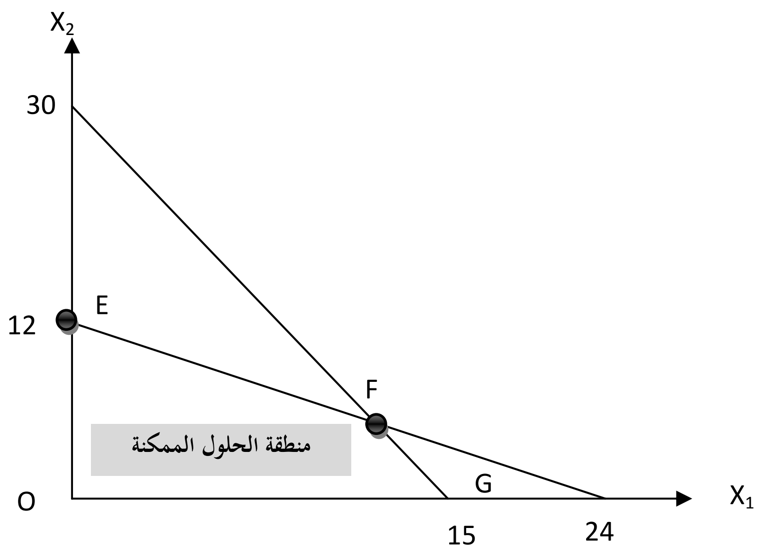
يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: 2 x1 +4 x2 =48

نضع $x_1 = 0 \Rightarrow 4\,x_2 = 48 \Rightarrow x_2 = 12$ C (0, 12)

نضع $x_2 = 0 \Rightarrow 2\,x_1 = 48 \Rightarrow x_1 = 24$ D (24, 0)

يتم تمثيل القيدين على معلم متعامد ومتجانس.

الشكل رقم 02 : الرسم البياني للمثال التطبيقي رقم II –01



من خلال الرسم البياني وبتطبيق الخطوات المعتمدة في الحل بالطريقة البيانية نميز ما يلي:

تتحدد منطقة الحلول في المجال (O–E–F–G) والتي يطلق عليها بمنطقة الحلول الممكنة.

لتحديد الحل الأمثل نقم بتعويض احداثيات النقاط المتحصل عليها في دالة الهدف:

النقطة	إحداثيات النقطة		قمية دالة الهدف (Z)
	x_1	x_2	
O	0	0	$\Rightarrow Z = 8\,(0) + 6\,(0) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{Z = 0}$
E	0	12	$\Rightarrow Z = 8\,(0) + 6\,(12) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{Z = 72}$
F	12	6	$\Rightarrow Z = 8\,(12) + 6(6) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{Z = 132}$
G	15	0	$\Rightarrow Z = 8\,(15) + 6\,(0) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{Z = 120}$

بالنسبة للنقطة F يتم تحديد احداثياها بالمساواة بين القيدين

$4x_1 + 2x_2 = 60$ و $2x_1 + 4x_2 = 48$ لنحصل على الإحداثية $(12،6)$.

من خلال معطيات الجدول نستنتج أن الإحداثية التي تحقق دالة الهدف هي النقطة F لأنها تعطي أقصى ربح.

وهي نفس النتيجة المتحصل عليها في الطريقة الجبرية.

مثال تطبيقي II– 02:

تقوم إحدى المؤسسات الإنتاجية بتصنيع نوعين من المنتجات ،حيث لإنتاج الوحدة الواحدة من النوع الأول يتطلب ذلك استخدام وحتي قياس من مادة البلاستيك ،كما انها تستغرق في ورشة التصنيع 3 ساعات عمل ،بينما تتطلب الوحدة الواحدة من النوع الثاني وحدة قياس واحدة من المادة الأولية البلاستيك ،وتستغرق 6 ساعات عمل بالورشة ،تتوقع المؤسسة أن تتحصل على 1000وحدة قياس من المادة الأولية البلاستيك ،كما أن طاقة ورشة التصنيع المتاحة خلال هاته الفترة هي 2400ساعة عمل .

تقدر المؤسسة ربحا صافيا قدره 20 و.ن /وحدة من النوع الأول و 30 و.ن من النوع الثاني .

المطلوب : صياغة هذه المسألة في نموذج للبرمجة الخطية وحلها بالطريقة البيانية.

الحل :

1- دالة الهدف : $Max\ (z)= 20x_1 + 30x_2$

2- القيود

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 1000 \ \ldots\ldots\ldots(1) \\ 3x_1 + 6x_2 \leq 2400 \ \ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

شرط عدم السلبية $x_1, x_2 \geq 0$

- تحديد إحداثيات القيود:

من المعادلة (1): نضع $X_1 = 0 \Leftarrow X_2 = 1000$

نضع $X_2 = 0 \Leftarrow X_1 = 500$

وعليه الإحداثية هي (500،100)

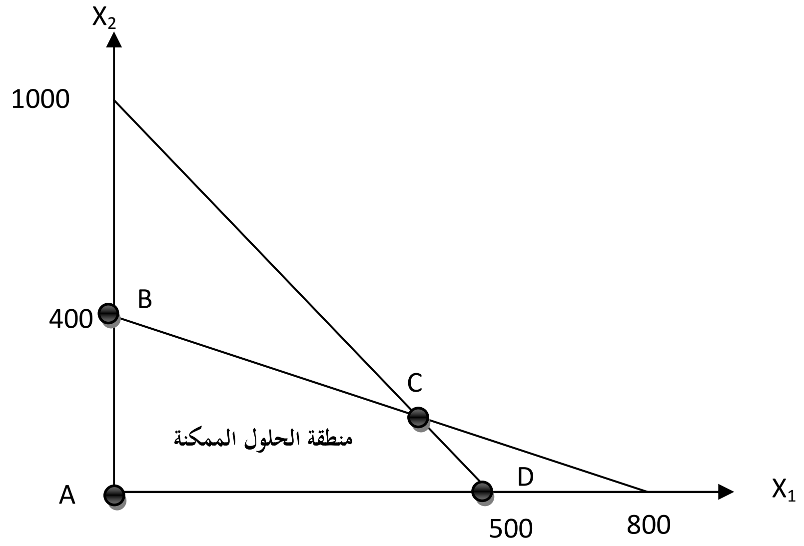
ومن المعادلة (2): نضع $X_1 = 0 \Leftarrow X_2 = 400$

نضع $X_2 = 0 \Leftarrow X_1 = 800$

وعليه الإحداثية هي (800،400).

- نقم بتمثيل هذه النقاط في معلم متعامد ومتجانس:

الشكل رقم 03 : الرسم الياني للمثال التطبيقي رقم II -02



نلاحظ بعد التمثيل البياني نتجت لدينا منطقة الحلول الممكنة ممثلة بالنقاط: D,C,B,A ،سنحاول تحديد ماهو الحل الأمثل في هذه المنطقة؟ استنادا إلى قيمة أعظم ربح ،مع تحديد التغير الحاصل على كل قيد

نقطة الإنتاج	حجم الإنتاج		دالة الهدف (دينار/وحدة)	الطاقات غير المستغلة	
	X_1	X_2	$Max_{(z)}= 20x_1 + 30x_2$	القيد الأول	القيد الثاني
A	0	0	0	1000	2400
B	0	400	12000	600	0
C	400	200	14000	0	0
D	500	0	1000	0	900

نلاحظ من خلال الجدول أن النقطة (200 ,400) "C" تمثل أحسن برنامج إنتاجي لأنها تحقق أفضل قيمة لدالة الهدف، كما أنه من جهة أخرى القيود عند هذه النقطة تعادل "0" أي أن الطاقات المتاحة مستغلة بالكامل، مما يدل على أمثلية الحل.

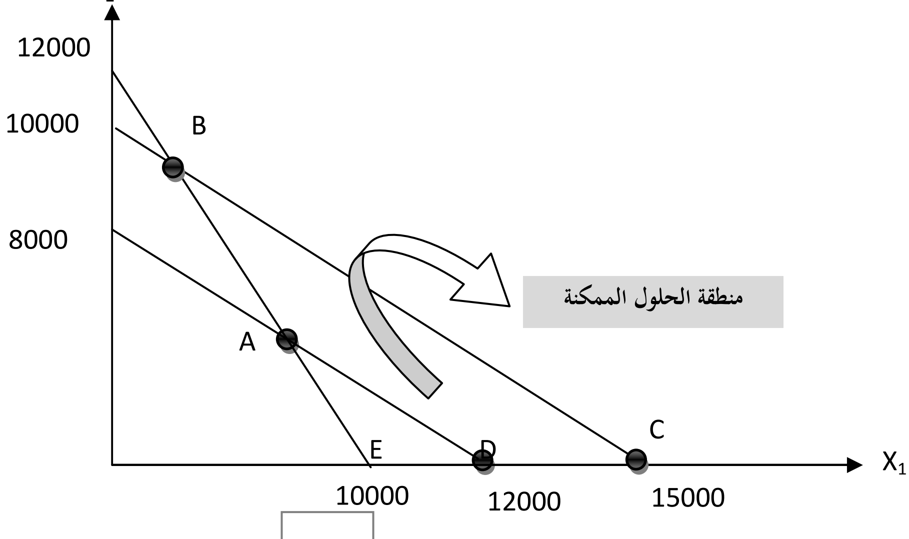
II-2 الطريقة البيانية في حالة التقليل:

<u>مثال تطبيقي رقم II-03:</u>

$$Min\ (C) = 18x_1 + 10x_2$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \geq 48000 & ....(1) \\ 12x_1 + 10x_2 \geq 120000 & ....(2) \\ 10x_1 + 15x_2 \geq 150000 & ....(3) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

الشكل رقم 04 : الرسم الياني للمثال التطبيقي رقم II -03



نلاحظ أن هذا المثال يختلف عن الأمثلة السابقة في جانبين الاول أن المشكلة هي تقليل التكاليف والثاني أن القيود هي من الشكل أكبر من أو تساوي ، أما بالنسبة للإجراءات الاخرى المتعلقة بكيفية تحديد منطقة الحلول فهي نفسها ، باستثناء أنه– وكما سبق وأن ذكرنا– فإنه يتم تحديد منطقة الحلول الممكنة برفض المنطقة التي تحت القيد الممثل بالخط المرسوم على المعلم ، وعليه وفي هذا المثال فإن منطقة الحلول الممكنة هي ممثلة بالنقاط (A ,B,C,D)

ويتم تحديد قيمة النقطتين A و B بنفس الطريقة المعتمدة في حالة التعظيم أي بمساواة معادلتي القيدين ،باستخدام أي طريقة رياضية مناسبة (القسمة،التعويض، الطرح ...) ،وعليه فإن النقطة Aاحداثياها هما (7500،3000) والنقطة B احداثياها هما (3750،7500).

وبعد التعويض في دالة الهدف نجد ما يلي :

النقطة	إحداثيات النقطة		قمية دالة الهدف (Z)
	x_1	x_2	
O	0	0	$\Rightarrow Z = 18\,(0) + 10\,(0) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{Z = 0}$
A	7500	3000	$\Rightarrow Z = 18\,(\boldsymbol{7500}) + 10\,(\boldsymbol{3000}) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{Z = 165000}$
B	3750	3000	$\Rightarrow Z = 18\,(\boldsymbol{3750}) + 10(\boldsymbol{3000}) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{Z = 97500}$
C	15000	0	$\Rightarrow Z = 18\,(\boldsymbol{15000}) + 10\,(\boldsymbol{0}) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{Z = 270000}$

من خلال نتائج الجدول نستنتج أن التوليفة التي تحقق أدنى تكلفة هي النقطة B (3750،3000) بقيمة 97500 وهي أدنى قيمة بعد حالة اللإنتاج.

III– حالات خاصة لطريقة الرسم البياني :

III–1– حالة وجود أكثر من حل واحد :

في بعض الحالات يكون هناك أكثر من حل واحد أمثل بمعنى وجود حلول متعددة تعطي نفس قيمة دالة الهدف ، ولتوضيح ذلك نورد المثال التالي:

مثال تطبيقي III–01:

$$Max\ (Z) = 2x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} x_1 \leq 8 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ x_2 \leq 3 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ 3x_1 + 6x_2 \leq 30 \ \ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

القيد 1 : $X1 = 8$

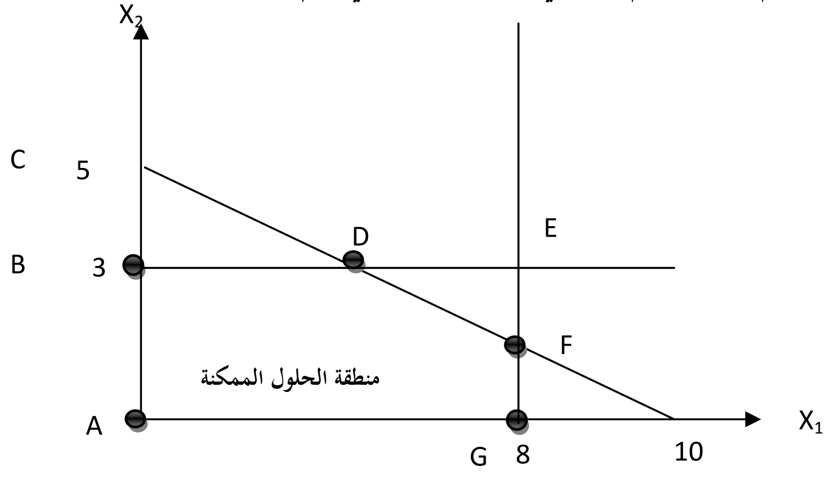
القيد 2 : $X2 = 3$

القيد3:

لما $X1 = 0$ ⇦ $X2 = 5$ لما $X2 = 0$ ⇦ $X1 = 10$

يعني توليفة القيد الثالث هي (10،5) ،نسقط هاته المعطيات المتحصل عليها بيانيا نجد:

الشكل رقم 05:الرسم البياني للمثال التطبيقي رقم III –01



تمثل المنطقة (A ,B,D,F,G) منطقة الحلول الممكنة وسنحاول فيما يلي تحديد النقطة التي تمثل الحل الامثل من خلال اتباع الخطوات السابق ذكرها، حيث تظهر نتائج التعويض في دالة الهدف بعد ايجاد قيمة النقطتين F و Dبالطريقة المعهودة،ينتج لدينا الجدول التالي :

النقطة	إحداثيات النقطة		قمية دالة الهدف (Z)
	x_1	x_2	
A	*0*	*0*	$\Rightarrow Z = 2\,(0) + 4\,(0) \;\Rightarrow\; Z = 0$
B	*0*	*3*	$\Rightarrow Z = 2\,(0) + 4\,(3) \;\Rightarrow\; Z = 12$
G	*8*	*0*	$\Rightarrow Z = 2\,(8) + 4\,(0) \;\Rightarrow\; Z = 16$
D	*4*	*3*	$\Rightarrow Z = 2\,(4) + 4\,(3) \;\Rightarrow\; Z = 20$
F	*8*	*1*	$\Rightarrow Z = 2\,(8) + 4\,(1) \;\Rightarrow\; Z = 20$

من خلال معطيات الجدول نلاحظ وجود نقطتين يعطيان نفس قيمة دالة الهدف والمقدرة ب20 و.ن وهما النقطتان Dو F وهذا يعني أن هناك حلين أمثلين لمشكلة واحدة ، وهذا في الواقع يعطي مرونة لمتخذي القرار في اختيار البديل الأكثر ملائمة ، فإما أن تختار المؤسسة إنتاج 4 وحدات من المنتوج الأول و 3 من المنتوج الثاني ، أو تنتج 8 وحدات من الأول ووحدة واحدة من الثاني .

III – 2– حالة الحلول غير المتناهية (دالة هدف لانهائية)

في هذه الحالة فإن دالة الهدف تزداد بطريقة غير نهائية أي منطقة الحلول الممكنة تكون مفتوحة

مثال تطبيقي III – 02

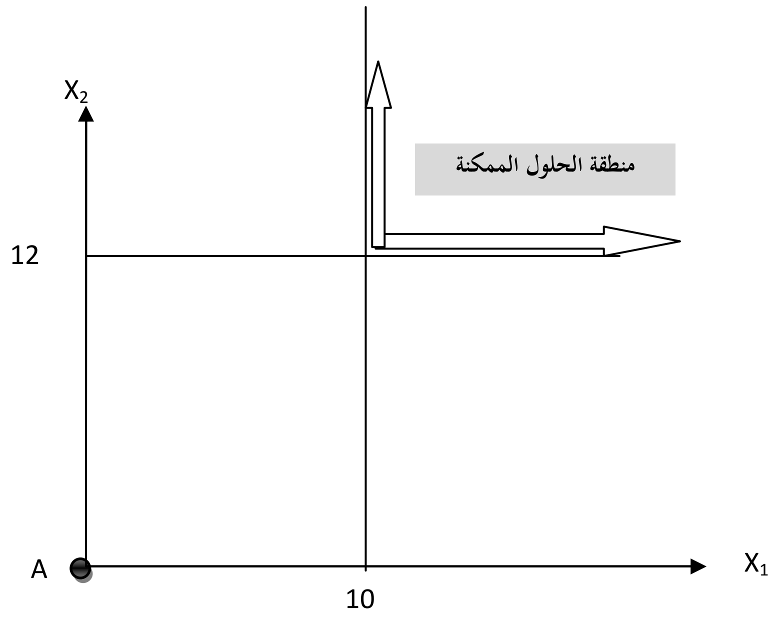
$$Max\ (Z) = 2x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 10 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ x_2 \geq 12 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

الحل :

تظهر المسألة بيانيا بعد الإسقاط كما يلي :

الشكل رقم 06:الرسم البياني للمثال التطبيقي رقم III –02



من خلال الشكل نميز أن منطقة الحلول الممكنة مفتوحة ،أي لاتوجد نقطة معينة تحدد الحل الأمثل.

III – 3 حالة وجود القيد الزائد عن الحاجة:

في مثل هذه الحالة فإن أحد القيود الذي يشكل المسألة لا يئثر على الحل الأمثل وهو بذلك لا فعالية له ولا تأثير على تحديد الحل الأمثل

<u>مثال تطبيقي III – 03</u>

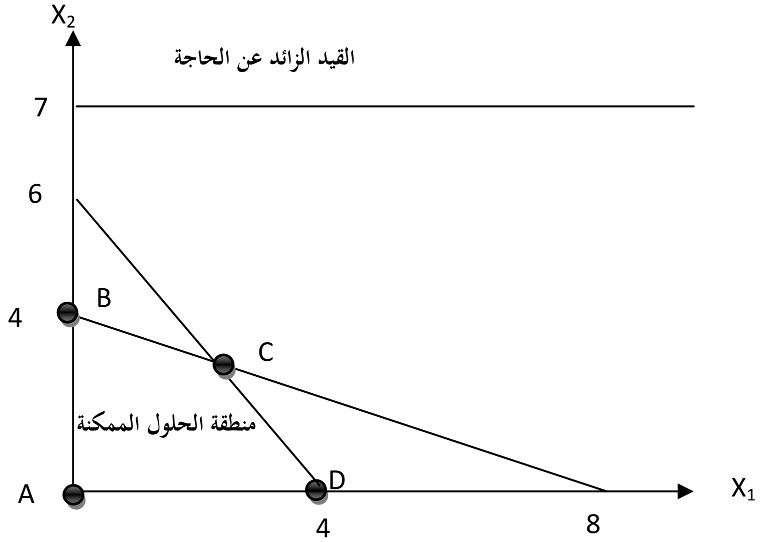
$$\text{Max } Z = 12x + 8y$$

$$\begin{cases} 6\,x + 4y \leq 24 \\ 2x + 4 \leq 16 \end{cases}$$

$$x, y \geq 0$$

الحل :

الشكل رقم 07 الرسم البياني للمثال تطبيقي III – 03



III – 4 حالة عدم وجود حلول على الإطلاق:

وتحقق هذه الحالة عندما تتعارض القيود ،مما يؤدي إلى استحالة تحديد منطقة الحلول الممكنة ومن ثم الحل الأمثل.

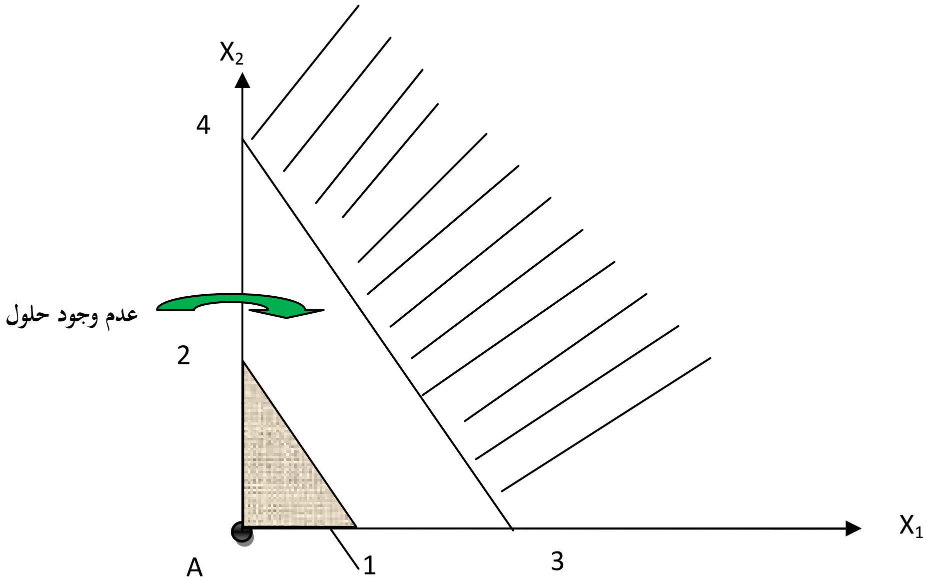
مثال تطبيقي III – 04

$$\text{Max}(Z) = 2x + 3y$$

$$\begin{cases} 2x + y \leq 2 \\ 3x + 4y \geq 12 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

الحل :

<u>الشكل رقم 07 الرسم البياني للمثال تطبيقي III – 04</u>



عندما لا تكون منطقة الحلول الممكنة موجودة ،فإنه يجب إعادة النظر في النموذج للتأكد من الصياغة الصحيحة وأين يكمن الخلل مما يسمح بتخصيص موارد أخرى ووضع تركيبة جديدة للمسألة.

تمارين مقترحة حول الطريقة الجبرية والبيانية

التمرين 01:

حل جملة المعادلات في كل حالة من الحالات التالية :

1- الحالة الأولى:

$$\begin{cases} 4X_1 + 5X_2 = 90 \\ 5X_1 + X_2 = 65 \\ 4X_1 + 2X_2 = 44 \end{cases}$$

2- الحالة الثانية:

$$\begin{cases} 5X_1 + 4X_2 = 81 \\ X_1 + X_2 = 23 \\ 2X_1 + 3X_2 = 65 \end{cases}$$

التمرين 02:

أبحث عن منطقة الحلول الممكنة فقط في كل حالة من الحالات التالية :

الحالة الأولى :

$$(Max)\ Z = 4X_1 + 3X_2$$

$$2X_1 + 3X_2 \leq 6$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 3$$

$$2X_2 \leq 5$$

$$2X_1 + X_2 \leq 4$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحالة الثانية :

$$(Min)\ Z = 18X + 10Y$$

$$4X + 6Y \geq 48$$

$$12X + 10Y \geq 120$$

$$10X + 15Y \leq 150$$

$$X , Y \geq 0$$

الحالة الثالثة :

$$(Min)\ Z = 6X + 4Y$$

$$X \geq 10$$

$$Y \geq 12$$

$$X,\ Y \geq 0$$

الحالة الرابعة :

$$(Max)\ Z = 5X_1 + 8X_2$$

$$6X_2 + 4X_1 \leq 24$$

$$X_2 + 2X_1 \leq 18$$

$$3X_1 + 9X_2 \geq 36$$

$$X_1,\ X_2 \geq 0$$

التمرين 03: باستخدام طريقة الرسم البياني، أبحث عن الحل الأمثل في الحالات التالية:

الحالة الأولى :

$$(Max)\ Z = 50X_1 + 80X_2$$

$$2X_1 + 2X_2 \leq 100$$

$$4X_1 \leq 400$$

$$8X_2 \leq 320$$

$$40X_1 + 20X_2 \leq 1600$$

$$X_1 + X_2 \geq 30$$

$$X_1,\ X_2 \geq 0$$

الحالة الثانية :

$$(Max)\ Z = 5X_1 + 8X_2$$

$$6X_2 + 4X_1 \leq 24$$

$$X_2 + 2X_1 \leq 18$$

$$3X_1 + 9X_2 \geq 36$$

$$X_1,\ X_2 \geq 0$$

الحالة الثالثة

$$(Max)\ Z = 1.5X_1 + 1X_2$$

$$2X_1 + X_2 \leq 10$$

$$X_1 + X_2 \leq 6$$

$$4X_1 \leq 4.5$$

$$X_2 \leq 4$$

$$X_1,\ X_2 \geq 0$$

الحالة الرابعة :

$$(Max)\ Z = 20X_1 + 15X_2$$

$$2X_1 + X_2 \leq 190$$

$$3X_1 \leq 6 - X_2$$

$$2X_2 = 4.5$$

$$X_1,\ X_2 \geq 0$$

التمرين 04:

اوجد منطقة الحلول الممكنة والحل الأمثل للنموذج التالي:

الحالة الأولى :

$$(Max)\ Z = 180\,X_1 + 340\,X_2$$

$$X_1 \leq 30$$

$$X_1 + X_2 \leq 54$$

$$4X_1 + 7X_2 \leq 4.5$$

$$X_2 \geq 12$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحالة الثانية :

$$(Min)\ Z = 20\,X + 120Y$$

$$1/2X + 4Y \geq 120$$

$$2X \geq 120$$

$$0X + 5Y = 150$$

$$X\,,\ Y \geq 0$$

الحالة الثالثة :

$$(Min)\ Z = 6X + 4Y$$

$$X \geq 10$$

$$Y \geq 12$$

$$X\,,\ Y \geq 0$$

الحالة الرابعة :

$$(Max)\ Z = 5X_1 + 8X_2$$

$$6X_2 + 4X_1 \leq 24$$

$$X_2 + 2X_1 \leq 18$$

$$3X_1 + 9X_2 \geq 36$$

$$X_1\,,\ X_2 \geq 0$$

المحور الثالث :

طريقة السمبلاكس وتحليل الحساسية

1- مفهومها ونشأتها.
2- خطوات طريقة السمبلاكس .
3- طريقة السمبلاكس في حالة التعظيم.
4- طريقة السمبلاكس في حالة التقليل.
5- المسألة المعكوسة.
6- حالات خاصة في طريقة السمبلاكس.
7- تمارين مقترحة .

تمهيد :

تعتبر طريقة السمبلاكس"Simplex Method أو كما يطلق عليها في بعض المراجع بـ (الطريقة المبسطة)، تعتبر من أهم محاور التحليل بالطرق الكمية المساعدة على اتخاذ القرارات التسييرية في مختلف المجالات كالإنتاج ، التوريد ، النقل ، التخزين ... وغيرها.

I- مفهومها ونشأتها:

إن طريقة الرسم البياني في حل مشاكل البرمجة الخطية،على الرغم من بساطتها،إلا أنه لا يمكن استخدامها في حل مشاكل البرمجة الخطية المعقدة التي تزيد فيها متغيرات القرار عن اثنين ،حيث لا يمكن اسقاط معادلات القيود بيانيا ، ولذلك ظهرت طريقة السمبلاكس التي طورت عام 1947 من طرف العالم الأمريكي: "*George Dantzig*" الذي تمكن من التوصل إلى حل بعض مشكلات التي كان يعاني منها سلاح الطيران الأمريكي في مجالات التخطيط وتحديد برامج الصيانة والتدريب بالاعتماد على ما يسمى: "بطريقة السمبلاكس" (*la méthode du simplexe*) والتي نشرت لاحقا في سنة 1951،(*Yvon, 2009, p. 25*)

فهي طريقة عامة تستخدم لحل المشكلات التي تتسم بعدد كبير من متغيرات البرنامج الخطي ، فهي أكثر تطورا من الطريقة السابقة اي طريقة الحل البياني حيث تعتمد على خوارزمية السمبلاكس .وتبدأ هذه الطريقة عادة بإعداد المشكلة في شكل جبري Algebric Formulation ، ثم إعداد جدول السمبلاكس، ثم اختيار الحل المبدئي Initial Solution ، ثم البحث عن الحل أو مجموعة من الحلول أفضل من الحل المبدئي وذلك حتى نصل إلى الحل الذي يحقق دالة الهدف سواء تعظيم أو تدنية .*(السيد، 1999، صفحة 59)*

II – خطوات طريقة السمبلاكس :

يمكن تلخيص خطوات طريقة السمبلاكس في الآتي :

- تشكيل النموذج الرياضي للمسألة.
- تحويل النموذج للشكل المعياري.
- وضع جدول الحل القاعدي.(الجدول الأولي للسمبلاكس)

- تحسين الحل حتى الوصول للحل الأمثل الذي يحدد وفقا لشروط معينة سيتم معرفتها لاحقا.

ويكون جدول السمبلاكس على النحو التالي :

<table>
<tr><td>معاملات المتغيرات في دالة الهدف (c_i)</td><td rowspan="2">Q_j</td><td rowspan="2">V</td><td rowspan="2">C_i</td></tr>
<tr><td>متغيرات النموذج كاملة (الأساسية – xi – والمساعدة – Ai - Si –)</td></tr>
<tr><td>معاملات المتغيرات في القيد الأول
مصفوفة
معاملات المتغيرات في القيد الثاني
المعاملات
معاملات المتغيرات في القيد الثالث ....
بحسب القيود</td><td>الكميات المتاحة</td><td>المتغيرات الأساسية أو المساعدة</td><td>معاملات المتغيرات في دالة الهدف</td></tr>
<tr><td>سطر التقييم</td><td colspan="3">دالة الهدف = Z</td></tr>
</table>

إن رسم جدول الحل القاعدي تسبقه مرحلة التحويل إلى الشكل المعياري والتي تتطلب تحديد أنواع المتغيرات الممكن توظيفها، والتي تتمثل في :

متغيرات الفوارق أو الفروق (الفجوة):

وهي متغيرات وهمية تضاف إلى القيود في حالة أقل أو يساوي ($\le$) تمثل متغيرات الطاقات العاطلة (غير المستغلة)، بحيث يرمز لها: Ai وتأخذ (i) قيمة تسلسلية بحسب عدد القيود من نفس الشكل، وتضاف هذه المتغيرات إلى الطرف الأصغر لتحول المتراجحات إلى معادلات، وتظهر بمعامل موجبة أي تضاف إلى القيد، ومعاملاتها في دالة الهدف تكون معدومة، لأن دورها مساعد فقط ولا تؤثر على قيمة الهدف:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots . a_nx_n \le B \;\Rightarrow\; a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots . a_nx_n + A_1 = B$$

متغيرات الزيادة:

أما متغيرات الزيادة فهي متغيرات وهمية تضاف إلى القيود في حالة أكبر أو يساوي ($\geq$)، بحيث يرمز لها: $\mathbf{A_i}$ وتأخذ (i) قيمة تسلسلية بحسب عدد القيود من نفس الشكل، وتضاف بإشارة سالبة للطرف الأكبر (أي تطرح من القيد) لتحقيق المساواة وتحويل المتراجحة إلى معادلة، وتظهر هذه المتغيرات في دالة الهدف بمعامل صفر (0) لأن دورها مساعد فقط ولا تؤثر على قيمة الهدف:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots.. a_nx_n \geq B \;\Rightarrow\; a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots.. a_nx_n - A_1 = B$$

غير أنه في هذه الحالة لابد من الإشارة إلى شرط عدم السلبية، فإذا افترضنا أن قيمة المتغيرات:

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ معدومة (حل مبدئي مثلا) فإن:

$\mathbf{A_1= -B}$ وهذا غير منطقي، لذلك وجب إضافة متغير آخر لكي نحافظ على شرط عدم السلبية يعرف بـ ***المتغير الإصطناعي*** الذي سنتطرق إليه في النقطة الموالية.

متغيرات اصطناعية: نحدد هنا نوعين من المتغيرات الإصطناعية :

- المتغير الاصطناعي الذي يتم إضافته للمحافظة على شرط عدم السلبية في حالة القيد أكبر من أو تساوي:

حيث هنا يُسبق المتغير الإصطناعي بمعامل كبير جدا (بمثابة غرامة) وهذا من أجل ضمان خروجه من الحل الأمثل أي في نهاية الحل، حيث يكون هذا المتغير معدوم ويصبح القيد في هذه الحالة:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots.. a_nx_n \geq B \;\Rightarrow\; a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots.. a_nx_n - A_1 + S_1 = B$$

مع العلم أن المتغير الاصطناعي متغير إضافي يساعدنا فقط على إيجاد الحل وليس له أي معنى اقتصادي ولا يمكن أن يظهر في الحل تماما.

- المتغير الاصطناعي الذي يتم إضافته للمحافظة على شرط عدم السلبية في حالة القيد يساوي:

وهي متغيرات مصطنعة وتضاف إلى القيود من نوع **يساوي** (=)، من أجل إيجاد قيمة تلبي الشروط أو القيود المفروضة في حالة ما إذا كانت المتغيرات الأساسية معدومة، بحيث يرمز لها: $\mathbf{S_i}$ وتأخذ (i) قيمة تسلسلية بحسب عدد القيود من نفس الشكل، وتظهر بمعامل موجبة أي تضاف إلى القيد:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots . a_nx_n = B \quad \Rightarrow \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots . a_nx_n + S_1 = B$$

أما في دالة الهدف فإن المتغيرات الاصطناعية تُحَّمَل بمعاملات ضخمة تعمل عكس دالة الهدف (إشارة) فتكون على النحو التالي:

فإذا كانت المسألة:

* في حالة تعظيم (***Max***) فإنها تكون: **M–** (سالبة) أي إشارة **M** عكس اتجاه الهدف.
* في حالة تخفيض (***Min***) فإنها تكون: **M +** (موجبة).

لذلك فهي لا تظهر في الحل الأمثل.

بعد إضافة متغيرات الانحراف بحسب شكل القيود في البرنامج نحاول تعديل شكل دالة الهدف بإضافة المتغيرات ومعاملتها وتعديل شرط عدم السلبية حيث لابد أن تظهر هذه المتغيرات في الشرط.

ولتبسيط هذه الخطوات ،سنحاول على توضيحها وفقا لنوع دالة الهدف وسنبدأ في حالة التعظيم ثم في حالة التخفيض .

III – طريقة السمبلاكس في حالة التعظيم:

سنعتمد هنا نفس معطيات ***المثال تطبيقي رقم I–01***، رغبة منا في مقارنة النتائج المتوصل إليها بالطرق الثلاث.

<u>مثال تطبيقي رقم III–1</u>

1–دالة الهدف :

$$\mathbf{Max\ Z = 8X_1 + 6X_2}$$

2–القيود:

قيد قسم التقطيع : $4\,X_1 + 2\,X_2 \ \leq \ 60$

قيد قسم التجميع: $2\,X_1 + 4\,X_2 \leq 48$

3-شرط عدم السلبية:

$X_1 , X_2 \geq 0$

الحل :

1. التحويل للشكل المعياري:

يتم ذلك عن طريق تحويل جميع المتراجحة إلى معادلات بإضافة متغيرات جديدة غير سالبة (كما سبق لنا وأن رأينا) إلى الطرف الأيسر حسب إتجاه الإشارة وبما أن اتجاه الإشارة أقل من أو يساوي فنضيف متغيرات تسمى : "**المتغيرات الفوارق** (الفجوة – ***Les variables d'écart***)، والتي تعبر اقتصاديا عن الطاقة العاطلة أو غير المستغلة حيث أن عائدها يساوي الصفر، أي قيمتها في دالة الهدف معدومة، ويرمز لها بالرمز: "A_i"، وعليه يصبح النموذج المعياري لهذه المسألة بالشكل التالي:

$$Max\ (Z) = 8X_1 + 6X_2 + O.A_1 + O.A_2$$

$$\begin{cases} 4\,x_1 + 2\,x_2 + A_1 = 60 \\ 2\,x_1 + 4\,x_2 + A_2 = 48 \\ x_1, x_2, A_1, A_2 \geq 0 \end{cases}$$

2. رسم جدول الحل القاعدي :

C	V	Q	8	6	0	0
			X_1	X_2	A_1	A_2
0	A_1	60	4	2	1	0
0	A_2	48	2	4	0	1
		Z = 0	8-	6-	0	0

بالنسبة لقيم سطر التقييم تم حسابها كالآتي :

$$[0 \times 2 + 0 \times 4] - 8 = -8$$

$$[0 \times 2 + 0 \times 4] - 6 = -6$$

$$[0 \times 1 + 0 \times 0] - 0 = 0$$

$$[0 \times 0 + 0 \times 1] - 0 = 0$$

* **<u>قيمة (Z)</u>:** ويتم الحساب فيه كالتالي:

$$0 = (0 \times 60) + (0 \times 48)$$

القيمة $Z = 0$ ، تناظر قيمة الربح في الطريقة البيانية المحددة عند نقطة الأصل.

3. تحسين الحل :

من خلال معطيات الجدول نلاحظ أن قيم سطر التقييم سالبة وعليه لا يعتبر الحل أمثلا وإنما يحتاج لعملية التحسين، وقبل الشروع في عملية تحسين الحل نعرض خطوات التحسين :

يتم تحسين الحل باتباع الخطوات التالية:

- **<u>تحديد المتغيرة الداخلة :</u>** والتي تقابل أكبر قيمة بالقيمة المطلقة من بين القيم السالبة المحددة في سطر التقييم.
- **<u>تحديد المتغيرة الخارجة :</u>** وذلك بقسمة قيم عمود الكميات على قيم عمود المتغيرة الداخلة، واختيار أدنى قيمة بين حواصل القسمة.
- **<u>تحديد نقطة المحور :</u>** وهي نقطة التقاء عمود المتغيرة الداخلة وسطر المتغيرة الخارجة .
- **<u>نقسم قيم سطر المتغيرة الخارجة على نقطة المحور .</u>**
- **<u>حساب باقي القيم باعتماد القانون التالي :</u>**

$$\text{القيمة الجديدة} = \text{القيمة القديمة} - \left[\frac{\text{القيمة المقابلة في سطر نقطة المحور} \times \text{القيمة المقابلة في عمود نقطة المحور}}{\text{نقطة المحور}}\right]$$

ملاحظات مهمة:

- **يكون الحل أمثلا في حالة التعظيم إذا كانت جميع قيم سطر التقييم موجبة أو معدومة والعكس في حالة التقليل.**
- **في تحديد المتغيرة الداخلة يتم اختيار اكبر قيمة بالقيمة المطلقة من بين القيم السالبة في حالة التعظيم وأكبر قيمة موجبة في حالة التقليل ،وفي حالة تساوي القيمتين يتم الإختيار عشوائيا وذلك مهما كان نوع دالة الهدف.**
- **في حالة تساوي قيم تحديد المتغيرة الخارجة يتم الإختيار عشوائيا مهما كان شكل دالة الهدف.**
- **طريقة حساب باقي القيم هي نفسها في حالة التعظيم أو التقليل.**

في مثالنا هذا:

- المتغيرة الداخلة هي : -8 والتي تقابل المتغيرة x1.
- المتغيرة الخارجة هي A1 والتي تقابل قيمة حاصل القسمة المقدر بـ $60/4 = 15$
- نقطة المحور هي 4 والتي تمثل نقطة التقاء عمود المتغيرة الداخلة وسطر المتغيرة الخارجة ،كما هو موضح في الجدول الموالي :

C	V	Q	8	6	0	0	
			X_1	X_2	A_1	A_2	
0	A_1	60	**4**	2	1	0	$\frac{60}{4}=15$
0	A_2	48	2	4	0	1	$\frac{48}{2}=24$
Z = 0			**−8**	−6	0	0	

وتحدد باقي قيم الجدول بتطبيق الخطوات التالية:

- نقسم قيم سطر المتغيرة الخارجة على نقطة المحور .
- نحسب باقي القيم باعتماد القانون التالي :

القيمة الجديدة = القيمة القديمة – [القيمة المقابلة في سطر نقطة المحور × القيمة المقابلة في عمود نقطة المحور / نقطة المحور]

فيما يلي كيفية حساب بعض القيم:

18 هي القيمة الجديدة لـ 48 وتم حسابها كما يلي :

$$48 - \left[\frac{60 \times 2}{4}\right] = 18 .$$

3 هي القيمة الجديدة لـ 4 وتم حسابها كما يلي:

$$4 - \left[\frac{2 \times 2}{4}\right] = 3 .$$

½– هي القيمة الجديدة لـ 0 وتم حسابها كما يلي :

وهكذا حتى يتم حساب جميع القيم الموجودة في الجدول والتي تخضع لهذا القانون.

<u>قيم الجدول الجديد :</u>

C	V	Q	8	6	0	0
			X_1	X_2	A_1	A_2
8	X_1	15	1	1/2	1/4	0
0	A_2	18	0	3	-1/2	1
Z = 120			0	-2	2	0

مراقبة أمثلية الحل : نلاحظ ان قيم سطر التقييم بها قيمة سالبة، والتي تمثل اقتصاديا القيمة التي يمكن أن يزيد بها الربح عند انتاج وحدة واحدة من X_2 وعليه الحل ليس أمثلا، ويحتاج لعملية تحسين، التي تتم بنفس الطريقة السابقة، وعليه وذلك على النحو التالي :

C	V	Q	8	6	0	0	
			X_1	X_2	A_1	A_2	
8	X_1	15	1	1/2	1/4	0	$\frac{15}{1/2} = 30$
0	A_2	18	0	3	-1/2	1	$\frac{18}{3} = 6$
Z = 120			0	**-2**	2	0	

بعد تحسين هذا الجدول نتحصل على الجدول الموالي التالي :

C	V	Q	8	6	0	0
			X_1	X_2	A_1	A_2
8	X_1	12	1	0	1/3	-1/6
0	X_2	6	0	1	-1/6	1/3
Z = 132			0	0	5/3	2/3

من خلال نتائج الجدول نلاحظ أن جميع قيم سطر التقييم موجبة أو معدومة ، وعليه فهو الحل الأمثل ، وهي نفس القيم المتحصل عليها بالطريقتين الجبرية والبيانية.

- شرح الجدول :

لكي تحقق المؤسسة أقصى ربح ممكن عليهاأن تنتج 12 وحدة من x1 و6 وحدات من x2 مع استغلال تام للموارد المتاحة لتحقق ربحا قدره: 132 وحدة نقدية.

تسمى القيم: $\frac{2}{3}$ ، $\frac{5}{3}$ الموجودة ضمن سطر التقييم بأسعار الظل أو تكلفة الفرصة البديلة، وهي القيمة التي تتغير بها قيمة دالة الهدف من جراء تغيير في المورد المقابل بوحدة واحدة.

مثلا: القيمة $\frac{5}{3}$ تعني أن زيادة وحدة واحدة من المورد A1، سوف يؤدي إلى:

- زيادة أرباح المؤسسة بـ: $\frac{5}{3}$ وحدة إضافية.
- وزيادة الإنتاج من المنتوج الأول ب1/3.
- وانخفاض الوحدات المنتجة من المنتوج الثاني بـ 1/6

وتصبح النتيجة كتالي:

$$X1 = 12 + \frac{1}{3}$$

$$X2 = 6 - \frac{1}{6}$$

وتصبح قيمة دالة الهدف:

$$Max\ (Z) = (12 + \frac{1}{3}) \times 8 + (6 - \frac{1}{6}) \times 6$$

IV- طريقة السمبلاكس في حالة التقليل:

مثال تطبيقي رقم IV-01

ليكن النموذج الرياضي التالي أوجد الحل الأمثل لهذه المسألة باستخدام "**طريقة السبملاكس**":

$$Min(C) = 20\,x_1 + 20\,x_2$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 5x_2 \geq 50 \\ 5\,x_1 + 10x_2 \geq 40 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل:

1. تحويل النموذج الخطي إلى نموذج معياري:

يتم ذلك من خلال تحويل جميع المتراجحات إلى معادلات بإضافة متغيرات الفوارق والمتغيرات الإصطناعية ، كما سبق ذكره ليظهر لدينا النموذج التالي :

$$\boldsymbol{Min(C) = 20x_1 + 20x_2 + 0A_1 + MS_1 + 0A_2 + MS_2}$$

$$10x_1 + 5x_2 - A_1 + S_1 = 50$$

$$5\,x_1 + 10x_2 - A_2 + S_2 = 40$$

$$x_1,\ x_2,\ A_1,\ S_1,\ A_2,\ S_2 \geq 0$$

2. إيجاد الحل القاعدي (الأولي):

يتم تكوين جدول الحل القاعدي بنفس الخطوات والقواعد التي تم شرحها في حالة التعظيم:

C	**v**	**Q**	**20** **x_1**	**20** **x_2**	**0** **A_1**	**M** **S_1**	**0** **A_2**	**M** **S_2**
M	**S_1**	50	10	5	–1	1	0	0
M	**S_2**	40	5	10	0	0	–1	1
C = 90M			15M–20	15M–20	–M	0	–M	0

كما نلاحظ من الجدول أعلاه، أنه قيمة دالة الهدف كانت: 90M وهي تكلفة باهضة للمؤسسة على اعتبار أن رقم M كبير جدا.

3.اختبار أمثلية الحل:

خلافا لمسألة التعظيم وللوصول إلى الحل الأمثل في مسائل التخفيض يجب أن تكون جميع قيم سطر التقييم سالبة أو معدومة، وبما أن قيم سطر التقييم في الجدول السابق ليست كلها سالبة أو معدومة، فهذا يعني عدم تحقق الحل الأمثل، لذلك نحتاج إلى عملية تحسين الحل:

4.تحسين الحل:

يتم في عملية التحسين العمل على تخفيض التكاليف عن طريق إخراج المتغيرات الاصطناعية من الحل، وذلك عن طريق تطبيق نفس القواعد التي تم شرحها في حالة التعظيم مع وجود فارق وحيد والمتمثل في تحديد المتغير الداخلة والتي تقابل أكبر قيمة موجبة في

سطر التقييم، هنا (حالة خاصة) حيث تساوت أكبر قيمتين موجبتين هي: 15M−20 نختار بطريقة عشوائية وليكن x1 هي متغيرة داخلة.

C	V	Q	20 x_1	20 x_2	0 A_1	M S_1	0 A_2	M S_2	
M	S_1	50	10	5	−1	1	0	0	$\frac{50}{10} = 5$
M	S_2	40	5	10	0	0	−1	1	$\frac{40}{5} = 8$
C = 90M			15M−20	15M−20	−M	0	−M	0	

إذن:

- X_1 المتغيرة الداخلة لأن تقابل أكبر قيمة في سطر التقييم والتي هي: 15M−20
- S_1 المتغيرة الخارجة لأن تقابل أقل قيمة عندما نقسم عمود Q على عمود المتغيرة الداخلة والتي هي: 6
- القيمة "10" هي نقطة المحور لأنها تمثل نقطة تقاطع عمود المتغيرة الداخلة وسطر المتغيرة الخارجة.
- والكل يحسب كما سبق وأن رأينا:

C	v	Q	20 x_1	20 x_2	0 A_1	M S_1	0 A_2	M S_2
20	x_1	5	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	0
M	S_2	15	0	$\frac{15}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	−1	1
C = 100 + 15M			0	$\frac{15M}{2} - 10$	$\frac{M}{2} - 2$	$2 - \frac{3M}{2}$	−M	0

- نلاحظ من خلال هذا الجدول أن الحل قد تحسن إذ انخفضت تكاليف دالة الهدف من القيمة "90M" إلى "100+15M"، ولكنه ليس الحل الأمثل نظرا لوجود قيم موجبة في سطر التقييم، وبالتالي يجب تحسين الحل بطريقة المعتمد وفق القواعد المعمول بها سابقا:

C	v	Q	20 x_1	20 x_2	0 A_1	M S_1	0 A_2	M S_2	
20	x_1	5	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	0	$5 / \frac{1}{2} = 10$
M	S_2	15	0	$\frac{15}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$15 / \frac{15}{2} = 2$
C = 100 + 15M			0	$\frac{15M}{2} - 10$	$\frac{M}{2} - 2$	$2 - \frac{3M}{2}$	$-M$	0	

بعد التحسين نحصل على النتائج التالية:

C	v	Q	20 x_1	20 x_2	0 A_1	M S_1	0 A_2	M S_2
20	x_1	10	1	0	$-\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{15}$
20	x_2	2	0	1	$\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{15}$	$-\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$
C =240			0		$-\frac{20}{15}$	$-M$	$-\frac{20}{15}$	$\frac{20}{15} - M$

واضح أن الحل المتوصل إليه هو الحل الأمثل بما أن سطر التقييم كله سالب أو معدوم، إذ لا يمكننا يجاد أيه أية قيمة أخرى للمتغيرات تحقق أدنى قيمة لدالة الهدف وتحترم جميع القيود، ومن هنا يتلخص الحل في أن المؤسسة تقوم بتخفيض تكاليفها إلى الحد الأقصى **C = 240** بإنتاج 10 وحدات من x_1 وتنتج وحدتين من x_2.

وعند الوصول للحل النهائي يتم استثناء المتغيرات الإصطناعية منه.

V- المسألة المعكوسة (Le Problème Dual)

يمكن صياغة مسائل البرمجة الخطية رياضيا بطريقتين،حيث يطلق على الصياغة الأولى الصيغة الأصلية أو النموذج الأولي "***Primal***" أو المسألة المطروحة، أما الصيغة الثنائية فتعرف بـ: النموذج النظير أو المسألة المعكوسة (***Problème d'ual***) أوكما يطلق عليها في بعض الأدبيات بالثنائية والتي تمثل المشكلة المناظرة للمشكلة المطروحة.

فلكل نموذج أصلي نموذج مقابل له ، بطبيعته الرياضية شأنها في ذلك شأن المسألة الأصلية. ويُستمد شكل النموذج النظير من النموذج الأصلي، فإذا كانت المشكلة الأولى تتعلق بتعظيم دالة الهدف المشكلة الثنائية ستكون تقليل دالة الهدف، بحيث تصاغ عادة من نفس البيانات التي تتضمنها المشكلة الأولى والعكس صحيح. *(النعيمي و وآخرون، 2011، صفحة 81)*

وتستخدم المسألة المعكوسة في حالات تعقد المسألة المطروحة كتعدد القيود أو صعوبة حل مشكل التخفيض، وعليه فإن كل صيغة من هذه الصيغ (المشكلة الأصلية والثنائية) تحمل تفسيرات معينة يمكن استخدامها لحل مسألة واحدة بطرق مختلفة بالرغم من أن النتائج والمعلومات التي يتم الحصول عليها من حل مسائل البرمجة الخطية وتتضمن فوائد متعددة منها سهولة التوصل إلى الحل الأمثل عندما يصعب حل المسألة الأصلية وكذا إعطاء حقائق اقتصادية تساعد على تفهم أبعاد المشكلة.

V-1 خطوات تشكيل المسألة المعكوسة:

يمكن تلخيص خطوات تحويل النموذج الأصلي إلى نموذج ثنائي بالشكل التالي: *(الموسوي، 2009، صفحة 152)*

- عندما يكون النموذج الأصلي يعبر عن مشكلة الوصول إلى أقصى قيمة Max فإنه يتحول إلى الوصول إلى أدنى قيمة Min عند إعداد النموذج الثنائي، و العكس صحيح؛
- الموارد المتاحة و المذكورة في الجانب الأيسر لقيود النموذج الأصلي تصبح معاملات دالة الهدف في النموذج الثنائي؛
- معاملات متغيرات دالة الهدف في النموذج الأصلي تصبح قيم الجانب الأيسر في النموذج الثنائي؛
- تُحول أعمدة النموذج الأصلي إلى صفوف في النموذج الثنائي؛

- كلا النموذجين متحرران من مبدأ السلبية لكافة المتغيرات (إضافة شرط عدم سلبية المتغيرات).

إضافة إلى ذلك نقوم بـ:

- تحويل اتجاه المتباينات من النموذج الأصلي إلى النموذج المقابل ($\leq$ تصبح $\geq$ و العكس)؛
- تغيير ترميز المتغيرات من النموذج الأصلي إلى النموذج المرافق ($x_1 \ldots x_n$ تصبح $y_1 \ldots y_n$).

و بناء على ذلك يصبح عدد متغيرات النموذج الثنائي مساويا لعدد قيود البرنامج الأولي.

ويمكننا تلخيص هاته الخطوات في الجدول الموالي :

	المسألة المطروحة (*Primal*)	المسألة المعكوسة (*dual*)
-دالة الهدف:	- ***Max (Z)***	- ***Min (C)***
	- ***Min (C)***	- ***Max (Z)***
- **<u>القيود</u>:**	- أكبر من أو يساوي	- أقل من أو يساوي
	- أقل من أو يساوي	- أكبر من أو يساوي
	- **متغيرات دالة الهدف:** $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$	- **متغيرات دالة الهدف:** $y_1, y_2, \ldots\ldots y_n$
	- معاملات دالة الهدف	- الطاقات المتاحة (الطرف الثاني: "***B***" في القيود)
	- الطاقات المتاحة (الطرف الثاني: "***B***" من القيود)	- معاملات دالة الهدف
	- عدد المتغيرات "***n***"	- عدد القيود "***m***"
	- عدد القيود "***m***"	- عدد المتغيرات "***n***"
	- القيود مرتبة بشكل عادي	- تستنتج القيود بحسب المتغيرات من أعلى إلى أسفل

مثال تطبيقي V– 01

يعطى لك النموذج التالي :

* دالة الهدف : $Max\ (z)= 20x_1 + 30x_2$

- **القيود**

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 1000 \ \ldots\ldots\ldots(1) \\ 3x_1 + 6x_2 \le 2400 \ \ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

شرط عدم السلبية $x_1, x_2 \ge 0$

– اوجد النموذج الرياضي للبرنامج النظير .

الحل :

(**dual**) المسألة المعكوسة	(**Primal**) المسألة المطروحة
$Min\ (C) = 1000y_1 + 2400y_2$ $\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 \ge 20 \\ y_1 + 6y_2 \ge 30 \end{cases}$ $y_1, y_2 \ge 0$	$Max\ (Z) = 20x_1 + 30x_2$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 1000 \\ 3x_1 + 6x_2 \le 2400 \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$
التحويل إلى النموذج المعياري للمسألة المعكوسة (dual)	**التحويل إلى النموذج المعياري للمسألة المطروحة (Primal)**
$Min\ (C) = 1000y_1 + 2400y_2 + 0A_1 + MS_1 + 0A_3 + MS_2$ $\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 - A_1 + S_1 = 20 \\ y_1 + 6y_2 - A_2 + S_2 = 30 \end{cases}$ $y_1, y_2, A_1, S_1, A_2, S_2 \ge 0$	$Max\ (Z) = 20x_1 + 30x_2 + 0A_1 + 0A_2$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + A_1 = 1000 \\ 3x_1 + 6x_2 + A_2 = 2400 \end{cases}$ $x_1, x_2, A_1, A_2 \ge 0$

V – 2 طرق حل المسألة المعكوسة:

يتم ايجاد حل البرنامج النظير بإحدى الطرق التالية :

- إما باتباع بنفس الطريقة المعروضة سابقا في حل مسائل السمبلاكس.
- أو باستنتاج حلها من جدول الحل النهائي للمسألة المطروحة.
- أو باستخدام طريقة المرحلتين في حالة الدالة المعكوسة هي تخفيض التكاليف.

V – 2 – 1 استنتاج الجدول النهائي للمعكوسة من جدول الحل النهائي للمطروحة:

ويتم ذلك بإتباع ما يلي:

- المتغيرات الثانوية في المسألة المطروحة (A1,A2) تصبح المتغيرات الأساسية في المسألة المعكوسة (y2,y1) والعكس صحيح.
- الكميات المثلى (المتغيرات الأساسية) لـ (x2,x1) للمسألة المطروحة تصبح قيم سطر التقييم المقابلة للمتغيرات الثانوية في المسألة المعكوسة بعد عكس الإشارة (A1,A2) (الحلول في المطروحة تصبح أسعار الظل في المعكوسة مع عكس الإشارة)
- قيم سطر التقييم للمتغيرات الثانوية (A1,A2) للمسألة المطروحة تصبح الكميات المثلى (y2,y1) في المسألة المعكوسة.(أسعار الظل في المطروحة هي حلول في المعكوسة)
- نستبعد المتغيرات الاصطناعية أي أعمدتها التي تظهر في المسألة المطروحة.
- دالة الهدف تأخذ نفس القيمة بالنسبة للنموذجين Z = C.

مثال تطبيقي V – 01

نأخذ الجدول النهائي لحل المسألة المطروحة المعروضة في المثال السابق للنموذج الرياضي التالي:

$$Max\ (Z) = 20x_1 + 30x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 1000 \\ 3x_1 + 6x_2 \leq 2400 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

فيما يلي جدول الحل النهائي:

C	V	Q	A_1	A_2	Y_1	Y_2	} متغيرات البرنامج النظير
			X_1	X_2	A_1	A_2	} متغيرات البرنامج الأصلي
30	X_2	200	0	1	$\frac{2}{9}$	$\frac{-1}{3}$	
20	X_1	400	1	0	$\frac{-1}{9}$	$\frac{2}{3}$	
Z = 14000			0	0	$\frac{40}{9}$	$\frac{10}{3}$	

<u>**الحل :**</u>

<u>**البرنامج النظير هو :**</u>

$$Min\ (C) = 1000y_1 + 2400y_2$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 \geq 20 \\ y_1 + 6y_2 \geq 30 \end{cases}$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

باتباع الخطوات المذكورة نجد الجدول التالي :

C	V	Q	1000	2400	0	0
			y_1	y_2	A_1	A_2
1000	y_2	$\frac{10}{3}$	0	1	$\frac{-2}{3}$	$\frac{1}{3}$
2400	y_1	$\frac{40}{9}$	1	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{-2}{3}$
C = 14000			0	0	-400	- 200

نلاحظ القيمة ($\frac{-2}{3}$) نقطة التقاء (y_2) مع (A_1) نلاحظ أنها في الجدول الأول كانت نقطة التقاء (x_1) مع (A_2) مع عكس الإشارة: "$\frac{2}{3}$"، أي أن قيم العمود: (A_1) في الجدول الأول تصبح سطر (y_1) في الجدول الثاني مع عكس الإشارة.

V – 2 –2 حل المعكوسة باستخدام طريقة المرحلتين:

ان طريقة المرحلتين هي طريقة أكثر سهولة من الطرق السابق ذكرها في حل مسائل البرمجة الخطية ذات المتغيرات الإصطناعية ، وسميت بطريقة المرحلتين لأنها تتكون من مرحلتين هما :

- المرحلة الأولى : يتم خلالها البحث عن الحل الأمثل لدالة هدف جديدة تتعلق بالمتغيرات الإصطناعية فقط ،معاملاتها تكون تساوي الواحد ، أما باقي المتغيرات الأخرى لا تظهر في دالة الهدف ،لأنها تضم معاملات معدومة، ثم يتم الحل بالطريقة العادية مع العلم أن الحل يكون أمثلا في هذه المرحلة لما تصبح جميع قيم سطر التقييم معدومة.
- المرحلة الثانية يتم فيها تعويض معاملات المتغيرات الأساسية للنموذج بقيمتها الأصلية ، وهنا يمكن تحديد قيم الحل الأمثل.

مثال تطبيقي V–02:

نأخذ نفس المثال السابق أ النموذج الرياضي التالي :

$$Min\ (C) = 1000y_1 + 2400y_2$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 3\,y_2 \geq 20 \\ y_1 + 6y_2 \geq 30 \end{cases}$$

$$y_1,\ y_2 \geq 0$$

المرحلة الأولى :

جدول الحل القاعدي لهذا النموذج بعد التحويل للشكل المعياري يكون على النحو التالي:

C	V	Q	0	0	0	0	1	1
			y_1	y_2	A_1	A_2	S_1	S_2
0	S_1	20	3	2	–1	0	1	0
0	S_2	30	6	1	0	–1	0	1
C = 0			-9	-3	1	1	0	0

بما أن هناك قيم سالبة في سطر التقييم فالجدول يحتاج لعملية تحسين، باتباع الخطوات السابقة، حيث نلاحظ هنا :

- أن المتغيرة الداخلة هي y1.
- المتغيرة الخارجة هي S2
- نقطة المحور هي 6

نحسب قيم الجدول الموالي بنفس الطريقة السابقة، مع أخذ بعين الإعتبار حذف عمود المتغيرة الخارجة ولا يظهر في الجدول الموالي.

C	v	Q	0 y_1	0 y_2	0 A_1	0 A_2	1 S_1
0	S_1	5	0	3/2	–1	½	1
0	y_1	5	1	1/6	0	–1/6	0
C = 0			0	-3/2	1	½	0

نلاحظ أن الجدول يحتاج لعملية تحسين أخرى ، وعليه نحصل على الجدول الموالي:

C	V	Q	0 y_1	0 y_2	0 A_1	0 A_2
0	y_2	5	0	1	–2/3	1/3
0	y_1	5	1	0	1/9	-2/9
C = 0			0	0	0	0

المرحلة الثانية : نقم بتعويض المتغيرات الأساسية بمعاملاتها الأصلية.

C	V	Q	2400 y_1	1000 y_2	0 A_1	0 A_2
1000	y_2	5	0	1	-2/3	1/3
2400	y_1	5	1	0	1/9	-2/9
C = 14000			0	0	-400	-200

وهو نفس الجدول النهائي المتحصل عليه بالطريقة العادية وعن طريق استنتاج حل المعكوسة من المطروحة.

VI – حالات خاصة في طريقة السمبلاكس:

1– حالة الحلول المتعددة :

نقول أن هناك حلول متعددة عندما يوجد لنا متغير لم يدخل للحل وقيمته في سطر التقييم معدومة .

عندما تكون قيمة 0 في سطر التقييم رغم عدم وجوده في الجدول الأخير، فهذا يعني أن هناك حل بديل يتم الحصول عليه باعتبار هذه المتغيرة التي لم تدخل للحل متغيرة داخلة ، ثم إتمام العمليات الأخرى كما هو معتاد.

مع العلم أنه بعدد الأصفار الموجودة في سطر التقييم للمتغيرات التي لم تدخل الحل نجد عدد الحلول البديلة، وذلك بالرجوع للحل الأمثل،

مثال : $\text{Max}(Z) = 6x_1 + 4x_2$

$$\begin{cases} x_1 \geq 10 \\ x_2 \geq 12 \\ \qquad\qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2– حالة عدم وجود حل ممكن :

ويكون هذا في حالة وجود متغير اصطناعي في جدول الحل النهائي ،فالمتغيرات الإصطناعية عموما عندما تخرج من الحل لا يمكن إدراجها مرة أخرى.وهذه الحالة تقابلها الحالة المحددة بتعارض القيود في الطريقة البيانية.

مثال :

$$\text{Max }(Z) = 2x_1 + 5x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 48 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3- حالة وجود عدد لا نهائي من الحلول:

كلما كانت القيم المساعدة في اختيار المتغير الخارج سالبة أو∞ فإن المسألة لها حل غير محدود أي ما لا نهاية من الحلول.

مثال:

$$\text{Max }(Z) = 6x_1 + 4x_2$$
$$\begin{cases} x_1 \geq 10 \\ x_2 \geq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4- حالة عدم الإنتظام:

ونقع في هذه الحالة إذا كانت هناك قيمتين متساويتين بالنسبة لاختيار المتغيرة الداخلة ، وهنا يتم الإختيار عشوائيا، كما يمكن أن نقع في هذه الحالة إذا تساوت قيمتين لاختيار المتغيرة الخارجة ، وتظهر هاته الحالة أساسا في حالة التناقض في القيود أو في حالة القيد الزائد عن الحاجة المذكورة في الطريقة البيانية.

مثال :

$$\text{Max }(Z) = 8000x_1 + 700x_2 + 9000x_3$$
$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 12x_3 \leq 480 \\ 5x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 600 \\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 240 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

5- حالة القيود المختلطة في النموذج الرياضي لدالة التعظيم أو دالة التقليل *(فالته، محاضرات ومسائل في مقياس رياضيات المؤسسة،، 2019-2020، الصفحات 53-54):*

في بعض الحالات يكون النموذج الرياضي للمسألة غير متجانس في إشارة القيود ، وعليه فإن التحويل للشكل المعياري يتطلب مراعاة مايلي :

- في حالة وجود قيد من النوع يساوي في الشكل القانوني ، فإنه مهما كانت دالة الهدف يضاف للطرف الأيسر للمعادلة المتغير الإصطناعي فقط.
- كل معادلة يجب ألا تحتوي على أكثر من متغير فوارق ومتغير اصطناعي واحد لا أكثر للنوعين.
- إذا كانت الدالة من نوع تخفيض فإن معامل المتغير الإصطناعي في دالة الهدف يكون موجب ، ويكون سالبا في حالة التعظيم.

<u>مثال 01 :حالة التعظيم</u>: أوجد الشكل المعياري للنموذج التالي :

$$\text{Max } (Z) = 4x_1 + 6x_2$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \leq 60 \\ x_1 + 2x_2 \leq 50 \\ x_2 = 20 \\ x_1 \geq 6 \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

<u>الحل :</u>

لإيجاد الشكل المعياري يتم تحويل المتراجحات إلى معادلات بالطريقة التالية:

$$\text{Max } (Z) = 4x_1 + 6x_2 + 0A_1 + 0A_2 + 0A_3 - MS_1 - MS_2$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + A_1 = 60 \\ x_1 + 2x_2 + A_2 = 50 \\ x_2 + S_1 = 20 \\ x_1 - A_3 + S_2 = 6 \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

<u>مثال 02: حالة التقليل</u> : <u>اوجد</u> الشكل المعياري للنموذج التالي :

$$Min(C) = 3x_1 + 5x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 = 32 \\ x_1 \leq 5 \\ x_2 \geq 1 \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

الحل : لإيجاد الشكل المعياري يتم تحويل المتراجحات إلى معادلات بالطريقة التالية:

$$Max\ (Z) = 3x_1 + 5x_2 + 0A_1 + 0A_2 + 0A_3 + MS_1 + MS_2 + MS_3$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - A_1 + S_1 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + S_2 = 32 \\ x_1 + A_2 = 5 \\ x_2 - A_3 + S_3 = 6 \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

VII – تحليل الحساسية :

VII – 1– مفهوم تحليل الحساسية :

يتأثر نموذج البرمجة الخطية بالكثير من المعطيات التي قد تؤثر على أمثلية الحل، فمن المعلوم أن الإدارات عموما ترغب دائما في إجراء بعض التغييرات على المعاملات المختلفة لأي مشكلة ما (نموذج البرمجة الخطية)، ويمكن معرفة أثر هذه التغييرات في المعاملات على الحل الأمثل عن طريق حل المسألة مرة أخرى، إلا أن هذا يتطلب إجراء حسابات كثيرة تتناسب طرديا مع عدد القيود و المتغيرات، و تحليل الحساسية هو الاسم المشتق من تحليل تغير الحل الأمثل وفقا لتغير المعاملات المختلفة، سواء كانت هذه المعاملات: مواد أولية، أيدي عاملة، تكاليف، أرباح ... إلخ. *(عبد الله السعيد، 2007، صفحة 130).*

تحليل ما بعد الأمثلية" وهو عبارة عن دراسة تأثير التغيرات في مكونات المسألة على نموذج البرمجة الخطية، أي أنه يمكن من دراسة مختلف التغيرات التي ستطرأ على الحل الأمثل في حالة تغير مكونات النموذج الخطي، وهذا راجع لعدم ثبات محيط المؤسسة وتعرضه دائما للتغيير، مما يتطلب دراسة وتحليل المجال الذي يبقى فيه الحل أمثلا، حيث يتضمن احتساب المدى الأمثل لقيم

المعاملات في النموذج (المدى الذي يمكن أن تتغير فيه دون أن يؤثر في أمثلية الحل–الحدود)، وبذلك يمكننا الإجابة عن التساؤلات:

- ماذا يحدث لو تتغير معاملات دالة الهدف؟.
- ما ذا يحدث لو تتغير الكميات المتاحة؟.
- ما ذا يحدث لو تتغير المعاملات التقنية؟.

وعليه هذه التغيرات يمكن أن تكون:

- على معاملات متغيرات دالة الهدف(C_j)؛
- على قيم الطرف الأيمن للقيود (الموارد المتاحة) (b_j)؛
- على استخدامات الموارد(a_{ij}).

VII – 2– حالات تحليل الحساسية:

أولا/ حالة تغير الكميات المتاحة للموارد (الطرف الثاني للقيد)

في بعض الحالات يمكن أن تغير الموارد المتاحة بالنسبة للمؤسسة بالزيادة او النقصان ، وعليه فإن هذا التغيير قد يؤدي إلى تغير عدد الوحدات الممكن انتاجها على اعتبار أن هذا الإنتاج مرهون بالكميات المتاحة من المواد الأولية ،و هو ما تفسره أسعار الظل لكل مسألة حسبما ذكرناه سلفا .

مثال تطبيقي:

إذا افترضنا النموذج الرياضي التالي :

$$(Max)\ Z_2 = 200X_1 + 300\ X_2$$

$$7\ X_1 + 5X_2 \leq 4200$$

$$5X_1 + 5X_2 \leq 3500$$

$$4X_1 + 8X_2 \leq 4800$$

$$X_1 \geq 0 \text{ ، } X_2 \geq 0$$

والجدول النهائي لهذا النموذج هو :

C	V	Q	200 X_1	300 X_2	0 A_1	0 A_2	0 A_3
0	A_1	300	0	0	1	-9/5	½
200	X_1	200	1	0	0	2/5	-1/4
300	X_2	500	0	1	0	-1/5	¼
Z= 190000			0	0	0	20	25

المطلوب:

- كيف سيتغير الحل لو تغيرت الكميات المتاحة من المورد الثاني لتصبح 3100، ثم 4000 وحدة؟.
- أوجد مجال تغير المورد الأول؟.

الحل :

1- بالنسبة للمورد الثاني :

إن ما يجب القيام به أولا هو تحديد مجال تغير المورد الثاني.

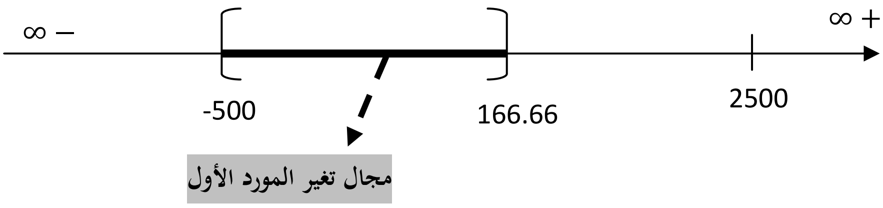
ويتم ذلك بافتراض المتغير Δ الذي يمثل مقدار التغير من المورد الثاني

$$\begin{cases} 300 + \frac{-9}{5}(\Delta) \geq 0 & \text{الشرط 1} \\ 200 + \frac{2}{5}(\Delta) \geq 0 & \text{الشرط 2} \\ 500 + \frac{-1}{5}(\Delta) \geq 0 & \text{الشرط 3} \end{cases}$$

حيث 200،300،500، هي الكميات الموجودة في جدول الحل النهائي ، والقيم ($\frac{-9}{5}$، $\frac{2}{5}$ ، $\frac{-1}{5}$) هي قيم عمود المورد الثاني في الجدول النهائي للحل .

عند حل المتراجحات السابقة نجد:

$$\begin{cases} 300 \geq \frac{9}{5}(\Delta) \Rightarrow (\Delta) \leq 166.66 \\ 200 \geq \frac{-2}{5}(\Delta) \Rightarrow (\Delta) \geq -500 \\ 500 \geq \frac{1}{5}(\Delta) \Rightarrow (\Delta) \leq 2500 \end{cases}$$



وعليه

ومنه مجال الإمكانية للمورد الثاني:

$$3500-500 \leq \mathbf{Q_2} \leq 3500 + 166.6$$

$$\mathbf{3000 \leq Q_2 \leq 3666.6}$$

- **تغيرات الحل لما تصبح $\mathbf{Q_2 = 3100}$.**

نلاحظ أن القيمة الجديدة للمورد الثاني تدخل ضمن مجال الإمكانية لهذا المورد وعليه يتغير الحل ليصبح كالآتي :

النموذج الجديد:

$(Max)\ Z_2 = 200X_1 + 300\ X_2$

$7\ X1 + 5X2 \leq 4200$

$5X1 + 5X2 \leq 3100$

$4X1 + 8X2 \leq 4800$

$X1 \geq 0$ ، $X2 \geq 0$

بما أن تغير المورد الثاني ينتمي للمجال المحسوب سابقا فإن قيم العمود Q فقط هي التي تتغير ومن ثم قيمة الربح ، ويتم حساب هاته القيم بتعويض قيمة التغير Δفي المعادلات السابقة للحصول على الكميات الجديدة للعمود Q وذلك على النحو التالي:

قيمة Δ = قيمة المورد الجديد – قيمته القديمة. وعليه قيمة Δ هي -400 .

$$\begin{cases} 300 + \frac{-9}{5}(-400) = 1200 \\ 200 + \frac{2}{5}(\Delta - 400) = 40 \\ 500 + \frac{-1}{5}(-400) = 580 \end{cases}$$

ويظهر الجدول بعد ذلك على النحو التالي:

C	V	Q	200 X_1	300 X_2	0 A_1	0 A_2	0 A_3
0	A_1	1200	0	0	1	-9/5	½
200	X_1	40	1	0	0	2/5	-1/4
300	X_2	580	0	1	0	-1/5	¼
Z= 182000			0	0	0	20	25

طريقة ثانية لحساب الربح Z :

نضرب قيمة التغير في أسعار الظل الموجودة في سطر التقييم بالشكل التالي:

$190000 - (20 \times 400 + 25 \times 400) = 182000.$

- **تغيرات الحل لما تصبح $Q_2 = 4000$.**

في هذه الحالة نلاحظ أن القيمة الجديدة للمورد لا تنتمي للمجال

$$3000 \le Q_2 \le 3666.6$$

وعليه لا يمكن استنتاج الحل النهائي وإنما يجب إعادة حل المسألة بتعويض قيمة المورد الثاني بـ 4000، وحل النموذج بالطريقة المعتادة.

2- بالنسبة للمورد الأول :

مجال تغير المورد الأول هو :

$$\begin{cases} 300 + 1\,(\Delta) \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq -300 \\ 200 + 0(\Delta) \geq 0 \\ 500 + 0\,(\Delta) \geq 0 \end{cases}$$

وعليه مجال التغير هو

$$\Delta \geq -300$$

مجال تغير الكميات المتاحة هو]+ ∞، (**4200–300**) [

ثانيا/ حالة تغير معاملات دالة الهدف:

- **حالة المتغيرات التي دخلت في الحل (موجودة في الجدول النهائي)**

إن دراسة أمثلية الحل في هذه الحالات يتمحور حول تحديد المجالات التي قد تتغير فيها معاملات دالة الهدف دون التأثير على صلاحية الحل الأمثل.

وللتوضيح أكثر نستخدم المثال السابق المعتمد في الحالة السابقة ،

المطلوب : ماذا يحدث للحل لو تغير معامل المنتوج الأول من 200 إلى 300 و.ن

الحل :

1- نبحث أولا عن مجال التغير Δ والذي يتم استنتاجه من الجدول النهائي للحل باتباع الخطوات التالية:

تغير عمود A_2 :

$$(0)\left(\frac{-9}{5}\right) + (200+\Delta)\left(\frac{2}{5}\right) + (300)\left(\frac{-1}{5}\right) \geq 0$$

$$0 + 80 + \frac{2\Delta}{5} - 60 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta \geq -50$$

تغير عمود A_3 :

$$(0)\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}(200+\Delta)+(300)\left(\frac{1}{4}\right)\geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta\leq 100$$

وعليه مجال تغير الربح في المنتوج الأول هو

كما يمكن حساب مجال التغير انطلاقا من قيم سطر المتغيرة الأساسية (المنتوج الأول X_1) وأسعار الظل وذلك على النحو التالي :

$$20+\frac{2\Delta}{5}\geq 0$$

$$25-\frac{1}{4}\ \Delta\geq 0$$

2- تحديد القيم الجديدة :

بتعويض قيمة التغير في المعادلات السابقة، يصبح جدول الحل الأمثل من الشكل التالي:

C	**V**	**Q**	**200** X_1	**300** X_2	**0** A_1	**0** A_2	**0** A_3
0	A_1	1200	0	0	1	-9/5	½
300	X_1	40	1	0	0	2/5	-1/4
300	X_2	500	0	1	0	-1/5	¼
Z= 162000			0	0	0	60	0

لما تكون قيمة التغير تنتمي للمجال فإن التغير يمس أسعار الظل وقيمة الربح فقط .

ولما تكون قيمة التغير لا تنتمي للمجال فإنه يتوجب صياغة نموذج جديد وحله بطريقة السمبلاكس.

➢ **حالة المتغيرات التي لم تدخل في الحل (غير موجودة في الجدول النهائي)**

في هذه الحالة لا يتغير أي شيء إلا عمود المنتوج الذي لم يدخل الحل .

مثال : يعطى لك النموذج التالي :

$$\text{Max } (Z) = x_1 + 9x_2 + x_3 \qquad\qquad \text{Max } (Z) = x_1 + 9x_2 + x_3 + 0A_1 + 0A_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 9 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + A_1 = 9 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + A_2 = 15 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \qquad\qquad x_1, x_2, x_3, A_1, A_2 \geq 0$$

C	V	Q	1	9	1	0	0	
			X_1	X_2	X_3	A_1	A_2	
9	A_1	9	1	2	3	1	0	$\frac{9}{2} = 4.5$
0	A_2	15	3	2	2	0	1	$\frac{15}{2} = 7.5$
Z = 0			–1	–9	–1	0	0	

C	V	Q	1	9	1	0	0
			X_1	X_2	X_3	A_1	A_2
9	X_2	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	A_2	6	2	0	–1	–1	1
$Z = \frac{81}{2} = 40.5$			$\frac{7}{2}$	0	$\frac{25}{2}$	$\frac{9}{2}$	0

– جميع قيم سطر التقييم موجبة أو معدومة مما يعني أن الحل أمثل، ونلاحظ أن كل من: (x_1, x_3) لم تدخل الحل لأن ربحها غير كاف بمقدار تكلفة التضحية:

⇐ x_1 ⇦ بـ: $\frac{7}{2}$ لتدخل إلى الحل يجب على الأقل أن يكون ربحها: $(\frac{7}{2} + 1)$

⇐ x_3 ⇦ بـ: $\frac{25}{2}$ لتدخل إلى الحل يجب على الأقل أن يكون ربحها: $(\frac{25}{2} + 1)$

- أي كي يدخل أي متغير: ($x_1, x_2, \ldots x_n$) إلى الحل يجب أن يكون ربحه يساوي على الأقل:

الربح أو التكلفة القديمة (معاملها في دالة الهدف) + تكلفة الفرصة الضائعة (قيمتها سطر التقييم)

مثلا: x_1 يجب أن يكون الربح الأدنى: $1+\frac{7}{2}=\frac{7+2}{2}=\frac{9}{2}$ لكي يدخل الحل.

x_3 يجب أن يكون الربح الأدنى: $1+\frac{25}{2}=\frac{25+2}{2}=\frac{27}{2}$ لكي يدخل الحل.

⇐ إذا:
$$\begin{cases} 9.(\frac{1}{2}) + 0.(2) - 1 - \Delta \geq 0 \\ 9.(\frac{3}{2}) + 0.(-1) - 1 - \Delta \geq 0 \end{cases}$$

⇐ بالنسبة لـx_1:

$$\frac{9}{2} - 1 - \Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq \frac{7}{2} \Rightarrow C_1 \leq 1 + \frac{7}{2} \Rightarrow C_1 \leq \frac{9}{2}$$

⇐ بالنسبة لـx_3 :

$$\frac{27}{2} - 1 - \Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq \frac{+25}{2} \Rightarrow C_3 \leq 1 + \frac{25}{2} \Rightarrow C_3 \leq \frac{27}{2}$$

هذا يعني أنه مادام:

$$\begin{cases} C_1 \in]-\infty, \frac{9}{2}] \\ C_3 \in]-\infty, \frac{27}{2}] \end{cases}$$

بالتحديد:

$$\begin{cases} C_1 \in]0, \frac{9}{2}] \\ C_3 \in]0, \frac{27}{2}] \end{cases}$$

فإن الحل لن يتغير سيبقى أمثليا، أما إذا تجاوزت معاملات: (x_1, x_3) هذا المجال فإنها ستدخل الحل وبالتالي يتغير هذا الأخير ونحتاج إلى عملية تحسين (جدول جديد).

تمارين مقترحة حول طريقة السمبلاكس وتحليل الحساسية :

التمرين الأول:

يعطى لك النموذج الرياضي التالي:

$MaxZ = 3/2\ X1 + 2X2 + X3$

$2X1 + 3X2 + 4\ X3 \leq 200$

$X1 + 2X2 + 2\ X3 \leq 150$

$X1 + X2 + X3 \leq 80$

$X1, X2, X3 \geq 0$

أوجد الحل الأمثل باستخدام طريقة السمبلاكس .

التمرين الثاني :

تنتج مؤسسة منتوجين حيث الربح في المتوج الثاني يفوق الربح في المنتوج الأول بـ 5 وحدات نقدية ،كما أن الربح في المنتوج الأول يمثل 1/12 من الكمية المتاحة من المادة الأولية الاولى، والتي بدورها تفوق،الكمية المتاحة من المادة الأولية الثانية بـ30وحدة قياس،فإذا علمت أن متطلبات المنتوج الثاني من المادة الأولية الأولى والثانية تساوي قيمة الربح المتوقعة لذلك المنتوج، وبالنسبة للمنتوج الأول فإن متطلبات الإنتاج من المادة الأولى بدورها تساوي قيمة الربح المتوقعة لهذا المنتوج ،بينما المتطلبات من المادة الثانية فهي تمثل5 و.ق /للوحدة وهي قيمة تمثل نصف ربح هذا المنتوج.

المطلوب :شكل النموذج الرياضي لهذه المسألة.ثم حلها باستخدام طريقة السمبلاكس،مع شرح الجدول النهائي للحل.

التمرين الثلث:

أوجد القيمة العظمى لدوال الهدف التالية باستخدام طريقة السمبلاكس

$$\text{Max } Z = 12X_1 + 56X_2$$

تحت الشروط التالية:

$$3X_1 + 7X_2 \le 109$$

$$2X_1 + X_2 \le 80$$

$$X_1, X_2 \ge 0$$

$$\text{Max } \{z\} = 2X + 4Y$$

تحت الشروط التالية:

$$X \le 8$$

$$Y \le 3$$

$$3X + 6Y \le 30$$

$$X, Y \ge$$

$$\text{Max } \{z\} = 4X_1 + 3X_2 + 5X_3$$

تحت الشروط التالية:

$$X_1 + X_2 + X_3 \le 20$$

$$2X_1 + 2X_2 + 3X_3 \le 45$$

$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

التمرين الثالث:

تقوم الشركة الصناعية العامة بإنتاج نوعين من الدفاتر المدرسية: دفاتر كتابة ، وكراس رسم ، ولإتمام العملية الإنتاجية ؛ لابد من استخدام آلة، وعدد معين من ساعات العمل، والوقت المتاح للآلة هو 24ساعة، بينما الوقت المتاح من عنصر العمل هو 16ساعة ، تحتاج كل وحدة منتجة من دفاتر الكتابة إلى ساعتين من الآلة، وساعتين من العمل، بينما تحتاج كل وحدة من كراس الرسم إلى 3 ساعات من الآلة و ساعة واحدة من العمل.

ويبلغ سعر كل وحدة مباعة من دفاتر الكتابة 12 دج ، ومن كراس الرسم 14دج، علما بأن الشركة لا تستطيع أن تبيع أكثر من سبع وحدات من المنتج الأول ، وست وحدات من المنتج الثاني.

وفي هذه الحالة يحتاج مدير الشركة إلى أن يحدد كمية الإنتاج من السلعتين التي تحقق للشركة أعلى عائد.

التمرين الرابع :

أوجد نموذج المسألة المعكوسة في كل حالة من الحالات التالية

1- الحالة الأولى:

$$(Min)\ Z_1 = 5X_1 + 2X_2 + X_3$$
$$2X_1 + 3X_2 + X_3 \geq 20$$
$$6X_1 + 8X_2 + 5X_3 \geq 30$$
$$7X_1 + X_2 + 3X_3 \geq 40$$
$$X_1 + 2X_2 + 4X_3 \geq 50$$
$$X_1 \geq 0 ، X_2 \geq 0 ، X_3 \geq 0$$

2 – الحالة الثانية:

$$(Max)\ Z_2 = 2X_1 + X_2$$
$$X_1 + 3X_2 \leq 6$$
$$X_1 + 5X_2 \leq 10$$
$$2X_1 + 2X_2 \leq 8$$
$$X_1 \geq 0 ، X_2 \geq 0$$

التمرين الخامس:

لتكن نماذج البرمجة الخطية التالية :

$$\begin{cases} (Min)\ Z = 4x_1 + 5x_2 \\ 3x_1 + x_2 \leq 27 \\ 5x_1 + 5x_2 = 60 \\ 6x_1 + 4x_2 \geq 60 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (Max)\ Z = 4X + 6Y \\ 4X + Y \leq 60 \\ X + 2Y \leq 50 \\ Y = 20 \\ X \geq 6 \\ X, Y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (Min)\ Z = 3X + 5Y \\ 3X + 2Y \geq 6 \\ 2X + Y = 32 \\ X \leq 5 \\ Y \geq 1 \\ X, Y \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب:

1– ضع نموذج المسألة المعكوسة (*Problème Dual*).

2– حول النموذجين إلى الشكل المعياري.

التمرين السادس: يعطى لك النموذج التالي:

$$Max\ \{z\} = 4X_1 + 5X_2$$

تحت الشروط التالية:

$$3X_1 + 2X_2 \leq 10$$
$$2X_1 + 5X_2 \leq 12$$
$$X_1\ ,\ X_2 \geq 0$$

المطلوب : استنتج نموذج المسألة المعكوسة ،ثم حلها باستخدام طريقة السمبلاكس.

التمرين السابع:

ليكن لدينا النموذج التالي:

$\text{Max}\ \{z\} = 30\ X_1 + 20\ X_2$

$6X_1 + 6X_2 \leq 420$

$3X_1 + 6X_2 \leq 300$

$4X_1 + 2X_2 \leq 240$

$X_1,\ X_2 \geq 0$

- ضع نموذج البرنامج النظير واوجد حله بطريقتين.

التمرين الثامن:

استخدم البرنامج النظير لحل المسألة التالية:

$\text{Min}\ \{c\} = 3\ X_1 + X_2 + X_3$

$X_1 + 2X_2 \geq 8$

$3X_1 - 2X_2 - X_3 \geq 6$

$-X_1 - X_2 + 4\ X_3 \geq 2$

$X_1,\ X_2,\ X_3 \geq 0$

التمرين التاسع:

يعطى لك البرنامج الرياضي التالي:

$\text{Max}\ \{z\} = 10\ X_1 + 9\ X_2$

$7/10 X_1 + X_2 \leq 630$

$1/2X_1 + 5/26X_2 \leq 600$

$X_1 + 2/3X_2 \leq 708$

$1/10X_1 + 1/4X_2 \leq 135$

$X_1, X_2, \geq 0$

إذا كان الجدول النهائي للحل معطى كما يلي :

A	V	Q	X1	X2	A1	A2	A3	A4
9	X_2	252	0	1	30/116	0	-21/16	0
0	A_2	120	0	0	-15/16	1	5/32	0
10	X_1	540	1	0	-10/16	0	30/16	0
0	A_4	18	0	0	-11/32	0	9/64	1
Z= 7668			0	0	70/16	0	111/16	0

- ❖ اشرح الجدول.
- ❖ استنتج البرنامج النظير ،وقدم حله انطلاقا من معطيات هذا الجدول.

التمرين العاشر:

ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

تعظيم الأرباح		$Max\ Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3$
قيد المادة الأولى		$X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 340$
قيد المادة الثانية		$X_1 + 2X_3 \leq 460$
قيد ساعات العمل		$3X_1 + 4X_2 \leq 420$
قيد عدم السلبية		$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

المطلوب: أدرس ماذا يحدث في الحالات التالية:

1. لو يرتفع الربح في الوحدة من المنتوج الأول إلى أكثر من 7 وحدات نقدية؟.
2. اذا ارتفع الربح في الوحدة من المنتوج الثاني إلى 10 وحدات نقدية؟.
3. عند تخفيض ساعات العمل إلى 300 ساعة فقط؟

التمرين الحادي عشر :

$$[MAX]\ Z = 8X_1 + 6X_2$$

$$4X_1 + 2X_2 \leq 60$$

$$2X_1 + 4X_2 \leq 48$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

والحل الأمثل لهذه المسألة هو كالتالي :

C_J	V	Q_j	8	6	0	0
			X_1	X_2	e_1	e_2
8	X_1	12	1	0	$^1/_3$	$-^1/_6$
6	X_2	6	0	1	$-^1/_6$	$^1/_3$
Z = 132			0	0	$^5/_3$	$^2/_3$

– المطلوب:

1– ضع نموذج المسألة المعكوسة. بين حل هذه المسألة انطلاقا من الجدول الذي أمامك.

2– بين حدود تغير مختلف الموارد بحيث لا يتغير الحل الأمثل.

التمرين الثاني عشر :

تلقت إحدى المؤسسات طلبية تتضمن إنتاج 3000 زوج من ثلاث أنواع من الأحذية (أحذية رجال P_1، أحذية أطفال P_2 أحذية نساء P_3) تحتوي بنود هذه الطلبية 1000 زوج من أحذية الرجال، وما لا يقل عن 1500 زوج من أحذية الأطفال. والجدول التالي يبين أهم المعطيات.

	أحذية رجال	أحذية أطفال	أحذية نساء	الوقت المتاح
الورشة الأولى	1^h	2^h	3^h	5000^h
الورشة الثانية	2^h	1^h	1^h	3500^h
الربح الصافي	100	250	300	–

- المطلوب:

- أوجد الحل الأمثل لهذه المسألة بإستخدام الطريقة المبسطة (*Simplexe*)؟.

- أدرس حدود تغيُّر الأرباح بالنسبة للمنتجات الثلاثة لكي يبقى الحل دون تغيير؟.

- هل يمكن تخفيض حجم ساعات عمل الورشات الى النصف.

تمرين شامل :

ينتج مصنع للأثاث أربعة أنواع من المكاتب ويمر كل نوع منها على ورشتين للإنجاز، ويقدر الزمن المتاح للعمل في الورشة الأولى بـ: 6000 ساعة، أما الورشة الثانية بـ: 4000 ساعة، ويوضح الجدول التالي الزمن بالساعات الذي يحتاجه كل نوع في كل ورشة:

المكاتب / الورشة	النوع الأول	النوع الثاني	النوع الثالث	النوع الرابع
- الورشة الأولى	4	9	7	10
- الورشة الثانية	1	1	3	40
الربح في كل نوع	12 (و.ن)	20 (و.ن)	18 (و.ن)	40 (و.ن)

المطلوب:

1)- حدد توليفة الإنتاج المثلى لتحقيق أقصى ربح ممكن.

2)- أوجد شكل البرنامج النظير (المسألة المعكوسة) لهذا البرنامج.

3)- استنتج حل البرنامج النظير من البرنامج الأصلي.

4)- ماذا يطرأ على البرنامج الأصلي لو تغير الربح الصافي للمكتب من النوع الأول بـ "-4

5)- ماذا يحدث إذا زاد ربح للنوع الرابع من المكاتب وأصبح: 60 بدلا من 40.

6)- على فرض أن الطاقة الإنتاجية للورشة الثانية ارتفعت إلى 5000 ساعة، ما تأثير ذلك على البرنامج الأصلي.

7)- حدد مجال الأمثلية أو الإمكانية بالنسبة للورشة الأولى.

امتحان في مقياس رياضيات المؤسسة – النموذج الأول–

السنة الثانية *مسار علوم التسيير–*

التمرين الأول (06 ن) :

تنتج مؤسسة نوعين من المنتجات، باستخدام مادتين أوليتين ،لإنتاج الوحدة الواحدة من المنتوج الأول تحتاج إلى 3 و.ق من المادة الأولية الأولى و 6 و.ق من المادة الأولية الثانية. بينما تحتاج الوحدة الواحدة من المنتوج الثاني إلى 4 و.ق من المادة الأولية الأولى و5و.ق من المادة الأولية الثانية. فإذا علمت أن الحد الأقصى المتاح من المادة الأولى هو 120و.ق ،و 300 و.ق من المادة الثانية كحد أدنى.

- أوجد النموذج الرياضي بشكليه القانوني والمعياري، إذا علمت أن الربح في المنتوج الأول يقدر ب8 و.ن ، وفي الثاني 15 و.ن .
- حل المسألة بالطريقة البيانية. ثم حدد الوضعية التي تقابل هذا الحل عند استخدام طريقة السمبلاكس. (دون الحل بالسمبلاكس).

التمرين الثاني (08 ن):

إذا أُعطي لك النموذج الرياضي التالي :

$$X_1+9X_2+7X_3+10X_4 \leq 6000$$

$$X_1+X_2+3X_3+40X_4 \leq 4000$$

$$Max\ (Z)=12\ X_1+20X_2+18X_3+40X_4$$

أثناء قيامك بحل هذا النموذج بالطريقة المبسطة ، بعد تحويل النموذج من شكله القانوني إلى شكله المعياري ،تحصلت على الجدول النهائي التالي :

Ci	V	Qj	X_1	X_2	X_3	X_4	A_1	A_2
	X1	4000/3		7/3	5/3		4/15	−1/15
	X4	200/3		−1/30	1/30		−1/150	4/150
Z =					10/3		44/15	4/15

- اتمم الجدول، ثم قدّم الدلالة الاقتصادية لقيم سطر التقييم في هذا الجدول.
- أوجد مجال تغير الربح في المنتوج الأول.
- حدد ماذا يحدث للحل لو ارتفعت الطاقة الإنتاجية للورشة الثانية لتصبح 5000و.ق.
- أوجد البرنامج النظير (النموذج الرياضي للمسألة المعكوسة).
- استنتج جدول الحل النهائي للمسألة المعكوسة.

التمرين الثالث (06 ن): الجدول التالي يبين الحل القاعدي لمسألة برمجة خطية

Ci	V	Qj	X_1	X_2	A_1	A_2
	A_1	16	2	4		
	A_2	24	6	4		
Z = 0			−12	−8		

- أكمل الجدول واستنتج النموذج الرياضي بشكله المعياري.
- أوجد الجدول الموالي وبين فيما إذا كان حل أمثل؟ ماذا تلاحظ (فسر النتيجة المتحصل عليها).
- إذاقررنا إضافة قيد ثالث خاص بطلبية إنتاج تقدر بـ500وحدة من المنتوجين.أوجد النموذج الرياضي الجديد بشكله المعياري.

الإجابة النموذجية للنموذج -1- في مقياس رياضيات المؤسسة.

حل التمرين الأول (06 نقاط):

- **تكوين النموذج الرياضي بشكله القانوني 01 ن**

دالة الهدف : $MAX(z)= 8X_1+15X_2$

القيود:

قيد المادة الأولية الأولى : $3X_1+4X_2 \leq 120$

قيد المادة الأولية الثانية: $6X_1+5X_2 \leq 300$

شرط عدم السلبية $X_1،X_2 \geq 0$

- **تكوين النموذج الرياضي بشكله المعياري 01.25ن**

$$MAX(z)= 8X_1+15X_2 +0A_1+0A_2-Me_1$$

$$3X_1+4X_2+A_1 =120$$

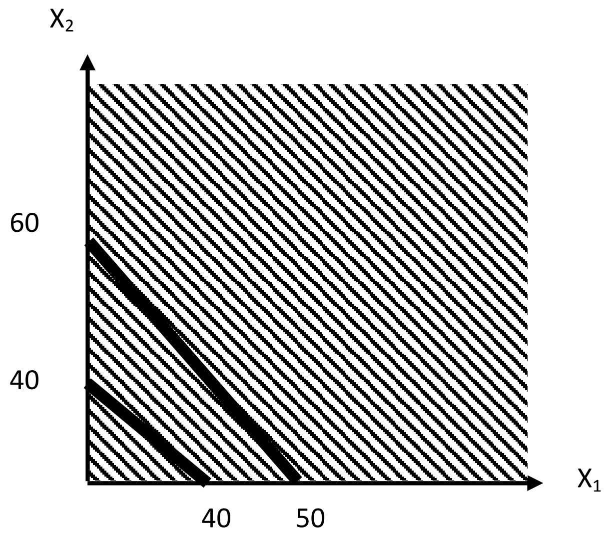
$$6X_1+5X_2-A_1+e_1 =300$$

ش.ع.س $X_1،X_2 \geq 0$

- **حل المسألة بالطريقة البيانية:**

إيجاد توليفات القيود: 0.5ن

(40,30)	$3X_1+4X_2 \leq 120$
(50,60)	$6X_1+5X_2 \leq 300$



الرسم البياني 1.25ن

- من خلال الشكل نلاحظ عدم وجود منطقة الحلول المشتركة، ومنه المسألة ليس لديها حل. 01 ن
- الوضعية التي تقابل هذه الحالة في حالة استخدام طريقة السمبلاكس **هي ظهور المتغير الإصطناعي في الحل** (الجدول النهائي) . 01 ن

التمرين الثاني (08 نقاط):

- **إكمال الجدول** 0.5 ن

			12	20	18	40	0	0
Ci	V	Qj	X_1	X_2	X_3	X_4	A_1	A_2
12	X1	4000/3	1	7/3	5/3	0	4/15	−1/15
40	X4	200/3	0	−1/30	1/30	1	− 1/150	4/150
Z = 3/56000			0	20/3	10/3	0	44/15	4/15

- **الدلالة الإقتصادية لقيم سطر التقييم :**

- بالنسبة لـ A_1 وA_2 فإن قيمهم في سطر التقييم تمثل تلك الزيادة الممكن حصولها في الربح الكلي نتيجة زيادة كل مورد بوحدة واحدة. 0.5 ن

- بالنسبة لـ X_1 و X_2 فإن القيم المقابلة لها في سطر التقييم تمثل قيمة العائد الذي ينقص المتغيرين X_1 و X_2 من أجل دخولهما للحل . **01 ن**

- **تحديد مجال تغير الربح في المنتوج الأول : 1.5 ن**

Δ (7/3) + 20/3 ≥ 0 ⟹ Δ≥ 20-/7

(5/3)Δ + 10/3 ≥ 0 ⟹ Δ ≥ -2

Δ (4/15) + 44/15 ≥ 0 ⟹ Δ ≥ -11

Δ (-1/15) + 4/15 ≥ 0 ⟹ Δ ≤ 4

ومنه مجال التغير لـ X_1 هو [-2.12 ، 4]

- **تحديد ماذا يحدث للحل لو ارتفعت الطاقة الإنتاجية للورشة الأولى لتصبح 5000و.ق**

1.5 ن

Δ (-1/15) + 4000/3 ≥ 0 ⟹ Δ ≤ 20.000

Δ (4/150) + 200/3 ≥ 0 ⟹ Δ ≤ -2500

لو ارتفعت طاقة الوشة الثانية لتصبح 5000 هذا يعني أن التغير يقدر بزيادة 1000 و.ق

هذه القيمة تنتمي لمجال التغير [-2500 ، 20.000]

وعليه ليس هناك تأثير جوهري على الحل جراء هذه الزيادة.

- **ايجاد البرنامج النظير : 01 ن**

MIN (c)= 6000 Y_1+4000 Y_2

$Y_1+Y_2 \geq 12$

$9 Y_1+Y_2 \geq 20$

$7Y_1+3Y_2 \geq 18$

$Y_1+Y_2 \geq 40$

- استنتاج جدول الحل النهائي للبرنامج النظير **02 ن**

			6000	4000	0	0	0	0
Ci	V	Qj	Y_1	Y_2	A_1	A_2	A_3	A_4
0	A2	20/3	0	0	−7/3	1	0	1/30
0	A3	10/3	0	0	−5/3	0	1	−1/30
6000	Y1	44/15	1	0	−4/15	0	0	1/150
4000	Y2	4/15	0	1	1/15	0	0	− 4/150
C= 56000/3			**0**	**0**	**−400/3**	**0**	**0**	**−200/3**

حل التمرين الثالث(06 نقاط) :

- إكمال الجدول : **0.5 ن**

			12	8	0	0
Ci	V	Qj	X_1	X_2	A_1	A_2
0	A_1	16	2	4	1	0
0	A_2	24	6	4	0	1
Z = 0			−12	−8	0	0

- استنتاج النموذج الرياضي بشكله المعياري : **01 ن**

$$MAX(z)= 12X_1+8X_2 +0A_1+0A_2$$

$$2X_1+4X_2+A_1 =16$$

$$6X_1+5X_2+A_1 =24$$

ش.ع.س $X1،X2 \geq 0$

* ايجاد الجدول الموالي 02 ن

			12	8	0	0
Ci	V	Qj	X_1	X_2	A_1	A_2
0	A_1	8	0	8/3	1	−1/3
12	X_1	4	1	2/3	0	1/6
Z = 48			0	0	0	2

نعم الجدول الموال يمثل حل أمثل لأن جميع قيم سطر التقييم موجبة أو معدومة 0.75 ن

وهناك حل بديل يتمثل في المتغيرة X2 التي قيمتها 0 في سطر التقييم وهي لم تدخل الحل. 0.75 ن

- **النموذج الجديد : 01 ن**

$$MAX(z)= 12X_1+8X_2 +0A_1+0A_2 - Me_1$$

$$2X_1+4X_2+A_1 =16$$

$$6X_1+5X_2+A_1 =24$$

$$6X_1+5X_2+e_1 =500$$

$X_1، X_2 \geq 0$ ش.ع.س

امتحان في مقياس رياضيات المؤسسة – النموذج الثاني–

السنة الثانية *مسار علوم التسيير–*

التمرين الأول (06 ن) :

-يعطى لك النموذج الرياضي التالي :

$$\text{Max } \{z\} = 1000X_1 + 1200X_2$$

تحت الشروط التالية:

$$10X_1+5X_2\leq 200$$

$$2X_1+3X_2 \leq 60$$

$$X_1\leq 34$$

$$X_2 \leq 14$$

$$X_1 \text{ , } X_2 \geq 0$$

-حل النموذج باستخدام الطريقة البيانية. بعد تحويل النموذج من شكله القانوني إلى المعياري.

-**التمرين الثاني (08 ن):**

إذا أُعطي لك جدول الحل القاعدي التالي :

Ci	V	Qj	X_1	X_2	X_3	A_1	A_2	A_3
	A_1	1000	4	2	4			
	A_2	800	2	2	1			
	A_3	400	1	3	1			
Z =			-70	-40	-60			

-اتمم الجدول، ثم أوجد النموذج الرياضي بشكليه القانوني والمعياري.

-أوجد الحل الأمثل للنموذج، ومن خلال قيم هذا الأخير حدد إذا ماكان سيتم استغلال جميع الموارد.

التمرين الثالث (06 ن):

يعطى لك النموذج الرياضي التالي :

$$(Max)\ Z = 10X_1 + 5X_2 + 12X_3 + 8X_4$$

$$2X_3 + 3X_2 \leq 70$$

$$X_1 + 5X_4 \leq 120$$

$$2X_2 + X_4 + X_1 + 8X_3 \leq 520$$

$$X_1 + 2X_2 + 6X_3 + X_4 \leq 90$$

$$X_4 + X_2 + 3X_1 \leq 630$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

- أوجد البرنامج النظير بشكليه القانوني والمعياري ، ثم استنتج جدول الحل القاعدي للبرنامج النظير (المسألة المعكوسة)

الإجابة النموذجية للنموذج -2- في مقياس رياضيات المؤسسة.

$$Max\ Z= 1000\ x_1+1200\ x_2$$

$$\begin{cases} 10\ x_1 + 5\ x_2 \leq 200 \\ 2\ x_1 + 3\ x_2 \leq 60 \\ x_1 \leq 34 \\ x_2 \leq 14 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

1- التمثيل البياني للقيود: أي رسم القيود على معلم متعامد و متجانس.

1-1- القيد الأول: $10\ x_1 +5\ x_2 \leq 200$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $10\ x_1 +5\ x_2 = 200$

نضع:

$x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5\ x_2 = 200 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 40 \qquad A\ (0\ ,\ 40)$

نضع:

$x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 10\ x_1 = 200 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 20 \qquad B\ (20\ ,\ 0)$

1-2- القيد الثاني: $2\ x_1 +3\ x_2 \leq 60$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $2\ x_1 +3\ x_2 = 60$

نضع:

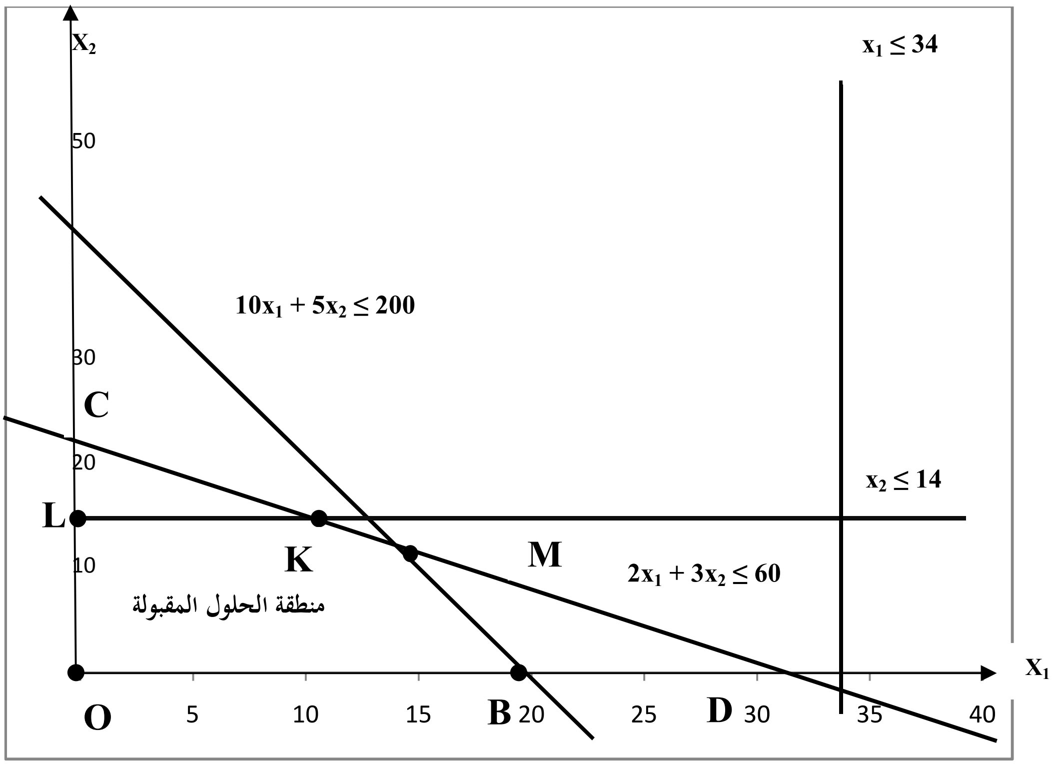
$x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3\ x_2 = 60 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 20 \qquad C\ (0\ ,\ 20)$

نضع:

$x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\ x_1 = 60 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 30 \qquad D\ (30\ ,\ 0)$

هذا إضافة إلى تحويل القيدين الأخيرين إلى معادلات: $x_1 = 34$ و $x_2 = 14$، ثم تمثيلها جميعا على معلم متعامد و متجانس.

التمثيل البياني للقيود



2- تحديد منطقة الحلول المقبولة:

نسمي المنطقة OLKMB **منطقة الحلول المقبولة،** و هي تحتوي عدد لانهائي من النقاط، و التي تتوزع داخل المنطقة أو على حدودها، أو على النقاط الرأسية (*Points extrêmes*): O, L, K, M, B.

من أجل أي نقطة من منطقة الحلول المقبولة هناك قيمة لدالة الهدف Z، و ما يهمنا هو إيجاد النقطة التي تعطي لـ Z أعظم (أمثل) قيمة، و هاته النقطة تتواجد على أحد رؤوس منطقة الحلول المقبولة، لذلك نضطر إلى إيجاد و حساب إحداثيات النقط الرأسية، ليتم تعويضها في دالة الهدف و من ثَم اختيار النقطة الرأسية التي تعطي لـ Z القيمة الأمثل.

3- تحديد إحداثيات النقاط الرأسية و تقييم Z:

من الشكل أعلاه تتضح لنا إحداثيات النقاط:

$\boldsymbol{O}\ (0\ ,\ 0) \quad \Rightarrow \quad Z = 1000\ \mathbf{(0)} + 1200\ \mathbf{(0)} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{Z = 0}$

$L\ (0\ ,\ 14)\ \Rightarrow\ Z = 1000\ (\mathbf{0}) + 1200\ (\mathbf{14})\ \Rightarrow\ \mathbf{Z = 16800}$

$B\ (20\ ,\ 0)\ \Rightarrow\ Z = 1000\ (\mathbf{20}) + 1200\ (\mathbf{0})\ \Rightarrow\ \mathbf{Z = 20000}$

أما النقاط M و K فيتم حساب إحداثياتها جبريا.

بالنسبة للنقطة M فهي عبارة عن تقاطع المستقيمين: $2\,x_1 + 3\,x_2 = 60$ و $10\,x_1 + 5\,x_2 = 200$، و عليه يتم حل جملة المعادلة لإيجاد إحداثيات هذه النقطة.

$$\begin{cases} 10x_1 + 5x_2 = 200 \\ 2x_1 + 3x_2 = 60 \ \ldots\ldots\ldots \times (-5) \end{cases}$$

بضرب المعادلة الثانية في (−5)، و جمع المعادلتين نحصل على:

$$10x_1 + 5x_2 + (-\,10x_1 - 5x_2) = 200 - 300$$

$$-\,10x_2 = 100\ \Rightarrow\ \mathbf{x_2 = 10}$$

بتعويض قيمة $\mathbf{x_2}$ في إحدى المعادلتين (و لتكن المعادلة الثانية)، نحصل على:

$$2x_1 + 3(10) = 60\ \Rightarrow 2x_1 = 60 - 30\ \Rightarrow\ \mathbf{x_1 = 15}$$

و منه:

$M\ (15\ ,\ 10)\ \Rightarrow\ Z = 1000\ (\mathbf{15}) + 1200\ (\mathbf{10})\ \Rightarrow\ \mathbf{Z = 27000}$

أما بالنسبة للنقطة K فهي عبارة عن تقاطع المستقيمين: $x_2 = 14$ و $2\,x_1 + 3\,x_2 = 60$، و عليه يتم حل جملة المعادلة لإيجاد إحداثيات هذه النقطة.

$$\begin{cases} x_2 = 14 \\ 2x_1 + 3x_2 = 60 \end{cases}$$

بتعويض قيمة $\mathbf{x_2}$ في المعادلة الثانية نحصل على:

$$2x_1 + 3(14) = 60\ \Rightarrow\ 2x_1 = 60 - 42 = 42\ \Rightarrow\ \mathbf{x_1 = 9}$$

و منه:

$K\ (9\ ,\ 14)\ \Rightarrow\ Z = 1000\ (\mathbf{9}) + 1200\ (\mathbf{14})\ \Rightarrow\ \mathbf{Z = 25800}$

و عليه فإن الحل الأمثل هو النقطة: $\mathbf{M}\ (15\ ,\ 10)$.

و بعد إيجاد الحل الأمثل للنموذج، يمكن أن نخلُص إلى أن البرنامج الإنتاجي الأمثل للمؤسسة هو كالتالي:

$x_1 = 15$ أي على المؤسسة إنتاج 15 وحدة من المنتج الأول؛

$x_2 = 10$ أي على المؤسسة إنتاج 10 وحدات من المنتج الثاني.

حل التمرين الثالث:

$$(Max)\ Z = 10X_1 + 5X_2 + 12X_3 + 8X_4$$

$$2X_3 + 3X_2 \leq 70$$

$$X_1 + 5X_4 \leq 120$$

$$2X_2 + X_4 + X_1 + 8X_3 \leq 520$$

$$X_1 + 2X_2 + 6X_3 + X_4 \leq 90$$

$$X_4 + X_2 + 3X_1 \leq 630$$

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4 \geq 0$$

إيجاد البرنامج النظير :

$$MIN\ (c) = 70Y_1 + 120Y_2 + 520Y_3 + 90Y_4 + 630Y_4$$

$$Y_2 + Y_3 + Y_4 + 3Y_5 \geq 10$$

$$3Y_1 + 2Y_3 + 2Y_4 + Y_5 \geq 5$$

$$2Y_1 + 8Y_3 + 6Y_4 \geq 12$$

$$5Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 \geq 8$$

$$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 \geq 0$$

المحور الرابع :

مســـألة النقـــل

1- مفهوم نموذج النقل .
2- متطلبات الحل في مسألة النقل.
3- النموذج الرياضي لمسألة النقل .
4- طرق حل مسألة النقل .
5- تحسين الحل والوصول للحل الأمثل.
6- حالات خاصة لمسألة النقل .
7- تمارين مقترحة.

I- مفهوم نموذج النقل

تعتبر مسألة النقل إحدى تطبيقات البرمجة الخطية الهامة، حيث أنها تهتم بتوزيع المنتجات من عدة مصادر للعرض (معامل، موانئ ...) إلى عدة مواقع للطلب (مراكز استهلاكية) بأقل تكلفة ممكنة أو بأعلى ربح أو بأقل وقت. *(سعد نور الشمرتي، و الزبيدي،، 2007،، صفحة 281)*

ويعد نموذج النقل من النماذج الرياضية المشقة أصلا من النموذج الرياضي العام للبرمجة الخطية، وبما أن نماذج النقل تتعلق بتخصيص طريقة مثلى للإنتقال المادي لكميات من السلع تتواجد في نقاط معينة يطلق عليها نقاط الإمداد ،إلى مواقع أو نقاط اخرى يطلق عليها نقاط الطلب /الإستهلاك بهدف تحديد أقل تكلفة لهذه العملية (النقل)، وعليه فإن دالة الهدف تكون غالبا من الشكل: "***Min*** **(*C*)**"،

وقد تم تطوير مسألة النقل لأول مرة عام **1941م** من طرف "***F.L.Hichcok***" حيث قدم دراسة بعنوان: "توزيع الإنتاج من عدة مصادر إلى عدة مناطق محلية"، وتم تناولها بتوسع أكبر من قبل الباحث T.CKoopmans، بينما يعتبرالباحث الأمريكي "***Dantzig***" أول من قام بحله بأسلوب البرمجة الخطية، حيث تم وضع خوارزمية النقل التي تقدم حلولا عديدة للمشاكل الاقتصادية والإدارية في قطاعات نقل الموارد من مصادر الإنتاج إلى أماكن الاستخدام وذلك بأقل تكلفة ممكنة، ولهذا فإن خوارزمية النقل تعد تطويرا لاحقا لأسلوب البرمجة الخطية، حيث كان الهدف هو تقليل دالة الهدف إلى أقل ما يمكن في ظل ظروف محددة، وبفرض أن كل المتغيرات التي تشكل نموذج النقل (مصفوفة النقل) هي قيم موجبة أو معدومة، في حين قدما كل من "***Chrnes***" و"***Cooper***" طريقة الجحر المتنقل والتي أجريا عليها بعض التحسينات لتصبح طريقة التوزيع المعدل. *(السوافيري، 2004، صفحة 168)* .

II- متطلبات الحل في مسألة النقل :

كغيرها من النماذج في البرمجة يتطلب تطبيق الحل وفقا لنموذج النقل توافر مجموعة من الشروط هي:

1)- **مستوى العرض** (***Les Sources***): وهي الكميات المتاحة من المنتجات والمطلوب نقلها من كل مصدر "***m***" (مستودع، مخزن، مصنع...) حيث: يكون عددها "***m***" أكبر أو يساوي **(2)** أي أن: $(m \geq 2)$.

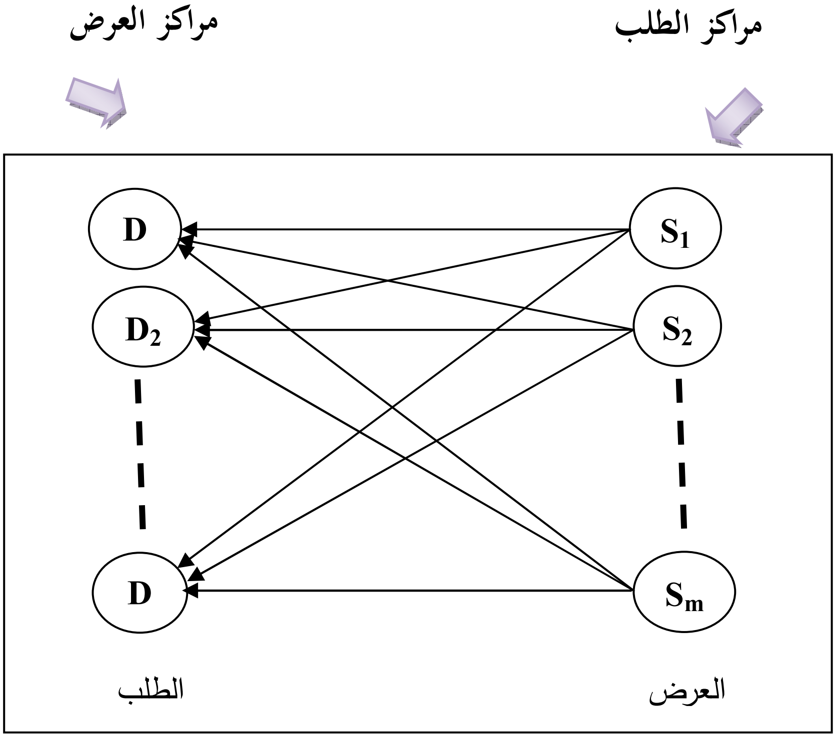
2)- **<u>مستوى الطلب</u>** (***Les Destinations***): الكميات المطلوبة أو الاحتياطات حسب جهات الطلب "n" (مصانع، وكلاء بيع، تجار...) حيث: يكون عددها "n" أكبر أو يساوي **(2)** أي أن: $(n \geq 2)$.

3)- **<u>تكلفة النقل</u>**: وهي مجمل الأعباء المتعلقة بنقل وحدة واحدة من البضائع أو غيرها من كل مصدر عرض إلى كل مركز طلب، حيث تكون محددة "C".

4)- **<u>القيود والفرضيات</u>**: يجب احترام القيود المتعلقة بتشكيل البرنامج، وهذه تتمثل في:

- في النموذج الأولي لابد من توفر الشرط اللازم بأن يكون **مجموع العرض=مجموع الطلب**.
- كل مصدر لا يمكن أن يوزع أكثر مما لديه، أي أن يجب تتساوى كمية المنتجات المنقولة من كل مصدر إنتاجي لمختلف مراكز الطلب مع الطاقة الإنتاجية المتاحة لذلك المصدر.
- كل مركز استقبال لا يمكن أن يأخذ أكثر مما يحتاج، أي أنه يجب أن يحصل كل مركز طلب على كمية من المنتجات تساوي حجم طلبه لهذه المنتجات.
- شرط الإيجابية أو عدم السلبية، بأن تكون الكميات المنقولة: "x_{ij}" أكبر من أو تساوي الصفر، أي أن: $(x_{ij} \geq 0)$ ويظهر التمثيل البياني لمشكلة النقل كما يلي :

الشكل رقم 05: التمثيل البياني لمشكلة النقل



III- النموذج الرياضي لمسألة النقل :

نموذج مسألة النقل في صيغته الرياضية هو مماثل لأي نموذج بصيغة البرمجة الخطية، إذ يتكون من: *(Baillageon، 1996، صفحة 313)*

- **صياغة دالة الهدف:** دالة الهدف في هذه الحالة هي عبارة عن تدنئة التكاليف المترتبة عن عملية النقل. و تكون من الشكل التالي:

$$Min\ Z = \sum C_{ij}\, x_{ij}$$

$$Min\ C = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} Cij\, Xij = C_{11} X_{11} + C_{12} X_{12} + \ldots\ldots + C_{nm} X_{nm}$$

حيث :

(xij) عبارة عن عدد الوحدات المراد نقلها من المصدر (i) إلى المركز (j)،

(C_{ij})عبارة عن تكلفة الوحدة للكمية المراد نقلها من المصدر (i) إلى المركز (j)،

- **القيود:** لدينا نوعين من القيود: قيود العرض و قيود الطلب.

قيود العرض: $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i$

قيود الطلب: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i$

- شرط عدم سلبية المتغيرات: $x_{ij} \geq 0$

ومن أهم شروط مسألة النقل شرط التوازن والذي يتمثل في تساوي الكميات المطلوبة والمعروضة

$$\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

ويتم الحل في مسألة النقل بعد ترجمة المعطيات السابقة الذكر في جدول ،يمكن عرضه على النحو التالي :

المصادر المراكز		مراكز الطلب D_1	D_2	D_3	....	D_m	العرض
مراكز العرض	S_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	....	c_{1m} x_{1m}	a_1
	S_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	....	c_{2m} x_{2m}	a_2
	S_3	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}	....	c_{3m} x_{3m}	a_3
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	S_n	c_{n1} x_{n1}	c_{n2} x_{n2}	c_{n3} x_{n3}	....	c_{nm} x_{nm}	a_n
الطلب		b_1	b_2	b_3	....	b_m	Σ العرض Σ الطلب

IV- طرق حل مسألة النقل :

يتطلب حل مسائل النقل المرور بالخطوات التالية:

- ❖ دراسة وفهم المسألة.
- ❖ كتابة وتشكيل النموذج .
- ❖ الوصول للحل القاعدي .
- ❖ مراقبة أمثلية الحل .
- ❖ تحسين الحل.

وهناك مجموعة من الطرق يمكن اتباعها للحصول على الحل القاعدي وهي :

- ❖ طريقة الشمال الغربي.
- ❖ طريقة أدنى تكلفة في السطر.
- ❖ طريقة أدنى تكلفة في العمود.

- ❖ طريقة أدنى تكلفة في الجدول.
- ❖ طريقة الجزاء والعقاب .

وسنحاول فيما يلي عرض كل طريقة على حدى معتمدين في ذلك على المثال التالي:

مثال تطبيقي :

لنفرض أنه لدينا مؤسسة اقتصادية لها 3 وحدات إنتاجية S_1، S_2، S_3 متواجدة في ثلاث مناطق مختلفة، كما أنها تتوفر على 3 مراكز توزيع D_1، D_2، D_3، حيث أن هذه المؤسسة تنتج المنتج P على مستوى مراكز الإنتاج، ثم تقوم بتوزيعه على مراكز التوزيع الثلاث.

تعرض مراكز الإنتاج (المنبع)كميات معينة من الإنتاج: a_1، a_2، a_3، أما مراكز التوزيع (المصب) فتقوم بطلب كميات معينة من الإنتاج: b_1، b_2، b_3، كما هو موضح في الجدولين أدناه.

مركز الإنتاج	S_1	S_2	S_3
الطاقة الإنتاجية (العرض d_i)	$a_1=100$	$a_2=200$	$a_3=300$

مركز التوزيع	D_1	D_2	D_3
الطلب (b_j)	$b_1=500$	$b_2=30$	$b_3=70$

عملية نقل المنتج P من مراكز الإنتاج الثلاثة إلى مراكز التوزيع الثلاث يترتب عليها تحمل تكلفة النقل C_{ij}.

C_{ij} تمثل تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المنتج P من مراكز الإنتاج i إلى مركز التوزيع j .

تكلفة النقل الوحدوية يقدمها الجدول أدناه:

C_{ij}	D_1	D_2	D_3
S_1	$C_{11}=1$	$C_{12}=2$	$C_{13}=1$
S_2	$C_{21}=3$	$C_{22}=2$	$C_{23}=3$
S_3	$C_{31}=4$	$C_{32}=1$	$C_{33}=5$

مشكل المؤسسة هو تحديد الكميات x_{ij} الواجب نقلها من مراكز الإنتاج إلى مراكز التوزيع.

1-طريقة الشمال الغربي :

تعتبر هذه الطريقة من أبسط وأسهل الطرق وأكثرها شيوعا ،وخاصة عندما لاتكون قيمة التكلفة ذات أهمية ،ويتم التوزيع في هاته الطريقة من مراكز العرض إلى مراكز الطلب دون أي منطق علمي ،إذ تبدأ عملية إيجاد الحل الأساسي الأولي من الزاوية الشمالية الغربية ولذلك سميت الطريقة بهذا الإسم.

حل المثال التطبيقي:

❖ ترجمة المعطيات في جدول النقل:

	D_1	D_2	D_3	a_i
S_1	$C_{11}=1$ x_{11}	$C_{12}=2$ x_{12}	$C_{13}=1$ x_{13}	100
S_2	$C_{21}=3$ x_{21}	$C_{22}=2$ x_{22}	$C_{23}=3$ x_{23}	200
S_3	$C_{31}=4$ x_{31}	$C_{32}=1$ x_{32}	$C_{33}=5$ x_{33}	300
b_i	500	30	70	600

نتأكد من تساوي العرض والطلب أولا.

$600=100+200+300$مجموع العرض.

$600=500+30+70$مجموع الطلب.

في مثالنا خانة الشمال الغربي محددة بالقيمة x_{11} ***والتي تمثل*** أول خلية موافقة لمركز الإنتاج الأول و مركز التوزيع الأول (أعلى إلى اليسار)، نجد أن طلب مركز التوزيع ، حيث قيمة طلب المركز الأول يقدر بـ 500 وحدة وعرض مركز الإنتاج يقدر بـ 100وحدة ، وعليه يتم توزيع كل المنتوج بالنسبة لمركز العرض الأول S_1 وبذلك تبقى 400 وحدة غير مغطاة في الطلبD_1 يتم تغطيتها باتباع نفس الخطوات السابقة.

وعليه يظهر جدول الحل كمايلي:

	D_1	D_2	D_3	a_i
S_1	$C_{11}=1$ **100**	$C_{12}=2$	$C_{13}=1$	~~100~~ 0
S_2	$C_{21}=3$ **200**	$C_{22}=2$	$C_{23}=3$	~~200~~ 0
S_3	$C_{31}=4$ **200**	$C_{32}=1$ **30**	$C_{33}=5$ **70**	~~300~~ ~~100~~ ~~70~~ ~~30~~
b_i	~~500~~ ~~400~~ ~~200~~ 0	~~30~~ 0	~~70~~ 0	600

و بذلك نحصل على جدول الحل الأساسي الأول، و الذي نجد فيه:

$x_{11}=100$: أي أن S_1 يقوم بتموين D_1 بمقدار 100 وحدة بتكلفة تقدر بـ 1 وحدة نقدية؛

$X_{21}=200$: أي أن S_2 يقوم بتموين D_2 بمقدار 200 وحدة بتكلفة تقدر بـ 3 وحدة ن؛

$X_{31}=200$: أي أن S_3 يقوم بتموين D_1 بمقدار 200 وحدات بتكلفة تقدر بـ 4 وحدة ؛

$X_{32}=30$: أي أن S_3 يقوم بتموين D_2 بمقدار 30 وحدة بتكلفة تقدر بـ 1 وحدة؛

$X_{33}=70$ أي أن S_3 يقوم بتموين D_3 بمقدار 70 وحدات بتكلفة تقدر بـ 5 وحدة؛

❖ يتم حساب التكلفة الكلية وفق هذه الطريقة عن طريق ضرب قيمة التكلفة الوحدوية في كمية الإنتاج لكافة مراكز الإنتاج و التوزيع، أي:

$$Z=(100\times1)+(200\times3)+(200\times4)+(30\times1)+(70\times5)=1880$$

ملاحظة: يجب التأكد من قبولية الحل أولا وذلك بتحقق القانون التالي:

عدد المتغيرات الداخلة في الحل (عدد الخلايا المملوءة) = عدد الأسطر (m)+عدد الأعمدة (n) – **1**

2-طريقة أصغر تكلفة في السطر:

تختلف هذه الطريقة عن سابقتها في إيجاد الحل الأساسي الأول، حيث أننا في هذه الطريقة نبدأ بتشبيع الخلايا انطلاقا من أدنى تكلفة في السطر، ثم التكلفة المساوية أو الموالية و هكذا، حتى يتم استيفاء كل العرض والطلب، بحيث نحصل على عدد متغيرات داخلة في الحل يساوي ($m+n-1$). (راتول، 2006، صفحة 125)

مثال تطبيقي : نأخذ نفس معطيات المثال السابق .

وفي **مثالنا** أقل تكلفة في السطر الأول "S_1" هي: "**1**" فنبدأ منها التوزيع، حيث نضع القيمة: "**100**" في الخانة: (S_1 ، D_1) ويتم بذلك شطب السطر "S_1"، والعمود "D_1"، تنقص منه قيمة التوزيع المذكور لتصبح الكمية المتبقاة (500−100) ،ويتم التوزيع بنفس الطريقة أي بالإنتقال للسطر الثاني والبحث عن التكلفة الأقل فيه والموافقة لـ C_{22}. ثم نكمل التوزيع بالبحث في كل مرة عن أقل خانة في السطر حتى يتم تشطيب السطر ، ليظهر لنا الحل في الجدول الموالي:

	D_1	D_2	D_3	a_i
S_1	$C_{11}=1$ 100	$C_{12}=2$	$C_{13}=1$	~~100~~ 0
S_2	$C_{21}=3$ 170	$C_{22}=2$ 30	$C_{23}=3$	~~200~~ ~~170~~ 0
S_3	$C_{31}=4$ 230	$C_{32}=1$	$C_{33}=5$ 70	~~300~~ ~~70~~ 0
b_j	~~500~~ ~~400~~ ~~230~~	~~30~~ ~~0~~	~~70~~ 0	600

يجب التأكد من قبولية الحل أولا وذلك بتحقق القانون التالي:

عدد المتغيرات الداخلة في الحل (عدد الخلايا المملوءة) = عدد الأسطر (m)+عدد الأعمدة (n) – 1 و بذلك نحصل على جدول الحل الأساسي الأول، و الذي نجد فيه:

$x_{11}=100$: أي أن S_1 يقوم بتموين D_1 بمقدار 100 وحدة بتكلفة تقدر بـ 1 وحدة نقدية؛

$X_{21}=170$: أي أن S_2 يقوم بتموين D_2 بمقدار 170 وحدة بتكلفة تقدر بـ 3 وحدة ن؛

$X_{22}=30$: أي أن S_2 يقوم بتموين D_2 بمقدار 30 وحدات بتكلفة تقدر بـ 2 وحدة ؛

$X_{31}=230$: أي أن S_3 يقوم بتموين D_2 بمقدار 230وحدة بتكلفة تقدر بـ 4 وحدة؛

$X_{33}=70$ أي أن S_3 يقوم بتموين D_3 بمقدار 70 وحدات بتكلفة تقدر بـ 5 وحدة؛

يتم حساب التكلفة الكلية وفق هذه الطريقة عن طريق ضرب قيمة التكلفة الوحدوية في كمية الإنتاج لكافة مراكز الإنتاج و التوزيع، أي:

$$Z=(100\times1)+(170\times3)+(230\times4)+(30\times2)+(70\times5)=1940$$

3-طريقة أصغر تكلفة في العمود:

يتم التوزيع وفقا لهذه الطريقة بنفس الكيفية السابقة، حيث يتم التوزيع حسب أقل تكلفة في كل "عمود" ونبدأ التوزيع من العمود الأول ولا يتم الانتقال إلى العمود الموالي إلا بعد تشطيب (إلغاء) العمود الحالي. وحسب مثالنا: نبدأ التوزيع من العمود "$D1$" عند أقل تكلفة المتمثلة في القيمة: "1" ونواصل الحل بنفس الطريقة إلى غاية إلغاء جميع الأعمدة. ليظهر لنا مايلي:

	D_1	D_2	D_3	a_i
S_1	$C_{11}=1$ 100	$C_{12}=2$	$C_{13}=1$	~~100~~ 0
S_2	$C_{21}=3$ 200	$C_{22}=2$	$C_{23}=3$	~~200~~ 0
S_3	$C_{31}=4$ 200	$C_{32}=1$ 30	$C_{33}=5$ 70	~~300~~ ~~100~~ ~~0~~
b_i	~~500~~ ~~400~~ ~~200~~ 0	~~30~~ 0	~~70~~ ~~0~~	600

يجب التأكد من قبولية الحل أولا وذلك بتحقق القانون التالي:

عدد المتغيرات الداخلة في الحل (عدد الخلايا المملوءة) = عدد الأسطر (m)+عدد الأعمدة (n) – **1**

نحسب قيمة التكلفة:

$$Z=(100\times1)+(200\times3)+(200\times4)+(30\times1)+(70\times5)=1880$$

4–طريقة أقل تكلفة في الجدول:

تختلف هذه الطريقة عن سابقتها في إيجاد الحل الأساسي الأول، حيث أننا في هذه الطريقة نبدأ بتشبيع الخلايا انطلاقا من أدنى تكلفة في الجدول، ثم التكلفة المساوية أو الموالية و هكذا، حتى يتم استيفاء كل العرض والطلب، بحيث نحصل على عدد متغيرات داخلة في الحل يساوي ($m+n-1$).والجدول الموالي يوضح ذلك:

	D_1	D_2	D_3	a_i
S_1	$C_{11}=1$ **100**	$C_{12}=2$	$C_{13}=1$	~~100~~ ~~0~~
S_2	$C_{21}=3$ **200**	$C_{22}=2$	$C_{23}=3$	~~200~~ ~~0~~
S_3	$C_{31}=4$ **200**	$C_{32}=1$ **30**	$C_{33}=5$ **70**	~~300~~ ~~270~~ ~~0~~
b_i	~~500~~ ~~400~~ ~~200~~ 0	30	70	600

يجب التأكد من قبولية الحل أولا وذلك بتحقق القانون التالي:

عدد المتغيرات الداخلة في الحل (عدد الخلايا المملوءة) = عدد الأسطر (m)+عدد الأعمدة (n) − 1

نحسب قيمة التكلفة:

$$Z=(100\times1)+(200\times3)+(200\times4)+(30\times1)+(70\times5)=1880$$

5- طريقة الجزاء والعقاب (طريقة فوجل) *(Méthode de Vogel)*:

تعتبر طريقة فوجل التقريبية (طرقة الفروقات العظمى) من أهم الطرق الثلاث على الإطلاق لما تتميز به هذه الطريقة من القدرة على الوصول للحل الأمثل أو الحل القريب من الأمثل، و نادرا ما تكون طريقة التكلفة الدنيا وطريقة الزاوية الشمالية الغربية أفضل من طريقة فوجل، وتتلخص خطوات إيجاد الحل الابتدائي لهذه الطريقة كما يلي:

- ❖ نقوم بحساب "الغرامات" وهي الفرق بين أقل تكلفتين نقل في كل سطر وكل عمود.
- ❖ نبدأ التوزيع أو بالأحرى نختار السطر أو العمود الذي يحتوي على أعلى غرامة أو أكبر فرق، ونقوم بالتوزيع بالنسبة للسطر أو العمود المختار، عند الخلية التي تحتوي على أقل تكلفة.
- ❖ بعد التوزيع في السطر أو العمود المختار بأقل تكلفة سيتم إلغاء (تشطيب) سطر أو عمود نكرر حساب الغرامات ونقوم بالتوزيع بنفس الطريقة.
- ❖ نواصل الحل بإتباع نفس الخطوات: حساب الغرامات، تحديد أكبر غرامة (سطر أو عمود)، اختيار الخانة ذات أقل تكلفة، القيام بالتوزيع، إلغاء سطر أو عمود...

ملاحظات:

- ❖ في حالة تساوي الغرامتين : نبحث عن أقل تكلفة في السطر أو العمود .
- ❖ في حالة تساوي التكلفتين : نختار أكبر توزيع.
- ❖ في حالة تساوي الكميات الموزعة نختار عشوائيا.

لنأخذ **المثال التطبيقي** السابق للتوضيح أكثر:

بالعودة إلى مثالنا السابق، سنقوم بتطبيق مراحل هذه الطريقة، وفق المراحل التالية:

❖ نقوم بحساب **الغرامات** (الفرق بين أدنى تكلفتين) على مستوى جميع الأسطر و الأعمدة فنحصل على القيم:

❖ بالنسبة للأسطر:

$1-1=0$

$3-2=1$

$4-1=3$

❖ بالنسبة للأعمدة:

$3-1=2$

$2-1=1$

$3-1=2$

❖ نقوم باختيار أكبر غرامة بين القيم المحسوبة،

نلاحظ في هذا المثال أن 3 هي أكبر غرامة والموجودة في السطر الثالث المقابل لـ S_3 ونقم بالتوزيع في هذا السطر باختيار الخانة التي تضم أدنى تكلفة والمقدرة هنا بـ 1 والتي توافق الخانة x_{32} و نقم بعملية التوزيع بالطريقة المعتادة حيث سيتم هنا شطب العمود D_2 الذي يطلب الكمية 30 وحدة، والتي يتم تخفيضها من قيمة S_3 لتنتج القيمة. $300-30=270$.

❖ في مرحلة موالية نعيد حساب الغرامات من جديد بنفس الطريقة السابقة فنتحصل على النتائج التالية:

❖ بالنسبة للأسطر:

$1-1=0$

$3-3=0$

$5-4=1$

❖ بالنسبة للأعمدة:

$3-1=2$

العمود الثاني تم إلغاؤه.

$3-1=2$

❖ نقوم باختيار أكبر غرامة بين القيم المحسوبة،

وهي هنا 2 التي نلاحظ أنها موجودة مرتين في العمود S_3 و العمود S_1 ، نلاحظ هنا بعد تساوي الغرامتين تساوي التكلفتين كذلك وهما $C_{13}=1$ و $C_{11}=1$ وعليه نختار التكلفة التي تقابل الخانة ذات أكبر توزيع وهي $C_{11}=1$ التي تضم القيمتين 500 و 100.ثم نتمم عملية التوزيع أين سيتم توزيع القيمة الكلية ل S_1 والمقدرة بـ 100 وحدة ، والتي يتم تخفيضها من قيمة D_1 ***والمقدرة بـ 500 لتصبح القيمة الجديدة لهذا العمود هي 400. وعليه يتم تشطيب السطر الأول S_1*** لأنه تم توزيع جميع كمياته.

- نكمل عملية التوزيع بحساب الغرامات الجدية التي ستظهر كما يلي:

❖ بالنسبة للأسطر :

السطر الأول تم إلغاؤه

3−3=0

5−4=1

❖ بالنسبة للأعمدة:

4−3=1

العمود الثاني تم إلغاؤه.

5−3=2

❖ نقوم باختيار أكبر غرامة بين القيم المحسوبة،

وهي هنا 2 التي نلاحظ أنها موجودة في العمود S_3 ، نختار الخانة التي تحتوي على أقل تكلفة وهي $C_{23}=3$ التي تضم القيمتين 200 و 70.ثم نتمم عملية التوزيع أين سيتم توزيع القيمة الكلية ل D_3 والمقدرة بـ 70 وحدة ، والتي يتم تخفيضها من قيمة $S2$ والمقدرة بـ 200 لتصبح القيمة الجديدة لهذا السطر هي 130. وعليه يتم تشطيب العمود الثالث D_3 لأنه تم توزيع جميع كمياته.

- نكمل الحل بنفس المنوال ،ليظهر لنا الجدول النهائي كما يلي:

	D_1	D_2	D_3	a_i	الغرامات				
S_1	$C_{11}=1$ 100	$C_{12}=2$	$C_{13}=1$	~~100~~ 0	0	0	/	/	/
S_2	$C_{21}=3$ 130	$C_{22}=2$	$C_{23}=3$ 70	~~200~~ ~~130~~ 0	1	0	0	3	3
S_3	$C_{31}=4$ 270	$C_{32}=1$ 30	$C_{33}=5$	~~300~~ ~~270~~ 0	3	1	1	4	/
b_j	~~500~~ ~~400~~ ~~270~~ 0	~~30~~ 0	~~70~~ ~~0~~	600					
الغرامات	2	1	2						
	2	/	2						
	1	/	2						
	1	/	/						
	3	/	/						

يجب التأكد من قبولية الحل أولا وذلك بتحقق القانون التالي:

عدد المتغيرات الداخلة في الحل (عدد الخلايا المملوءة) = عدد الأسطر (m)+عدد الأعمدة (n) – 1

$$Z=(100\times1)+(130\times3)+(270\times4)+(70\times3)+(30\times1)=1810$$

نلاحظ أنها أدنى تكلفة محققة من بين كل الطرق المعروضة، وهو ما يؤكد أن طريقة الجزاء والعقاب هي أفضل طريقة تعطي توزيع يقارب الأمثلية، حيث أن من مزاياها الوصول إلى حل أولي قد يكون أحيانا هو الحل الأمثل أو يكون قريب من الحل الأمثل، لذلك غالبا ما يعتمد عليها كثيرا في إيجاد الحل الأولي.

تتيح هذه الطرق فقط حلا أوليا ممهدا للحل النهائي للمسألة، يراعي في هذه الخطوة فقط شرط العملية، والمتمثل في توازن نموذج النقل أي يجب تساوي الكمية المطلوبة مع الكمية المتاحة، وحتى يكون الحل الإبتدائي عملي يجب أن يحقق الشروط التالية:

- يجب توزيع كل الوحدات المعروضة من طرف المصدر العرض.
- يجب أن تلبى طلبات كل المراكز.
- يجب أن يساوي عدد الخلايا المشغلة الأساسية ($m + n - 1$).

V- تحسين الحل والوصول للحل الأمثل:

تقدم الطرق الخمسة السابقة الحل الأولي للمسألة، وإيجاد التوزيع المبدئي للنموذج، وقد يحتاج هذا الحل الأولي أحيانا لعملية التحسين للوصول إلى الحل الأمثل، والذي يؤدي إلى أقل تكلفة ممكنة.

وتتمثل خطوات تحسين الحل فيما يلي :

1- التأكد من قبولية الحل وذلك بتحقق القانون :

عدد المتغيرات الداخلة في الحل (عدد الخلايا المملوءة) = عدد الأسطر (***m***)+عدد الأعمدة (***n***) – **1**

2- مراقبة الحل :

لمراقبة الحل القاعدي يجب المرور بالخطوات التالية:

- ✓ يجب أن نسبق كل تكلفة موجودة في المصفوفة بالإشارة (–).
- ✓ نظيف سطر يدعى **I** وعمود يسمى **J** .
- ✓ نقوم بحساب قيم **I** و **J** بواسطة القانون $I + J = C$، بعد أن نختار العمود أو السطر الذي يحوي أكبر خانات مملوءة ونعطي **القيمة 0** لـ **I** أو **J** حسب الحالة.
- ✓ نقوم بتقييم الخانات غير الأساسية لاختيار أمثلية الحل الأولي، وذلك من خلال حساب ما يسمى بـ: "الاقتصاد في التكلفة" الخاص بكل خانة والذي يرمز له بالرمز: "Eij" حيث يحسب بالعلاقة:

$E_{ij} = I + J - C$ (كل الخانات يحسب لها الاقتصاد).

فإذا كانت كل قيم "Eij" موجبة أو معدومة فإن الحل أمثل ($E_{ij} \geq 0$)، أما إذا كانت هناك قيم أو حتى قيمة واحدة سالبة فإن الحل ليس أمثليا ويتطلب عملية تحسين.

مثال تطبيقي:

سنحاول فيما يلي تطبيق ما سبق ذكره على المثال السابق .

لنا العمود الأول D_1 يضم أكبر عدد من الخانات المملوءة وعليه نضع $J_1 = 0$.

- نحسب باقي قيم I و J بتطبيق العلاقة $I + J = C$ ،نجد:

$I_1 + J_1 = -1 \Rightarrow I_1 = -1$

$I_2 + J_1 = -3 \Rightarrow I_2 = -3$

$I_3 + J_1 = -4 \Rightarrow I_1 = -4$

$I_2 + J_3 = -3 \Rightarrow J_3 = 0$ لأن $(I_2 = -3)$

$I_3 + J_2 = -1 \Rightarrow J_2 = 3$ لأن $(I_3 = -4)$

ملاحظة : يتم حساب قيم I و J انطلاقا من الخانات المملوءة فقط

وعليه نتحصل على الجدول التالي الخاص بمثالنا :

		D_1	D_2	D_3	a_i
		$J_1=0$	$J_2=3$	$J_3=0$	
S_1	$I_1= -1$	-1 100	-2	-1	100
S_2	$I_2= -3$	-3 130	-2	-3 70	200
S_3	$I_3= -4$	-4 270	-1 30	-5	300
b_i		500	30	70	**600**

- نحسب قيم Eij بتطبيق القانون السابق نجد القيم التالية:

$E_{11} = -1+0+1=0$

$E_{12} = -1+3+2=4$

$E_{13} = 0-1+1=0$

$E_{21} = -3+0+3=0$

$E_{22} = -3+0+2=2$

$E_{23} = -3+0+3=0$

$E_{31} = -1+0+1=0$

$E_{32} = -3+0+3=0$

$E_{33} = -4+0+5=1$

وعليه نتحصل على الجدول التالي :

		D_1	***D_2***	***D_3***	***a_i***
		J_1=0	***J_2=3***	***J_3=0***	
S_1	**I_1= -1**	**(-1** 100 **0)**	**(-2** **4)**	**(-1** **0)**	100
S_2	**I_2= -3**	**(-3** 130 **0)**	**(-2** **2)**	**(-3** 70 **0)**	200
S_3	**I_3= -4**	**(-4** 270 **0)**	**(-1** 30 **0)**	**(-5** **1)**	300
b_i		500	30	70	600

- نقوم بتقييم الخانات غير الأساسية لاختيار أمثلية الحل الأولي **فإذا كانت كل قيم "Eij" موجبة أو معدومة فإن الحل أمثل (0 ≤ "Eij")**، أما إذا كانت هناك قيم أو حتى قيمة واحدة سالبة فإن الحل ليس أمثليا ويتطلب عملية تحسين.

ومن خلال قيم "**Eij** المعروضة في الجدول نلاحظ أنها كلها معدومة أو موجبة.

بينما إذا كانت هناك قيمة سالبة فإنه يتوجب إجراء عملية التحسين.

ملاحظة: الخانات المملوءة يكون "Eij الخاص بها معدوم

- **قيمة التكلفة الدنيا هنا هي 1810.**

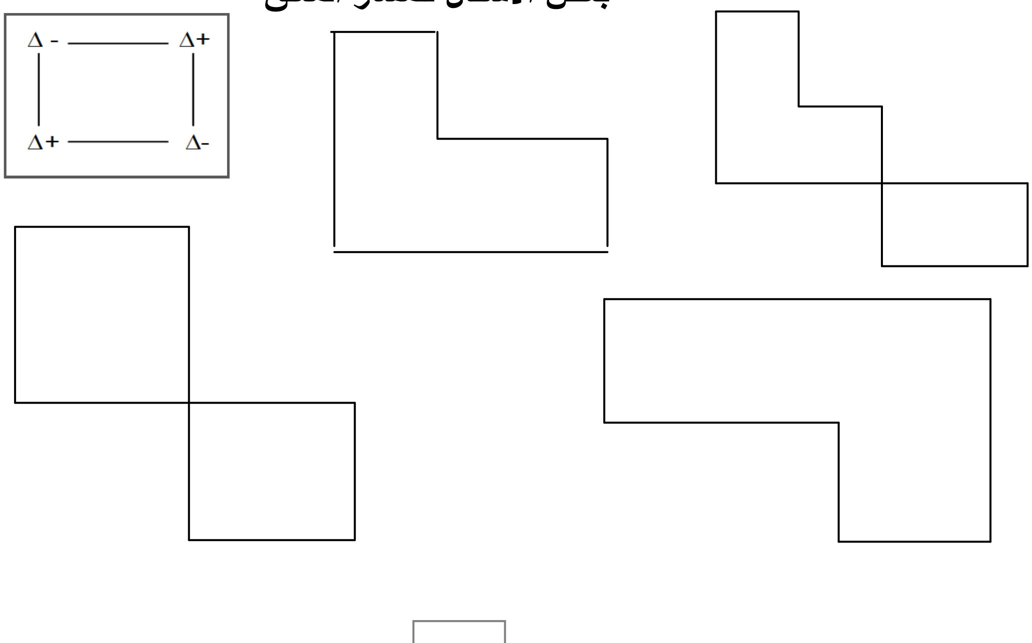
3- تحسين الحل :

إذا كانت هناك قيم أو حتى قيمة واحدة سالبة فإن الحل ليس أمثليا ويتطلب **عملية تحسين** تتم وفقا للخطوات التالية:

- نبحث في الجدول عن الخانة التي تحتوي أصغر: "E_{ij}" سالب أي أكبر قيمة مطلقة لـ "E_{ij}" ضمن القيم السالبة، وهذا يعني أننا نبحث عن الخانة التي تسمح بتحقيق أكبر تخفيض أو اقتصاد في التكلفة، في حالة تساوي أقل "E_{ij}" نختار عشوائيا (حسب الشروط الموالية).
- نضيف الكمية: "$\Delta +$" في الخانة المناسبة ذات أصغر: "E_{ij}" سالب.
- نعين ما يسمى بالـ: "**مسار المغلق**" للحفاظ على توازن المصفوفة، بحيث تكون في هذا المسار خانة واحدة فقط شاغرة (فارغة) وهي خانة أصغر "E_{ij}" سالب المختارة، والتي تمثل نقطة البداية التي ننطلق منها لتكوين المسار المغلق، إذ نضع عندها القيمة المجهولة: "$\Delta+$" (المتغير الداخل).
- إن إضافة "$\Delta +$" يعني جعل إحدى الخانات الغير أساسية خانة أساسية أي (متغير داخل) وذلك يتطلب إيجاد متغيرة خارجة للمحافظة على توازن المصفوفة، أي جعل خانة مملوءة فارغة.

إن رسم **المسار المغلق يتحدد من خلال** التنقل على مستوى الخانات المملوءة فقط دون الاعتماد على الخانات الفارغة، لذلك نقوم بتبادل كميات بين الخلايا المملوءة فقط مع إحداث "**المسار المغلق**"، الذي يجب أن ينطلق وينتهي عند الخلية الفارغة أو الشاغرة المراد تقييمها والتي تسمح بتحقيق أكبر تخفيض أو اقتصاد في التكلفة، **والمسار المغلق** هو عبارة عن مستقيمات عمودية وأفقية بحيث تقع الخلايا المملوءة وخلية وحدة شاغرة عند الزوايا القائمة له، ونوضح بعض المسارات المغلقة في الأشكال التالية:

- **بعض الأشكال للمسار المغلق**



عموما فإن أساس المسار المغلق هو شكل مربع وأربع زوايا قائمة كل زاويتين متقابلتين يحملان إشارتان متماثلتان تكون معاكسة للزاويتين المتقابلتين الأخريين أي على الشكل.

- انطلاقا من قيم الخانات المملوءة والتي تحمل إشارة سالبة "$-\Delta$" يتم تحديد المتغير الخارج وفي نفس الوقت تحدد قيمة "$+\Delta$" المجهولة للخانة الفارغة، وذلك بإختيار أصغر قيمة بين "$-\Delta$" للخانتين المملوءتين، حيث تطرح هذه القيمة من الخانة ذات: "$-\Delta$" وتضاف لقيم الخانات ذات: "$+\Delta$".
- ينتج بعد ذلك جدول جديد متوازن بنفس الكيفية (كيفية التوزيع) انطلاقا من معطياته نقوم بحساب المعاملات **(I)** و**(J)**، ثم "E_{ij}" مع حساب مجموع التكاليف.
- في حالة إيجاد "E_{ij}" مرة أخرى سالبة نعيد نفس الخطوات السابقة حتى نصل إلى الحل الأمثل الذي تكون فيه جميع قيم: "E_{ij}" موجبة أو معدومة.

<u>**مثال تطبيقي :**</u>

نأخذ نفس المثال السابق وجدول الحل بطريقة الشمال الغربي وبعد حساب **(I)** و**(J)**، ثم "E_{ij}" نحصل على الجدول الموالي:

		D_1	D_2	D_3	a_i
		$J_1=0$	$J_2=3$	$J_3=-1$	
S_1	$I_1=-1$	(-1 100 0) -Δ	(-2 4)	(-1 -1) Δ +	100
S_2	$I_2=-3$	(-3 200 0)	(-2 2)	(-3 -1)	200
S_3	$I_3=-4$	(-4 200 +Δ 0)	(-1 30 0)	(-5 70 -Δ 0)	300
b_i		500	30	70	600

لقد تم تشكيل المسار انطلاقا من وجود قيمتين سالبتين لـ "E_{ij}" سالب في الخانة (S_1/D_3) والخانة (S_2/D_3)حيث قيمته -1 .

وهنا تم الإختيار عشوائيا ، وعليه تم تشكيل مسار مغلق ينطلق من هاته الخانة ويمر فقط بالخانات المملوءة ليعود إليها مشكلا رباعي يضم قيمتين موجبتين لـ Δ وقيمتين سالبتين .

لتحديد القيمة التي يأخذها Δ نختار من بين الخانات ذات الإشارة السالبة لـ Δ ونختار أقل قيمة وهنا القيمتين الممثلتين لـ $-\Delta$ هما ، 70 و 100 وعليه نختار القيمة الأقل وهي 70 ونعوضها في خانات المسار المغلق حسب الإشارة التي يأخذها Δ فنحصل على الجدول الموالي بعد إعادة حساب قيم "E_{ij}" التي نحكم من خلالها على أمثلية الحل من عدمها :

		D_1	D_2	D_3	a_i
		$J_1=0$	$J_2=3$	$J_3=-1$	
S_1	$I_1=-1$	(-1 30 0)	(-2 4)	(-1 70 0)	100
S_2	$I_2=-3$	(-3 200 0)	(-2 2)	(-3 0)	200
S_3	$I_3=-4$	(-4 270 0)	(-1 30 0)	(-5 0 0)	300
b_i		500	30	70	600

من خلال إعادة حساب قيم "E_{ij}" نجد كل القيم موجبة أو معدومة وعليه فهو حل أمثل

نحسب قيمة التكلفة :

$$Z=(30\times1)+(200\times3)+(270\times4)+(30\times1)+(70\times1)=1810$$

ونلاحظ هنا انخفاض في قيمة التكلفة من 1880 إلى 1810.

VI- حالات خاصة لمسألة النقل :

1- <u>حالة الإختلاف بين العرض والطلب:</u>

غالبا ما نقع في حالات عدم التوازن بين الطلب والعرض ، هنا لا يمكننا الحل باستخدام مسألة النقل إلا بعد تحقيق شرط التوازن بين الكميات المطلوبة والكميات المعروضة ويتم ذلك بإضافة عمود أو سطر وهميين حسب الحالة التي تصادفنا في المسألة .وسنحاول فيما يلي عرض كلتا الحالتين.

1-1- حالة العرض أكبر من الطلب :

في هذه الحالة فإنه ليس من الضروري إحداث تغيير في نموذج النقل، وإنما الزيادة في العرض سيظهر كفائض غير مستغل أو لم يتم نقله من المصدر، وهذا عن طريق إضافة مستهلكا (طلب) وهميا (مركز وهمي)، تكون قيمة حاجته (الطلبية) مساوية للفرق المسجل بين العرض والطلب وعليه يتم إضافة عمود وهمي بتكاليف صفرية ، واتباع نفس الخطوات السابقة في الحل.

مثال تطبيقي :

إليك الجدول التالي الذي يمثل مشكلة نقل معينة:

	D_1	D_2	D_3	a_i
S_1	$C_{11}=1$ x_{11}	$C_{12}=2$ x_{12}	$C_{13}=3$ x_{13}	100
S_2	$C_{21}=3$ x_{21}	$C_{22}=4$ x_{22}	$C_{23}=5$ x_{23}	130
S_3	$C_{31}=1$ x_{31}	$C_{32}=2$ x_{32}	$C_{33}=5$ x_{33}	150
b_i	90	80	110	؟

المطلوب :أوجد التوزيع الأمثل الذي يحقق أدنى تكلفة.

الحل :

قبل حل المسألة لا بد من التحقق من شرط التوازن مجموع الطلب = مجموع العرض .

في مثالنا لدينا :

مجموع الطلب = 90+80+110= 270.

مجموع العرض = 100+130+150 = 380

نلاحظ عدم تساوي الطلب والعرض ،العرض > الطلب .

نظيف عمود وهمي بتكاليف صفرية وبقيمة الفارق المقدر بـ 380− 270= 110.

ونقم بالتوزيع وفقا لطريقة الجزاء والعقاب، فنتحصل على الجدول الموالي :

	D_1	D_2	D_3	X	a_i
S_1	$C_{11}=1$	$C_{12}=2$	$C_{13}=3$ 100	$C_{13}=0$	100
S_2	$C_{21}=3$	$C_{22}=4$ 20	$C_{23}=5$	$C_{13}=0$ 110	130
S_3	$C_{31}=1$ 90	$C_{32}=2$ 60	$C_{33}=5$	$C_{13}=0$	150
b_i	90	80	100	110	380

قبولية الحل :

من خلال تطبيق شرط القبولية نلاحظ أن عدد الخانات المملوءة = 5 و $m + n - 1 = 6$ القيمتين غير متساويتين وعليه فالحل الأولي غير مقبول يتطلب عملية تحسين وهو ما سيتم التطرق له لاحقا. وعليه نقدم **المثال التطبيقي الثاني** التالي:

إليك الجدول الذي يمثل مسألة النقل:

	D1	D1	D1	العرض
S1	6،	2،	1،	400
S2	4،	6،	2،	650
S3	1،	3،	5،	300
الطلب	200	600	300	

المطلوب:

تأكد من توازن نموذج النقل. ثم أوجد الحل الإبتدائي باستخدام طريقة أصغر تكلفة في السطر.

الحـل:

التأكد من توازن النموذج : نلاحظ أن:

$$300 + 600 + 200 \neq 300 + 650 + 400$$

$$1100 \neq 1350$$

مجموع الطلب = 1100

أي أن العرض > الطلب

مجموع العرض = 1350

إذن سنضيف عموديا وهميا بتكاليف صفرية بمقدار الفرق: $1350 - 1100 = 250$.

ثم نواصل الحل الإبتدائي بطريقة عادية باستخدام طريقة أصغر تكلفة في السطر.نجد:

	S1	S2	S3	S4	العرض
D1	(6	(2	(1 150	(0 250	~~400~~ ~~150~~ 0
D2	(4 200	(6 300	(2 150	(0	~~650~~ ~~500~~ ~~300~~ 0
D3	(1	(3 300	(5	(0	~~300~~ 0
الطلب	~~200~~ 0	~~600~~ ~~300~~	~~300~~ ~~150~~ 0	~~250~~ 0	1350

نلاحظ أن: عدد الخانات المملوءة = $6 = m + n - 1 = 6$ الحل الأولي مقبول.

أما مجموع التكاليف:

$$C = [(150) \times (1) + (250) \times (0) + (200) \times (4) + (300) \times (6) + (150) \times (2) + (300) \times (3)] \qquad C = 3950$$

1-2- حالة الطلب أكبر من العرض :

وبالتالي يجب إحداث مستهلك وهمي بتكاليف صفرية بقيمة الفرق بين العرض والطلب، أي أنه يتم إضافة سطر وهمي، الوحدات التي تظهر فيه تمثل وحدات الاحتياج الفعلية.

<u>مثال تطبيقي:</u> يعطى لك الجدول التالي الذي يمثل مسألة نقل لمؤسسة معينة:

	D_1	D_2	D_3	a_i
S_1	$C_{11}=1$	$C_{12}=3$ x_{12}	$C_{13}=4$ x_{13}	70
S_2	$C_{21}=2$ x_{21}	$C_{22}=5$ x_{22}	$C_{23}=1$ x_{23}	80
S_3	$C_{31}=3$ x_{31}	$C_{32}=4$ x_{32}	$C_{33}=2$ x_{33}	130
b_i	100	130	150	؟

الحل :

قبل حل المسألة لا بد من التحقق من شرط التوازن مجموع الطلب = مجموع العرض .

في مثالنا لدينا :

مجموع الطلب = 100+130+150= 380.

مجموع العرض = 70+80+130 = 280.

نلاحظ عدم تساوي الطلب والعرض ،العرض > الطلب .

نظيف عمود وهمي بتكاليف صفرية وبقيمة الفارق المقدر بـ 380− 280= 100.

ونقم بالتوزيع وفقا لطريقة الجزاء والعقاب ،فنتحصل على الجدول الموالي :

	D_1	D_2	D_3	a_i
S_1	$C_{11}=1$ 70	$C_{12}=3$	$C_{13}=4$	70
S_2	$C_{21}=2$	$C_{22}=5$	$C_{23}=1$ 80	80
S_3	$C_{31}=3$ 30	$C_{32}=4$ 30	$C_{33}=2$ 70	130
X	$C_{31}=0$	$C_{31}=0$ 100	$C_{31}=0$	100
b_i	100	130	150	380

قبولية الحل :

من خلال تطبيق شرط القبولية نلاحظ أن عدد الخانات المملوءة = 6 و m + n − 1 = 6

أما مجموع التكاليف:

$$C = [(70) \times (1) + (80) \times (1) + (30) \times (3) + (30) \times (4) + (70) \times (2)+ (100) \times (0)]\ C = 500.$$

شرح الجدول :

من خلال الجدول نميز مايلي :

الطلب D_1 يقدر بـ 100 وحدة تم تلبيته من طرف الموردين S_1 وS_3 بـ 70 و 30 وحدة على التوالي ونلاحظ بقاء 100 وحدة لم تلبى من الطرف المورد الثاني .

2- حالة الحل البديل :

يقصد بالحل البديل وجود توزيع آخر بكيفية مختلفة يسمح بالحصول على نفس قيمة دالة الهدف (مجموع التكاليف) مما يعطي مرونة أكثر لمتخذي القرار في اختيار ما يراه مناسبا، ويكون هناك حل بديل عندما تكون نتائج تقييم الخلايا الفارغة (مؤشرات التحسين) فيها قيمة صفرية، أي أن الاقتصاد في التكلفة "E_{ij}" لأي خانة شاغرة معدومة (**= 0**) في جدول الحل الأمثل (الحل النهائي).

ويتم الوصول أو الحصول على الحلول البديلة بنفس طريقة عملية التحسين، حيث يتم تكوين مسار مغلق انطلاقا من الخانة الفارغة التي تحتوي على: **0** = "E_{ij}".

<u>مثال تطبيقي :</u>

ليكن لدينا الحل النهائي لإحدى مسائل النقل:

		D_1	D_2	D_3	D_4	**العرض**
	J I	J_1= -2	J_2= 1	J_3= 0	J_4= -1	
S_1	I_1= -1	(-1 1000 0)	(-7 9)	(-3 4)	(-5 5)	1000
S_2	I_2= 0	(-2 500 0)	(-3 4)	(-4 4)	(-1 300 0)	800
S_3	I_3= -3	(-7 2)	(-2 1200 0)	(-5 2)	(-4 800 0)	2000
S_4	I_4= -2	(-6 2)	(-1 800 0)	(-2 750 0)	(-3 0)	1550
الطلب		1500	2000	750	1100	**5350**

مجموع التكاليف: **C = 10200 D**

نلاحظ أن الخانة الأخيرة في الجدول ذات التكلفة "**3**" وهي (S_4, D_4) خانة فارغة (شاغرة) وفي نفس الوقت: **0** ="E_{ij}"، إذن نضع عندها القيمة: "+Δ" ونشكل المسار المغلق:

لنحصل على الجدول الموالي:

		D_1	D_1	D_1	D_1	العرض
	J I	$J_1= -2$	$J_2= 1$	$J_3= 0$	$J_4= -1$	
S_1	$I_1= -1$	(-1 1000 0)	(-7 9)	(-3 4)	(-5 5)	1000
S_2	$I_2= 0$	(-2 500 0)	(-3 4)	(-4 4)	(-1 300 0)	800
S_3	$I_3= -3$	(-7 2)	(-2 1200 +Δ 0)	(-5 2)	(-4 800 -Δ 0)	2000
S_4	$I_4= -2$	(-6 2)	(-1 800 -Δ 0)	(-2 750 0)	(-3 +Δ 0)	1550
الطلب		1500	2000	750	1100	**5350**

فيتغير جدول الحل النهائي إلى:

		D_1	D_1	D_1	D_1	العرض
	J I	$J_1= -2$	$J_2= 1$	$J_3= 0$	$J_4= -1$	
S_1	$I_1= -1$	(-1 1000 0)	(-7 9)	(-3 4)	(-5 5)	1000
S_2	$I_2= 0$	(-2 500 0)	(-3 4)	(-4 4)	(-1 300 0)	800
S_3	$I_3= -3$	(-7 2)	(-2 2000 0)	(-5 2)	(-4 0)	2000
S_4	$I_4= -2$	(-6 2)	(-1 0)	(-2 750 0)	(-3 800 0)	1550
الطلب		1500	2000	750	1100	**5350**

مجموع التكاليف: **C=10200 D**

يظهر لنا التوزيع، في هذه الحالة يختلف عن التوزيع السابق لكن التكاليف نفسها. وهذه هي حالة الحل البديل.

3- حالة عدم الإنتظام :

تظهر حالة عدم الانتظام عندما يكون الحل غير مقبول وذلك في حالة عدم قبولية الحل في الحل القاعدي ، بمعنى لما يكون عدد الخانات المملوءة لا يساوي (≠) **1-(n+m)**، سواء كان في جدول الحل الأولي أو أثناء مراحل التحسين، حيث لدينا حالتين:

- <u>**عدد الخانات الشاغلة أكبر من $(m + n - 1)$**</u>:

<u>**في هذه الحالة نقوم بما يلي**</u> :

- o نبحث عن أقل قيمة (قيمة "X" وليس التكلفة) في الجدول.
- o نقوم بتكوين المسار المغلق: بحيث تكون الإشارة "$-\Delta$" في الخانة ذات أقل قيمة وتقابلها "$+\Delta$".
- o فنحصل على جدول جديد، نواصل الحل بشكل عادي.

<u>**مثال تطبيقي**</u>:

النموذج الأصلي

	D_1	D_1	D_1
S_3	20	20	
S_3		20	30
S_3	40	10	

مسار التحسين في النموذج الأصلي

	D_1	D_1	D_1
S_3	$20 -\Delta$	$20 +\Delta$	
S_3		20	30
S_3	$40 +\Delta$	$10 -\Delta$	

إذن أقل قيمة هي: القيمة 10.

نلاحظ أن: $(m + n - 1) = 5$.

يتم تشكيل المسار المغلق

عدد الخانات المملوءة = **6** الحل ليس قاعدي

فيصبح الجدول بعد التحسين على النحو التالي:

	D_1	D_1	D_1
S_3	10	30	
S_3		20	30
S_3	50		

نلاحظ أن الجدول الجديد يتحقق فيه شرط القبولية حيث:

عدد الخانات المملوءة = **5**

5 = $(m + n - 1)$

وعليه نواصل الحل بشكل عادي من خلال إتباع نفس الخطوات السابقة.

- **عدد الخانات الشاغلة أقل من $(m + n - 1)$:**

ويمكن أن تحدث هذه الحالة إما في حالة الحل الأولي أو عند عملية التحسين.

- في حالة الحل الأولي تحدث عندما يتم إلغاء سطر وعمود مرة واحدة ، فيكون الحل غير مقبول.
- في عملية التحسين عندما يأخذ المتغير Δ قيما متساوية في الخانات التي تكون إشارة Δ سالبة فنصبح أما حالة عدم انتظام.

كما يلي:

	D_1	D_1	D_1
S_3	10 -Δ		20+Δ
S_3	10		
S_3	+Δ		10 -Δ
		50	

عند التحسين يصبح الجدول كمايلي:

	D_1	D_1	D_1
S_3	0		30
S_3	10		
S_3	10		0
		50	

نلاحظ لدينا 4 خانات شاغلة بينما عدد الأسطر + عدد الأعمدة −1 = 3+4−1= 6

وهي حالة عدم انتظام . لحل هذه النقطة (حالة عدم الإنتظام)، نقوم بإضافة قيمة صغيرة جدا: "ε"، بحيث تحقق الشروط التالية:

- يجب أن توضع هذه القيمة في الخانة ذات أقل تكلفة.
- يجب أن لا تسمح بتكوين مسار مغلق مع بقية القيم، وإذا شكلت مسارا نحاول أن تكون من المتغيرات الأساسية المؤشر عليهم بـ "+Δ"
- يجب أن تسمح بحساب ما تبقى من معاملات **(I)**، **(J)**.

مثال تطبيقي:

	D_1	D_1	D_1
S_3	(1 10	(2 20	(3
S_3	(6	(5	(6 30
S_3	(7 10	(8	(9

نلاحظ أن: $(m + n - 1)$ = **5** عدد الخانات **المملوءة** = **4** فالحل غير مقبول وغير قاعدي.

ونلاحظ أن هذه الحالة لا تسمح بحساب معاملات **(I)**، **(J)** في الخلية **(D_2 , S_3)**

إذن نحاول اختيار الخلية المناسبة لإضافة "ℇ":

- يظهر لنا أن الخانات ذات التكاليف: "9، 8، 3، 6" لا تسمح بتشكيل مسار مغلق.
- نختار أقل تكلفة: "3" إذن يتم إضافة "ℇ" عند هذه الخلية، ليصبح الجدول من الشكل:

		D_1	D_1	D_1
	J I	$J_1 = -1$	$J_2 = -2$	$J_3 = -3$
S_3	$I_1 = 0$	(-1 10	(-2 20	(-3 **ℇ**
S_3	$I_2 = -3$	(-6	(-5	(-6 30
S_3	$I_3 = -6$	(-7 10	(-8	(-9

ونواصل الحل بطريقة عادية من خلال إتباع نفس خطوات، بحيث نحسب المعاملات: **(I)**، **(J)**، ثم نحسب "E_{ij}".

4- حالة مسألة النقل بمراحل المتعددة:

في بعض الحالات لا تكون مسألة النقل مسألة بسيطة وإنما مكونة من مجموعة من المراحل، بحيث يتم النقل في مرحلة أولى مثلا من وحدات الإنتاج إلى المخازن، وعلى أساس نتائجها يتم تكوين المسألة الثانية أي المرحلة الثانية مثلا من المخازن إلى مراكز الاستقبال – زبائن.

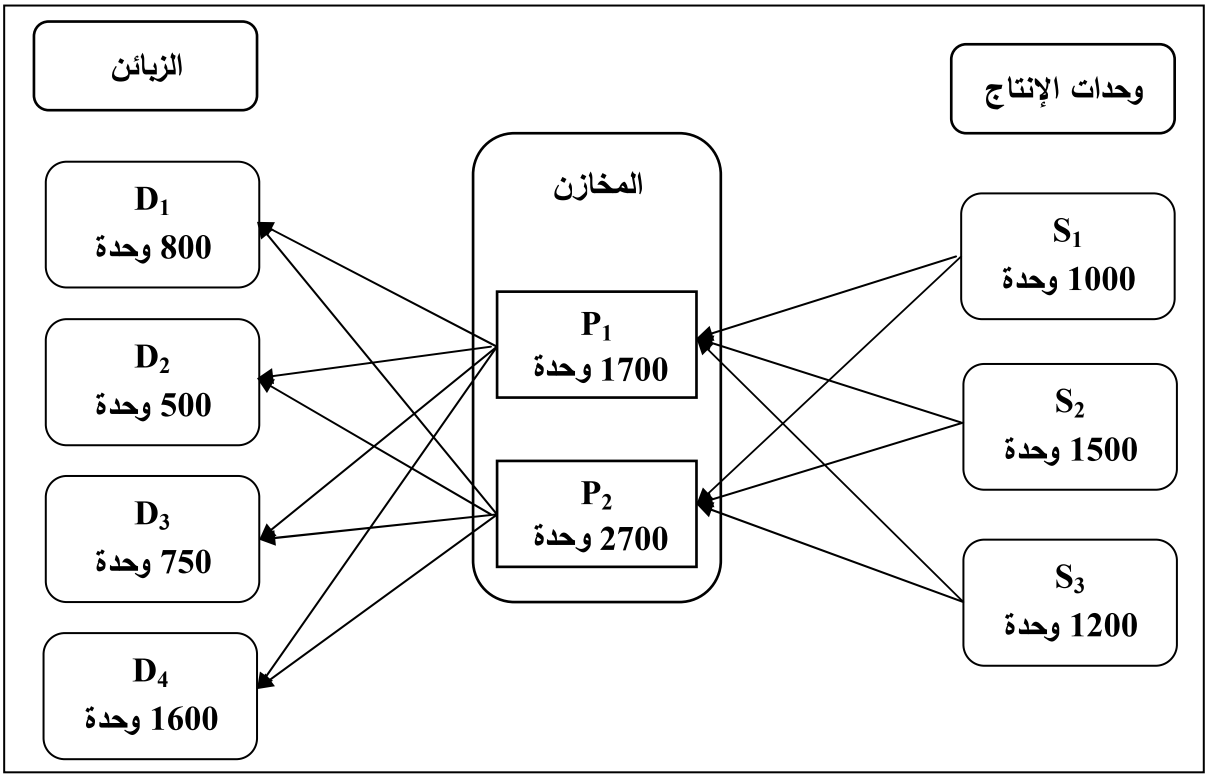
فإذا افترضنا لدى مؤسسة إنتاجية ثلاث وحدات إنتاجية، وجملة من المخازن في أماكن متعددة تستعملها لتخزين منتجاتها، ويتم إرسال هذه المنتجات إلى الزبائن انطلاقا من المخازن، فعملية التوزيع لا تكون مباشرة، حيث نجد أن المخازن تارة تمثل مراكز استقبال (المرحلة (1)) وتارة تمثل مصادر توزيع (المرحلة (2))، ولهذا تسمى مسألة النقل في مثل هذه الحالات: **المراحل المتعددة،** وحلها يكون وفقا لخطوتين:

1)- إيجاد الحل الأمثل للتوزيع من الوحدات الإنتاجية إلى المخازن.

2)- إيجاد الحل الأمثل من المخازن إلى الزبائن.

مثال تطبيقي :

تقوم مؤسسة النور لصناعة الزرابي بتلبية طلبات أربع زبائن (D_1, D_2, D_3, D_4) بعد أن يتم نقل البضاعة من الوحدات الإنتاجية (S_1, S_2, S_3) إلى مخزنين (P_1, P_2)، حيث يمكن تلخيص معلوماتها بيانيا كما يلي:



وتظهر تكاليف النقل من الوحدات للمخازن كما يلي :

	P_1	P_2
S_1	(8	(15
S_2	(10	(12
S_3	(7	(10

ومن المخازن إلى الزبائن كما يلي:

	D_1	D_2	D_3	D_4
P_1	(10	(8	(6	(6
P_2	(10	(7	(7	(8

المطلوب: إيجاد التوزيع الأمثل الذي يحقق أنى تكلفة نقل البضائع من الوحدات إلى الزبائن

الحل:

نلاحظ أن هذه المسألة ذات مرحلتين لأن الوحدات الإنتاجية لا يمكنها تزويد الزبائن مباشرة وإنما حتى يتم تخزينها. لذا، فإن حل المرحلة الأولى يمثل أساس الحل للمرحلة الثانية، وبتطبيق خطوات حل مسائل النقل .

- **المرحلة الأولى : نقل المنتجات من الوحدات الإنتاجية للمخازن.**

- أولا يجب التأكد من توازن الكميات المعروضة والمطلوبة ، وفي مثالنا هذا الشرط غير محقق وعليه نضيف سطرا وهميا بقيمة هذا الفرق .

$700=3700-4400$

- باستخدام طريقة الغرامات نتحصل على ما يلي:

	P_1	P_2	
S_1	(8 1000	(15	1000
S_2	(10	(12 1500	1500
S_3	(7 700	(10 500	1200
وحدة انتاجية وهمية	(0	(0 700	700
	1700	2700	4400 4400

من خلال النتيجة المتحصل عليها في الجدول أعلاه نقول أن التوزيع من الوحدات إلى المخازن يتم كما يلي :

- يتم تزويد المخزن الأول بـ 1000 وحدة من الوحدة الإنتاجية الأولى بتكلفة إجمالية تقدر بـ 8000و.ن، و500 وحدة من الوحدة الإنتاجية الثالثة بتكلفة تقدر بـ 5000. ون.
- يتم تزويد المخزن الثاني بـ 1500 وحدة من الوحدة الإنتاجية الثانية بتكلفة إجمالية تقدر بـ 18000و.ن، و700 وحدة من الوحدة الإنتاجية الثالثة بتكلفة تقدر بـ 4900، كما أن المخزن الثاني لن يستفيد من توزيع الوحدة الإنتاجية الوهمية بقيمة 700وحدة

ليكون مجموع تكلفة النقل 35900و.ن.

- **المرحلة الثانية : نقل المنتجات من المخازن للزبائن:**

- أولا يجب التأكد من توازن الكميات المعروضة والمطلوبة ، وفي مثالنا هذا الشرط غير محقق وعليه نضيف سطرا وهميا بقيمة هذا الفرق .

3650=1600+750+500+800

3700=2000+1700

وعليه نضيف عمودا وهميا بقيمة هذا الفرق .

باستخدام طريقة الجزاء والعقاب نتحصل على الجدول الموالي:

	D_1	D_2	D_3	D_4	زبون وهمي	
P_1	(10	(8	(6 100	(6 1600	(0	1700
P_2	(9 800	(7 500	(7 650	(8	(0 50	2700
	800	500	750	1600	50	3700

من خلال نتائج الجدول يمكن تفسير النتائج كما يلي :

- يتم تلبية طلب الزبون الأول من مخزون المخزن الثاني بتكلفة تقدر بـ 7200و.ن.
- يتم تلبية طلب الزبون الثاني من مخزون المخزن الثاني بتكلفة تقدر بـ 3500و.ن.
- يتم تلبية طلب الزبون الثالث من مخزون المخزن الأول بقيمة 100 وحدة بتكلفة تقدر بـ 600و.ن، وكذا منمخزون المخزن الثاني بقيمة 650 بتكلفة تقدر بـ 4550.
- يتم تلبية طلب الزبون الثالث من مخزون المخزن الأول بتكلفة تقدر بـ 9600 و.ن.
- يبقى في المخزن الثاني 50 وحدة لم يتم توزيعها.

VII- مسألة النقل في حالة التعظيم:

VIII- 1- مفهومها:

قد يقع المسيرون أحيانا في إشكالية نقل لتحقيق أكبر عائد ، وهذه الحالة وإن كانت قليلة الحدوث إلا أنها واردة، إذ لا تقتصر استخدامات مسائل النقل على حالة التدنية، وإنما يتعدى ذلك إلى حالة التعظيم أيضا وهي الحالة التي يتم فيها البحث عن أعظم ربح أو عائد في وجود نفس الشروط، فيتم استبدال تكاليف نقل الوحدة الواحدة بالربح المحصل عليه من نقل الوحدة الواحدة.

و تختلف هذه الحالة عن سابقتها في النقاط التالية:

- عند استخدام طريقة التكلفة كان يتم اختيار أقل تكلفة بهدف تخفيض التكاليف، أما في حالة الأرباح فيتم اختيار أكبر خلية في الجدول لنبدأ الحل بها، و تسمى هذه الطريقة بتعظيم الأرباح؛

– عند استخدام طريقة فوجل التقريبية كان يتم حساب الفرق بين أصغر تكلفتين لكل سطر وعمود ذلك بهدف تخفيض التكاليف، أما في حالة التعظيم فيتم حساب الفرق بين أكبر رقمين لكل سطر وعمود و يلي ذلك اختيار أكبر فرق، ليتم بعدها تحديد الخلية الكبرى؛

– عند استخدام طرق تحسين الحل يتم تقييم و اختيار الخلية التي تحمل أكبر قيمة موجبة؛

– الحل الأمثل يكون عند الحصول على قيم جبرية سالبة أو معدومة للخلايا الفارغة.

وسنحاول فيما يلي عرض نقاط التشابه والإختلاف بين المسألتين.

مسألة النقل في حالة التخفيض	مسألة النقل في حالة التعظيم
يمكن إيجاد الحل الأولي من خلال الـ 5 (خمس) طرق المعروفة.	يمكن إيجاد الحل الأولي للمسألة من خلال الـ5 (خمس) طرق المعروفة مع عكس **أقل تكلفة بأكبر ربح**
التأكد من قبولية الحل من خلال العلاقة: **عدد الخانات المملوءة** = $m + n - 1$.	التأكد من قبولية الحل الأولي من خلال العلاقة: **عدد الخانات المملوءة** = $m + n - 1$.
تسبق جميع التكاليف في الجدول بإشارة سالبة، ثم نقوم بحساب: (**I**) و(**J**) وذلك من خلال العلاقة: $I_m + J_n = C_{mn}$	تترك جميع الأرباح في الجدول بإشارة موجبة، ثم نقوم بحساب: (**I**) و(**J**) وذلك من خلال العلاقة: $I_m + J_n = P_{mn}$
حساب مقدار الاقتصاد في التكلفة لكل خلية: $E_{ij} = I_m + J_n - C_{mn}$.	حساب مقدار الزيادة في الربح (عائد عددي) لكل خلية: $E_{ij} = P_{mn} - (I_m + J_n)$.
نصل إلى أمثلية الحل عندما تكون جميع قيم: "E_{ij}" موجبة أو معدومة.	نصل إلى أمثلية الحل عندما تكون جميع قيم: " E_{ij} " سالبة أو معدومة.
يتم التحسين برسم المسار المغلق عند أكبر قيمة لـ "E_{ij}" ضمن القيم السالبة.	يتم التحسين برسم المسار المغلق عند أكبر قيمة لـ " E_{ij} " ضمن القيم الموجبة.
يحسب مجموع التكاليف في كل مرة، حيث يلاحظ انخفاضها مع كل عملية تحسين.	يحسب مقدار الربح في كل مرة حيث يلاحظ ارتفاعه مع كل عملية تحسين.

VII – 02 خطوات حل مسألة النقل في حالة التعظيم :

إن الحل في مسألة النقل في حالة التعظيم يتم من خلال اتباع الخطوات التالية:

1. التأكد من توازن كميات العرض والطلب.
2. التوزيع وفقا لأحد الطرق الخمس المعروضة سابقا.
3. التأكد من قبولية الحل من خلال شرط القبولية **عدد الخانات المملوءة** = $m + n - 1$.
4. التأكد من أمثلية الحل من خلال قيم Eij التي يجب أن تكون سالبة أو معدومة عكس مسألة النقل في حالة التقليل.

– في حالة وجود Eij سالب نباشر عملية التحسين باتباع نفس الخطوات السابقة الخاصة بعملية التحسين والتي تم عرضها في مسألة النقل في حالة التقليل.

ملاحظة:

يتم الحصول على E_{ij} من خلال القانون: $E_{ij} = P_{mn} - (I_m + J_n)$، حيث:

P_{mn}: هو ربح خانة معينة، ويبقى كما هو دون أن يسبق بالإشارة –.

مثال تطبيقي :

نفرض أن مؤسسة لها ثلاث وحدات إنتاجية (S_1 ,S_2,S_3) وتقدر الطاقة الإنتاجية لها بـ: 50، 40، 30 وحدة إنتاجية على التوالي، هذه الوحدات تنتج ثلاث منتجات: **(A, B, C)** وقد كان الطلب على هذه المنتجات(D_1,D_2,D_3)مقدر بـ: 60، 50، 10 وحدة على الترتيب.

المطلوب :اوجد التوزيع الأمثل الذي يحقق أعظم الأرباح بالستخدام طريقة الجزاء والعقاب.

الحل : – قبل الشروع في الحل الأولي نتأكد أولا من توازن العرض والطلب. وفي مثالنا الشرط محقق لأن مجموع الطلب = 120 و مجموع العرض = 120.

– يتم بعدها إيجاد الحل الأولي بنفس الطريقة مسألة النقل في حالة التخفيض ولكن مع وجود اختلاف بسيط، حيث نبحث عن**أكبر** ربح في كل سطر ونحسب الغرامات بدلا من **أقل** تكلفة. لنحصل على التوزيع التالي :

	D_1	D_2	D_3	a_i
S_1	$P_{11}=7$ 10	$P_{12}=4$ 20	$P_{13}=5$	30
S_2	$P_{21}=3$	$P_{22}=2$ 30	$P_{23}=5$ 10	40
S_3	$P_{31}=1$	$P_{32}=3$	$P_{33}=4$ 50	50
b_i	10	50	60	120

وبعد حساب I و J و E_{ij} نتحصل على الجدول الموالي :

		D_1 $J_1=4$	D_2 $J_2=1$	D_3 $J_3=4$	a_i
S_1	$I_1=3$	(7 10 0)	(4 20 0)	(5 -2)	30
S_2	$I_2=1$	(3 -2)	(2 30 0)	(5 10 0)	40
S_3	$I_3=0$	(1 -3)	(3 2)	(4 50 0)	50
b_i		10	50	60	120

مراقبة أمثلية الحل:

من خلال قيم E_{ij} نميز وجود قيمة موجبة هي (2) في الخانة(I_3/ D_2) وعليه فالحل ليس أمثلا ويحتاج لعملية تحسين بتشكيل المسار المغلق الذي يظهر في الجدول التالي:

		D_1	D_2	D_3	a_i
		$J_1=4$	$J_2=1$	$J_3=4$	
S_1	$I_1= 3$	(7 10 0)	(4 20 0)	(5 -2)	30
S_2	$I_2= 1$	(3 -2)	(2 30 -Δ 0)	(5 10 +Δ 0)	40
S_3	$I_3= 0$	(1 -3)	(3 +Δ 2)	(4 50 -Δ 0)	50
b_i		10	50	60	120

نختار أقل بالقيمة المطلقة لـ Δ من بين القيمتين السالبتين وهما -30 و -50 ، ثم نعوضها في الجدول ، ونعيد حساب I و J و E_{ij} **فنتحصل على الجدول الموالي:**

		D_1	D_2	D_3	a_i
		$J_1=0$	$J_2= -3$	$J_3= -2$	
S_1	$I_1= 7$	(7 10 0)	(4 20 0)	(5 0)	30
S_2	$I_2= 7$	(3 -4)	(2 -2)	(5 40 0)	40
S_3	$I_3= 6$	(1 -3)	(3 30 0)	(4 20 0)	50
b_i		10	50	60	120

من خلال الجدول وبما أن جميع قيم E_{ij} **سالبة** أو معدومة فهو حل أمثل ، يمكن تفسير الحل كما يلي:

- يتم تلبية طلب الوحدة D_1 المقدر بـ 10 وحدات من طرف المورد S_1 بعائد قدره: **70**و.ن.
- يتم تلبية طلب الوحدة D_2 المقدر بـ 50 وحدة من طرف الموردين S_1 بكمية 20 وحدة وبعائد **80** و.ن.، و المورد S_3بعائد قدره: **90**و.ن.
- يتم تلبية طلب الوحدة D_3 المقدر بـ 50 وحدة من طرف الموردين S_2 بكمية 20 وحدة وبعائد قدره **200** و.ن.، والمورد S_3 بعائد قدره: **80** و.ن.

تمرين تطبيقي عن طريقة التوزيع والتحسين :

تتعامل مؤسسة المرجان مع ثلاث موردين للمواد الأولة التي تستخدمها في الإنتاج ، ويتم تخزين هاته الأخيرة في مخازن المؤسسة الموزعة عبر 4 مناطق ، ويوضح الجدول الموالي كميات الطلب والعرض وتكاليف النقل .

ليكن لدينا جدول مسألة نقل معينة من الشكل التالي:

	D_1	D_2	D_3	D_4	**العرض**
S_1	(5	(3	(2	(3	300
S_2	(8	(4	(6	(5	500
S_3	(2	(1	(2	(1	600
الطلب	250	450	200	500	

- **المطلوب**:

– أوجد الحل الأمثل بحيث تكون التكاليف في حدها الأدنى باستخدام:

1. طريقة الشمال الغربي
2. طريقة الجزاء والعقاب (فوجل)

- **الحل**

1. حسب المطلوب، نستخدم **طريقة الشمال الغربي** لإيجاد الحل الأولي المقبول:

ومهما كانت طريقة الحل المختارة (كما رأينا سابقا) فإنه لابد أولا التأكد من أن الكميات المعروضة مساوية للكميات المطلوبة:

$.1400 = (300 + 500 + 600) = (250 + 450 + 200 + 500)$

حيث نبدأ التوزيع من الخلية (D_1 ، S_1) والتي تكلفة النقل فيها "**5**" (فهي أقصى الشمال الغربي) ثم ننقل إلى الخلية (D_1 ، S_2) ثم ننقل للخلية (D_2 ، S_2) ....

	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
S_1	(5 250	(3 50	(2	(3	~~300~~ ~~50~~ 0
S_2	(8	(4 400	(6 100	(5	~~500~~ ~~100~~ 0
S_3	(2	(1	(2 100	(1 500	~~600~~ ~~500~~ 0
الطلب	250	450	200	500	1400 1400

1. نتأكد من صحة المعادلة: **عدد الخانات المملوءة = $m + n - 1$.**

نلاحظ أن عدد الخانات المملوءة (الشاغلة) = 6.

$$6 = 1 - (4 + 3) = m + n - 1$$

عدد الخانات المملوءة = $m + n - 1$

6 = 6 إذن فالحل القاعدي مقبول

2. حساب مجموع التكاليف:

$$C = [(250) \times (5) + (50) \times (3) + (400) \times (4) + (100) \times (6) + (100) \times (2) + (500) \times (1)]$$

$$C = 4300 .$$

3. نراقب أمثلية الحل:

- نضع جميع التكاليف سالبة.

❖ نضيف سطرا أعلى الجدول نسميه "**J**"، وعمود بداية الجدول نسميه "**I**" ونحسب المعاملات:

$$I_m + J_n = C_{mn}$$

ونطبق هذه العلاقة مع الخانات الأساسية أي المملوءة فقط:

الخلية الأول (250)	$I_1 + J_1 = C_{11}$	$0 + (-5) = -5$
الخلية الثانية (50)	$I_1 + J_2 = C_{12}$	$0 + (-3) = -3$
الخلية الثالثة (400)	$I_2 + J_2 = C_{22}$	$-1 + (-3) = -4$
الخلية الرابعة (100)	$I_2 + J_3 = C_{23}$	$-1 + (-5) = -6$
الخلية الخامسة (100)	$I_3 + J_3 = C_{33}$	$3 + (-5) = -2$
الخلية السادسة (500)	$I_3 + J_4 = C_{34}$	$3 + (-4) = -1$

فيصبح الجدول من الشكل:

	$J_1 = -5$	$J_2 = -3$	$J_3 = -5$	$J_4 = -4$
$I_1 = 0$	(-5 250	(-3 50	(-2	(-3
$I_2 = -1$	(-8	(-4 400	(6- 100	(-5
$I_3 = 3$	(-2	(-1	(-2 100	(-1 500

❖ ثم نقوم بتقييم الخانات غير الأساسية (غير المملوءة) لاختيار أمثلية الحل الأولي، من خلال حساب ما يسمى بـ: "**الاقتصاد في التكلفة**" الخاص بكل خانة والذي يرمز له بالرمز: "E_{ij}" حيث يحسب بالعلاقة: $E_{ij} = I + J - C$ (كل الخانات يحسب لها الاقتصاد).

	J_1= -5	J_2= -3	J_3= -5	J_4= -4
I_1= 0	(5- 250 0)	(3- 50 0)	(2- -3)	(3- -1)
I_2=-1	(8- 2)	(4- 400 0)	(6- 100 0)	(5- 0)
I_3= 3	(2- 0)	(1- 1)	(2- 100 0)	(1- 500 0)

نقوم بالبحث عن أقل "E_{ij}" سالب، (ذلك أن يعتبر الحل أمثل لما يكون: ≥ 0"E_{ij}")، ونلاحظ أن (حسب مثالنا الحالي) أصغر "E_{ij}" سالب القيمة "−3" أذن نكون عندها المسار المغلق ونختار القيمة "**50**" إنها أصغر "−Δ".

	J_1= -5	J_2= -3	J_3= -5	J_4= -4
I_1= 0	(5- 250 0)	(3- 50 -Δ 0)	(2- Δ + -3)	(3- -1)
I_2=-1	(8- 2)	(4- 400 +Δ 0)	(6- 100 -Δ 0)	(5- 0)
I_3= 3	(2- 0)	(1- 1)	(2- 100 0)	(1- 500 0)

فنبدأ في عملية التحسين حيث يصبح الجدول من الشكل:

(5- 250	(3-	(2- 50	(3-
(8-	(4- 450	(6- 50	(5-
(2-	(1-	(2- 100	(1- 500

نلاحظ أن **توزيع ظلا محافظا على توازنه** الكميات المعروضة تساوي الكميات المطلوبة.

حساب مجموع التكاليف:

$$C = [(250) \times (5) + (50) \times (2) + (450) \times (4) + (50) \times (6) + (100) \times (2) + (500) \times (1)]$$

$$\boldsymbol{C = 4150\ D}$$

يظهر لنا أن التكاليف انخفضت بعدما كان مجموع التكاليف: "**4300 دينار**" انخفضت وأصبحت "**4150 دينار**"

وبنفس الطريقة نحاول إعادة حساب المعاملات **(I)** و**(J)**، والاقتصاد في التكلفة: "E_{ij}" حيث تحصلنا مرة أخرى على قيمة سالبة:

	J_1= -5	J_2= 0	J_3= -2	J_4= -1
I_1= 0	(5- Δ- 250 0)	(3- 3)	(2- 50 Δ+ 0)	(3- 2)
I_2=-4	(8- -1)	(4- 450 0)	(6- 50 0)	(5- 0)
I_3= 0	(2- Δ+ -3)	(1- 1)	(2- Δ-100 0)	(1- 500 0)

ويصبح الجدول من الشكل:

(5- 150	(3-	(2- 150	(3-
(8-	(4- 450	(6- 50	(5-
(2- 100	(1-	(2-	(1- 500

حساب مجموع التكاليف:

$$C = [(150) \times (5) + (150) \times (2) + (450) \times (4) + (50) \times (6) + (100) \times (2) + (500) \times (1)]$$

$$\boldsymbol{C = 3850\ D}$$

يظهر لنا أن التكاليف انخفضت بعدما كان مجموع التكاليف: "**4150 دينار**" انخفضت وأصبحت "**3850 دينار**" هذا دليل على أننا نسلق الطريق الصحيح.

بعد حساب الإقتصاد في التكلفة نلاحظ أن هناك ثلاث قيم سالبة لـ"E_{ij}"، نختار أقل قيمة "3-"، في هذه المرة لن يكون المسلك مربعا:

	J_1= -5	J_2= 0	J_3= -2	J_4= -4
I_1= 0	(5- Δ- 150 0)	(3- 3)	(2- Δ+ 150 0)	(3- -1)
I_2=-4	(8- -1)	(4- 450 0)	(6- Δ- 50 0)	(5- Δ+ -3)
I_3= 3	(2- Δ+ 100 0)	(1- 4)	(2- 3)	(1- 500Δ- 0)

ويصبح الجدول من الشكل:

(5- 100	(3-	(2- 200	(3-
(8-	(4- 450	(6-	(5- 50
(2- 150	(1-	(2-	(1- 450

يظهر لنا أن **التوزيع بقي محافظا على توازنه** الكميات المعروضة تساوي الكميات المطلوبة.

حساب مجموع التكاليف:

$$C = [(100) \times (5) + (200) \times (2) + (50) \times (5) + (450) \times (4) + (150) \times (2) + (450) \times (1)]$$

$$C = 3700\ D$$

نتأكد من أمثلية: نحاول إعادة حساب المعاملات **(I)** و **(J)**، والاقتصاد في التكلفة: "E_{ij}"

	J_1= -5	J_2= -3	J_3= -2	J_4= -4
I_1= 0	(5- 100 0)	(3- 0)	(2- 200 0)	(3- -1)
I_2=-1	(8- 2)	(4- 450 0)	(6- 3)	(5- 50 0)
I_3= 3	(2- 150 0)	(1- 1)	(2- 3)	(1- 450 0)

نلاحظ أنه لا تزال هناك قيمة سالبة لـ "E_{ij}" عند الخلية $(D_1 ،S_4)$ عند القيمة "1-" لا بد من عملية تحسين مرة أخرى:

	J_1= -5	J_2= -3	J_3= -2	J_4= -4
I_1= 0	(5- Δ- 100 0)	(3- 0)	(2- 200 0)	(3- Δ+ -1)
I_2=-1	(8- 2)	(4- 450 0)	(6- 3)	(5- 50 0)
I_3= 3	(2- 150Δ+ 0)	(1- 1)	(2- 3)	(1- Δ- 450 0)

ويصبح الجدول من الشكل:

(5-	(3-	(2- 200	(3- 100
(8-	(4- 450	(6-	(5- 50
(2- 250	(1-	(2-	(1- 350

نتأكد من أمثلية: نحاول إعادة حساب المعاملات **(I)** و **(J)**، والاقتصاد في التكلفة: "E_{ij}"

	J_1= -4	J_2= -2	J_3= -2	J_4= -3
I_1= 0	(5- 1)	(3- 1)	(2- 200 0)	(3- 100 0)
I_2= -2	(8- 2)	(4- 450 0)	(6- 3)	(5- 50 0)
I_3= 2	(2- 250 0)	(1- 1)	(2- 3)	(1- 450 0)

نلاحظ أن جميع قيم "E_{ij}" موجبة أو معدومة وبالتالي فإنه لا يمكن إجراء بعد هذا الجدول أي تخفيض لأن الاقتصاد غير سالب، إذن ف: **الحل الأمثل.**

ونلاحظ أن **التوزيع بقي محافظا على توازنه** أي أن الكميات المعروضة تساوي الكميات المطلوبة.

وبالتالي نحسب مجموع التكاليف:

$$C = [(200) \times (2) + (100) \times (3) + (450) \times (4) + (50) \times (6) + (250) \times (2) + (350) \times (1)]$$

$$\boldsymbol{C = 3600\ D}$$

حيث توزع الكميات كما يلي:

- المورد الأول يوزع ما قيمته 200 وحدة للمخزن الثالث و**100 وحدة** للمخزن الرابع.
- المورد الثاني يوزع كمياته البالغة **500 وحدة** على كل من الجهة الثانية والرابعة بقيمة **450 وحدة** و**50 وحدة** على التوالي.
- والمصدر الثالث يوزع **350 وحدة** لصالح الجهة الرابعة و**250 وحدة** لصالح الجهة الأولى.

2. طريقة الجزاء العقاب (فوجل):

حتى نوضح الفرق بين الطرق الخمسة أو بالأحرى طريقة الشمال الغربي وطريقة فوجل لإيجاد الحل الأولي، نعيد توزيع الكميات (من خلال استعمال هذه المرة طريقة الجزاء والعقاب).

بطبيعة الحال يتم رسم الجدول والتأكد أن ∑ العرض = ∑ الطلب، ثم نباشر الحل بحساب الغرامات:

	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض					
S_1	(5	(3	(2 200	(3 100	$\cancel{300}_{\cancel{100}}$ 0	1	1	1	0	/
S_2	(6	(4 100	(6	(5 400	$\cancel{500}_{\cancel{100}}$ 0	1	1	1	1	1
S_3	(2 250	(1 350	(2	(1	$\cancel{600}_{\cancel{350}}$ 0	0	0	/	/	/
الطلب	$\cancel{250}$ 0	$\cancel{450}_{\cancel{100}}$ 0	$\cancel{200}$ 0	$\cancel{500}_{\cancel{400}}$ 0	1400 1400					
	3	2	0	2						
	/	2	0	2	**اختيار عشوائي** لأن الغرامات، التكاليف والتوزيع متساوية					
	/	1	4	2						
	/	1	/	2						
	/	4	/	5						

ويصبح الجدول من الشكل:

(5	(3	(2 200	(3 100
(8	(4 100	(6	(5 400
(2 250	(1 350	(2	(1

➢ إذن لدينا: $\mathbf{6 = 4 + 3 - 1 = m + n - 1}$

عدد الخانات المملوءة = **6**

الحل الأولي قاعدي أي مقبول.

➢ أما مجموع التكاليف:

$$C = [(200) \times (2) + (100) \times (3) + (400) \times (5) + (100) \times (4) + (350) \times (1) + (250) \times (2)]$$

$$C = 3950$$

➢ ونلاحظ **مجموع التكاليف** الحل القاعدي هنا:

أقل من مجموع التكاليف في الحل القاعدي عند **طريقة الشمال الغربي** بمقدار: **350** و.ن.

وإن دل على شيء فإن هذه الطريقة **(فوجل)** أحسن من سابقتها لأنها تخفض التكاليف أفضل.

➢ إذن لنراقب أمثلية الحل القاعدي:

	J_1= -3	J_2= -2	J_3= -2	J_4= -3
I_1= 0	(5- 2)	(3- 1)	(2- 200 0)	(3- 100 0)
I_2= -2	(8- 3)	(4- 100 0)	(6- 2)	(5- 400 0)
I_3= 1	(2- 250 0)	(1- 350 0)	(2- 1)	(1- -1)

نلاحظ وجود قيمة سالبة لـ "E_{ij}" عند الخلية (S_4 ،D_3) مما يتطلب عملية تحسين، إذن نبدأ برسم المسار المغلق من هذه الخانة فيصبح الجدول من الشكل:

	J_1= -3	J_2= -2	J_3= -2	J_4= -3
I_1= 0	(5- 2)	(3- 1)	(2- 200 0)	(3- 100 0)
I_2= -2	(8- 3)	(4- 100 +Δ 0)	(6- 2)	(5- 400 -Δ 0)
I_3= 1	(2- 250 0)	(1- 350 -Δ 0)	(2- 1)	(1- +Δ -1)

وبالتالي تغير التوزيع إذ أصبح على النحو التالي:

(5	(3	(2 200	(3 100
(8	(4 450	(6	(5 50
(2 250	(1	(2	(1 350

نلاحظ من خلال الجدل أعلاه أننا حصلنا على نفس التوزيع في **طريقة الشمال الغربي**، لنراقب هل الحل أمثل ولا:

	J_1= -4	J_2= -2	J_3= -2	J_4= -3
I_1= 0	(5- 1)	(3- 1)	(2- 200 0)	(3- 100 0)
I_2= -2	(8- 2)	(4- 450 0)	(6- 2)	(5- 50 0)
I_3= 2	(2- 250 0)	(1- 1)	(2- 2)	(1- 350 0)

يظهر لنا أن جميع قيم: "E_{ij}" موجبة أو معدومة مما يعني الحل أمثل ولا يتطلب أي عملية تحسين.

- أما مجموع التكاليف:

C = [(200) × (2) + (100) × (3) + (450) × (4) + (50) × (5) + (250) × (2) + (350) × (1)]

$$C = 3600\ D$$

مسائل مقترحة حول مسألة النقل:

التمرين الأول : الجدول أدناه يقدم معطيات لمسألة نقل ما.

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	4	5	6	7	50
O_2	4	9	3	2	150
O_3	6	5	2	3	60
O_4	8	1	2	4	40
b_i	50	40	160	80	300 / 330

المطلوب:1- أوجد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية، طريقة التكاليف الدنيا ثم طريقة فوجل التقريبية؛

2- أوجد الحل الأمثل لنموذج النقل المتوصل إليه.

التمرين الثاني :

الجدول أدناه يقدم تكاليف النقل الوحدوية لنقل منتج معين من 03 مراكز إنتاج إلى 04 مراكز توزيع، بالإضافة إلى عرض كل مركز إنتاج و طلب كل مركز توزيع.

	D_1	D_2	D_3	D_4	A_i
O_1	12	13	04	06	500
O_2	06	04	10	11	700
O_3	10	09	12	04	800
b_i	400	900	200	500	

المطلوب:

1- انطلاقا من معطيات مسألة النقل أعلاه شكِّل جدول النقل الموافق لهذه المسألة؛

2- قدم نموذج النقل الموافق لجدول النقل المتوصل إليه؛

3- أوجد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة الشمال الغربي، وكذا قيمة دالة الهدف الموافقة له؛

4- أوجد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة أقل تكلفة في الجدول، وكذا قيمة دالة الهدف الموافقة له؛

5- أوجد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة فوجل، وكذا قيمة دالة الهدف الموافقة له.

التمرين الثالث :

نفرض لدينا مؤسسة تطلب ثلاث منتوجات A,B,C بالكميات التالية: 300-500-600، زهي متوفرة لدى أربع موردين وقدرت تكاليف نقل المنتوجات الثلاث من عند الموردين والكميات المتوفرة لديهم في الجدول التالي :

	D_1	D_2	D_3	a_i
O_1	2	3	5	250
O_2	1	4	3	600
O_3	2	6	2	450
O_4	1	5	3	100
b_j	300	500	600	؟ ؟

المطلوب : ما هي الطريقة التي يجب أن توزع بها هاته المنتجات على مختلف الموردين حتى تكون التكاليف في حدها الأدنى.

التمرين الرابع:

مؤسسة إنتاجية ما تزود 4 زبائن لها بالمنتج الذي يتم إنتاجه في 6 وحدات إنتاجية، الكميات القصوى من الإنتاج التي تستطيع الوحدات الإنتاجية توفيرها، الطلب الأقصى للزبائن و كذلك التكلفة الوحدوية للنقل يوضحها الجدول أدناه.

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	**الطلب**
O_1	8	12	4	18	30	22	600
O_2	18	6	14	28	24	16	450
O_3	16	4	12	24	8	26	750
O_4	28	22	4	16	6	10	650
العرض	500	400	250	450	300	550	2450

المطلوب: إيجاد شبكة النقل الأرخص و التي تسمح للمؤسسة بنقل المنتج إلى زبائنها بأقل تكلفة ممكنة.

التمرين الخامس:

لتكن لدينا المعطيات التالية عن مؤسسة إنتاجية، تحتوي على 3 مصانع و 3 مخازن:

المصانع	عدد الوحدات	تكلفة الإنتاج	تكلفة النقل		
			D_1	D_2	D_3
O_1	2000	200	60	80	50
O_2	2500	280	100	30	100
O_3	1800	300	80	120	70

– إذا كان عدد الوحدات المطلوبة للمخازن هو على التوالي كالتالي: 1600، 2400 و 2000 وحدة، وإذا كان السعر الوحدوي في المخازن الثلاث هو على التوالي كالتالي: 450 و.ن، 240 و.ن، 400 و.ن.

– **المطلوب:** تحديد عدد الوحدات الواجب نقلها من كل مصنع إلى كل مخزن بشرط تحقيق أعظم ربح.

التمرين السادس :

تحتاج الجزائر لثلاثة أنواع من الحبوب: القمح، الشعير والذرة لأجل زراعتها في الموسم القادم، وقد بدأت فرنسا، كندا واسبانيا استعدادهم لتلبية هذه الحاجة بالكميات التالية: 40000، 50000، 30000 طن على الترتيب، أما كميات الطلب عن هذه الحبوب وتكلفة الشراء للطن الواحد معطاة كما يلي:

جحم الطلب	تكلفة الشراء من الحبوب بالدولار			أنواع الحبوب
	اسبانيا	كندا	فرنسا	
60000	7	1	5	**قمح**
40000	6	4	3	**شعير**
20000	3	2	6	**ذرة**

– **المطلوب:** إيجاد الحل الأمثل الذي يجعل مجموع تكاليف الشراء في حدها الأدنى باستخدام طريقة الحجر المتنقل.

التمرين السابع:

لدى مؤسسة انتاجية 3 آلا إنتاجية تقدر طاقتها الإنتاجية بـ 170-200-130 وحدة ، وتخطط المؤسسة لإنتاج ثلاث منتوجات يقدر الطلب عليها بـ 150-180-170 ويمكن إنتاج المنتوجات الثلاثة بواسطة ثلاث آلات وتقدر تكاليف الإنتاج كما يلي :

	نوع المنتوج		
	A	**B**	**C**
الآلة 1	3	5	7
الآلة 2	5	1	2
الآلة 3	2	4	6

المطلوب : كيفية توزيع المنتوجات الثلاثة على الآلات حتى تكون التكاليف في حدها الأدنى.

التمرين الثامن:

لدينا 3 مترشحين في حملة انتخابية، تسير هذه الحملة وفق لـ4 مناطق: شمال، جنوب، شرق، غرب، حيث أن ميزانية: المترشح (1) هي 300000 دج، المترشح (2) هي 500000 دج، المترشح (3) هي 600000 دج، بينت التقارير الدراسية أن: المنطقة (1) تحتاج 250000 دج، المنطقة (1) تحتاج 450000 دج، المنطقة (1) تحتاج 200000 دج، المنطقة (1) تحتاج 500000 دج، إذا علمت أن تكاليف كل صوت في كل منطقة حددت كما يلي:

المنطقة (4)	المنطقة (3)	المنطقة (2)	المنطقة (1)	
3	2	3	5	المترشح (1)
5	6	4	8	المترشح (2)
1	2	1	2	المترشح (3)

- **المطلوب:**

1/- كيف سيتم توزيع ميزانية المترشحين على مختلف المناطق، حيث تكون التكاليف في حدها الأدنى باستخدام الطريقة الشمال الغربي.

2/- بسبب الأزمة المالية العالمية فإن المترشح رقم (2) خسر أمواله، كيف سيتم توزيع هذه الميزانية للمترشحين؟.

3/- قام أحد أصدقاء المترشح رقم (2) بتوفير كمية العجز والمقدرة بـ: 300000 دج إلا أنه بسبب الاضطرابات الجوية الحاصلة في الشرق (المنطقة (3)) لا يمكن للمترشح الأول التنقل إليها، فكيف سيتم توزيع ميزانية المترشحين من جديد؟.

التمرين التاسع :

مؤسسة بناء تشرف على انجاز أربع مشاريع في مناطق مختلفة، ويتم نقل مواد البناء من مخازن المؤسسة الثلاث إلى نقاط العمل الأربع على حساب المؤسسة، والجدول التالي يبين المسافة التي تفصل بين المؤسسة ومواقع العمل:

نقاط العمل / المخازن	الأولى	الثانية	الثالثة	الرابعة	الكميات (طن)
الأول	5	8	2	3	24
الثاني	5	7	3	5	34
الثالث	6	8	5	4	22
الكميات (طن)	20	20	20	20	

- **المطلوب:**

1. قدم أفضل خطة لنقل هذه المواد، معتمدا على طريقة أصغر عنصر في الجدول كطريقة للحل الأولي.
2. هل الاقتراح الذي تحصلت عليه هو الاقتراح الوحيد؟ ولماذا؟

التمرين العاشر:

ليكن لدينا الجدول الموالي الذي يمثل إحدى مراحل حل مسألة نقل معينة:

(9 125	(4 214	(8 61	(2
(7	(9	(6 241	(3 59
(5	(6	(7	(4 200

- **المطلوب:**

1. أكمل الجدول موضحا الكميات المعروضة والمطلوب في كل جهة.
2. بين أي مرحلة من مراحل الحل التي يمثلها هذا الجدول.
3. وضح الطريقة المستخدمة في إيجاد الحل الأولي لهذه المسألة.
4. تأكد من قبولية الحل الأولي، ثم أحسب مجموع تكاليف النقل.
5. حاول إيجاد الحل الأمثل لتخفيض تكاليف النقل أقل ما يمكن.

التمرين الحادي عشر :

يقدم لك جدول النقل التالي :

	D_1	D_2	D_3	a_i
F_1	1	3	2	150
F_2	4	7	1	150
F_3	5	2	6	150
F_4	2	4	2	150
b_i	200	300	400	؟ ؟

المطلوب :

- اوجد أفضل توزيع لهاته المسألة باستخدامك الطرق الخمس .
- حدد أي طريقة تكون فيها التكاليف في حدها الأدنى.ثم اشرح الحل المتوصل إليه.

التمرين الثاني عشر: يقدم لك مشكل نقل المنتجات من مخازن المؤسسة إلى تجار الجملة اللذين تتعامل معهم ، وفق التكاليف والكميات الموضحة في الجدول الموالي :

	A	B	C	D	E	a_i
F_1	12	11	15	17	18	640
F_2	22	16	17	15	19	860
F_3	14	23	21	25	12	920
b_i	380	730	520	430	360	؟ ؟

المطلوب :

- اوجد أفضل توزيع يحدد التكلفة الدنيا باستخدام طريقة فوجل.
- بافتراض أن هذا الجدول مبني على أساس قيم الأرباح ، أوجد التوزيع الذي يحقق أعلى عائد .
- اشرح الجدولين النهائيين.

قائمة المراجع:

Recherche Operationnelle:TechniquesYvon .(2009) .G.Perreault Yvon *G.Perreault : Recherche opérationnelle : techniques décisionnelles ; 6eme .,éd* ,éditions Québec, Canada: Gaétan Morin .

Programmation Linéaire Appliquée Outil , .(1996) .Gérald Baillageon *Décision D'aide A La.* ,édition SMG, :canada.,

إسماعيل السيد. (1999). *بعض الطرق الكمية في مجال الاعمال.* ،الاسكندرية،مصر: الدار الجامعية للطبع والنشر والتوزيع.

اليامين فالته. (2006). *ابحوث العمليات .* مصر : ايتراك للطباعة والنشر والتوزيع .

اليامين فالته. (2019-2020). *محاضرات ومسائل في مقياس رياضيات المؤسسة،.* بسكرة- الجزائر : جامعة محمد خيضر .

جلال ابراهيم العبد. (2014). *جلال إبراهيم العبد، استخدام الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية. .* الإسكندرية، مصر : دار الجامعة الجديدة .

حامد سعد نور الشمرتي،، و علي خليل الزبيدي،. (2007،). *مدخل إلى بحوث العمليات،.* عمان، الأردن: دار مجدلاوي للنشر و التوزيع.

سهيلة عبد الله السعيد. (2007). *الأساليب الكمية وبحوث العمليات .* عمان ،الأردن : الحامة للنشر والتوزيع .

صلاح، رسول حمزة. (2002). *البرمجة الخطية .* بغداد : دار الكتب للطباعة والنشر .

عايدة نخلة، ممدوح عبد العليم، و مدحت عبد العال. (2003). *بحوث العمليات.* مصر: دار الحريري للطباعة.

عبد الرحمان بن محمد أبو عمه، و محمد أحمد العش. (1990). *البرمجة الخطية.* المملكة العربية السعودية: مطبعة جامعة الملك سعود.

علي العلاونة، و آخرون. (2000). *بحوث العمليات في العلوم التجارية .* عمان ،الأردن: دار المستقبل للنشر والتوزيع.

فتحي رزق السوافيري. (2004). *مدخل معاصر في بحوث العمليات -تطبيقات باستخدام الحاسب الآلي- .* مصر : منشورات جامعة الإسطندرية.

محمد راتول. (2006). محمد *راتول، بحوث العمليات2006*. الجزائر : ديوان المطبوعات الجامعية.

محمد عبد العال النعيمي، و وآخرون. (2011). *بحوث العمليات،*. عمان، الأردن، : دار وائل للنشر،.

منعم زمزير الموسوي. (2009). *بحوث العمليات-مدخل علمي لاتخاذ القرارات-*. عمان، الأردن: دار وائل للنشر.

نبيل محمد مرسي. (2004). *التحليل الكمي في مجال الأعمال*. مصر: دار الجامعة الجديدة.