

سلسلة التمارين رقم 3

تمرين 1 : . احسب النهايات التالية إذا كانت موجودة.

$$\begin{aligned} 1. \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x^2 - 11x + 28}{x^2 - 25} & \quad 2. \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x^2 - 11x + 28}{x^2 - 25} \\ 3. \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 - 25} & \quad 4. \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 - 25} \end{aligned}$$

تمرين 2 : احسب النهايات التالية :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+4} - \sqrt{x-4} \quad 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2-1} - x$$

تمرين 3 : بإستعمال التعريف أي أوجد (ϵ, δ) ، لدراسة نهاية الدالة x^3 عند 1.

تمرين 4 : لتكن الدالة g المعرفة على \mathbb{R} كمايلي :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln|x|} & \text{إذا كان } x \notin \{0, -1, 1\} \\ 0 & \text{إذا كان } x = 0, -1, 1 \end{cases}$$

في أي نقاط g مستمرة؟

تمرين 5 : (1) لتكن الدالة $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ المعرفة كمايلي

$$f(x) = \begin{cases} (ax)^2 & \text{إذا كان } x \leq 1, \\ a \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) & \text{إذا كان } x > 1 \end{cases}$$

حيث $a \in \mathbb{R}$ ثابت حقيقي. ماهي قيم a حتى تكون الدالة f مستمرة؟

(2) أوجد كل قيم الثابت $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ حتى تكون الدالة $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ التالية مستمرة :

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان } x \leq 0, \\ \alpha e^{-x} + \beta e^x + \gamma x(e^x - e^{-x}) & \text{إذا كان } 0 < x < 1, \\ e^{2-x} & \text{إذا كان } x \geq 1. \end{cases}$$

تمرين 6 : لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ كما يلي :

$$f(x) = \frac{1+x}{x^3+1}.$$

أثبت أنه يمكننا تمديد الدالة f بالإستمرار عند النقطة -1 .
حدد القيمة المأخوذة عند -1 لهذا التمديد.

تمرين 7 : هل الدوال التالية قابلة للإستغاق في 0 ؟

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}, \quad g(x) = \begin{cases} x \sin(x) \sin(1/x) & \text{إذا كان } x \neq 0 \\ 0 & \text{إذا كان } x = 0. \end{cases}, \quad h(x) = |x| \sin x.$$

تمرين 8 : أوجد $a, b \in \mathbb{R}$ بحيث تكون الدالة f المعرفة على \mathbb{R}_+ كما يلي

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ إذا كان } 0 \leq x \leq 1 \text{ و } f(x) = ax^2 + bx + 1 \text{ إذا كان } x > 1$$

فابلة للإستغاق عند 1 .

تمرين 9 : أدرس قابلية إستغاق الدوال التالية على \mathbb{R} :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

تمرين 10 : أحسب المشتق من الدرجة n للدوال التالية :

$$1. x \mapsto x \exp(x) \quad 2. x \mapsto x^2 \sin x$$

$$3. x \mapsto x^{n-1} \ln(1+x).$$

تمرين 11 : لتكن $n \in \mathbb{N}$. أثبت أن المشتق من الدرجة $n+1$ للدالة $x^n e^{1/x}$ هو

$$\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} e^{1/x}.$$