Fonctions à variables complexes

Définition

Si à chaque valeur que peut prendre une valeur complexe z, il correspond une ou plusieurs valeurs d'une variable complexe ω, on dit que ω est une fonction de z et on écrit $w = f(z)$.

La valeur de la fonction f en $z = a$ est écrite $f(a)$, par exemple pour $f(z) = z + i$ on a $f(1) = 1 + i$.

Fonctions uniformes et multiformes

Si une seule valeur de $w = f(z)$ correspond à chaque valeur de z on dira que $f(z)$ est une fonction uniforme de z. Si plusieurs valeurs de w correspondent à chaque valeur de z, on dira que w est une fonction multiforme de z.

Exemple:

La fonction $f(z) = 3z + 2i$ est une fonction uniforme de z car à chaque valeur de z il correspond une seule valeur de $f(z)$.

La fonction $w = f(z) = z^{1/2}$ est une fonction multiforme de z car à chaque valeur de z il correspond deux valeurs de $f(z)$.

Par exemple pour $z = i$ correspond deux valeurs $w_1 = e^{i\pi/4}$ et $w_2 = e^{5\pi/4}$.

Fonctions inverses

Si $w = f(z)$, on peut aussi considérer z comme fonction de w, ce qui peut s'écrire sous la forme $g(z) = f^{-1}(w)$. La fonction f^{-1} est appelée la fonction inverse de f.

Exemple: La fonction $g(z) = z^{1/3}$ est la fonction inverse de $f(z) = z^3$.

Transformations

Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, (où u et v sont des fonctions réelles) est une fonction uniforme de $z = x + iy$, alors les fonctions u et v sont appelées respectivement partie réelle et imaginaire de f, et on note $u(x, y) = \mathrm{Re}(f(z))$ et $v(x, y) = \mathrm{Im}(f(z))$.

Exemple:

$f(z) = z^2 + i = (x + iy)^2 + i = (x^2 - y^2) + i(2xy + 1)$

$u(x, y) = x^2 - y^2$ et $v(x, y) = 2xy + 1$.

Fonctions élémentaires

1) Fonctions polynômiales

Les fonctions polynômiales de degrés n, où n est un entier positif sont définies par/ $f(z) = P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots . a_{n-1} z + a_n$,

où $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ sont des constantes complexes avec $a_0 \neq 0$.

2) Les fractions rationnelles

Les fractions rationnelles sont définies par $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$

où P et Q sont des polynômes.

Exemple:

$f(z) = \dfrac{z^2 + 2}{z^3 + 2i}$ est une fraction rationnelle.

3) Les fonctions exponentielles

Les fonctions exponentielles sont définies par:
$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x (coy + i \sin y)$.
Si a est un réel et positif on définit
$f(z) = a^z = e^{a \ln z}$

4) Fonctions trigonométriques

On définie les fonctions trigonométriques par
$\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$.
$\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z} = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}$, $\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z} = \dfrac{i\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)}{e^{iz} - e^{-iz}}$.

5) Les fonctions hyperboliques

Les fonctions hyperboliques sont définies par
$sh\ z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$, $ch\ z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$
$th\ z = \dfrac{shz}{chz} = \dfrac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$, $\coth z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}$.

6) Fonctions logarithmiques

Si $z = e^w$ alors la fonction $w = f(z) = \ln z$, où $z \neq 0$ est définie comme l'inverse de la fonction exponentielle par:
$w = f(z) = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$, où $z = re^{i\theta} = re^{i(\theta+2k\pi)}$.

Fonctions holomorphes

Définition:
Soit f une fonction d'un domaine $D \subseteq \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et z_0 un point de D, alors on dit que la fonction f admet une dérivée au point z_0 ou f est dérivable au point z_0 si $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe, et on note cette limite par $f'(z_0)$.
Et on peut écrire $f'(z_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$.

Définition:
Une fonction f est dite holomorphe en un point z_0 si elle est dérivable au point z_0
On dit que la fonction f est holomorphe dans un domaine D si elle est dérivable en tout point de D.

Exemple
1) La fonction $f(z) = z^2$ est holomorphe dans tout $\mathbb{C}$
$\forall z_0 \in \mathbb{C}$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)(z + z_0)}{z - z_0} = 2z_0$$

Propriétés des fonctions holomorphes dans un domaine.

Soient f et g des fonctions holomoprhes dans un domaine D. Alors :
1) $f+g$ est holomorphe dans D, et on a $(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$ $\forall z \in D$
2) fg est holomorphe dans D, et on a $(fg)'(z) = f'(z)\,g(z) + f(z)\,g'(z)$ $\forall z \in D$
3) Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, αf est holomorphe dans D, et on a $(\alpha f)'(z) = \alpha f'(z)$.

4) Si de plus g ne s'annule en aucun point de D, alors $\dfrac{f}{g}$ est holomorphe dans D, et on a $\left(\dfrac{f}{g}\right)^{'}(z) = \dfrac{f^{'}(z)\, g(z) - f(z)\, g^{'}(z)}{g^2(z)}$.

Conditions de Cauchy-Riemann

On va chercher dans quelles conditions une fonction $f\colon D \to \mathbb{C}$ est holomorphe dans D

Théorème:

Soient u, v deux fonctions réelles définies sur un domaine I de $\mathbb{R}^2$, alors pour que la fonction $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ (où $z = x + iy \in D$) soit holomorphe dans D il faut et il suffit que les dérivées partielles $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ existent et continues en tout point de I, et vérifient les conditions de **Cauchy-Riemann**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

et alors la dérivée de f est donnée par

$f^{'}(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) - i\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) + i\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)$

Exemple:

La fonction $f(z) = \dfrac{1}{z}$ est holomorphe dans tout $\mathbb{C}^*$

On a

$f(z) = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x+iy} = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2} + i\dfrac{-y}{x^2+y^2} = u(x,y) + iv(x,y)$

donc $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, et $v(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-\left(x^2+y^2\right)+2y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)$

$\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},$

$\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)$

La fonction f est donc holomorphe dans $\mathbb{C}^*$, et

$f^{'}(z) = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + i\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

Remarque

Les conditions de Cauchy-Riemann peuvent être écrites de la forme suivante

1)

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

ou

2)

$$\frac{df(z)}{d\bar{z}} = 0$$

tel que $\bar{z} = x - iy$

Exemple:

Est-ce que la fonction $f(z) = z \operatorname{Re} z$ est holomorphe dans tout $\mathbb{C}$

On a $f(z) = (x + iy)x = x^2 + ixy = u(x, y) + iv(x, y)$

donc $u(x, y) = x^2$, et $v(x, y) = xy$

$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 2x,\ \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = x \neq \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$

donc la fonction $f(z) = z \operatorname{Re} z$ n'est pas holomorphe dans $\mathbb{C}$

$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0,\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = y.$

La fonction f est holomorphe simplement en $z_0 = 0$

On a $f(z) = z \operatorname{Re} z\ = z\frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{z^2 + z\bar{z}}{2} \Rightarrow \frac{df(z)}{d\bar{z}} = \frac{z}{2}$.

D'où la fonction f ne peut pas être holomorphe en aucun domaine de $\mathbb{C}$ sauf en $z_0 = 0$

Fonctions harmoniques

Définition:

Soit la fonction u de $I \subseteq \mathbb{R}^2$dans $\mathbb{R}$, $u \in \mathcal{C}^2(I)$, si les dérivées partielles $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y)$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y)$ sont continues sur I.

Définition:

Soit la fonction $u\ \in \mathcal{C}^2(I)$, où $I \subseteq \mathbb{R}^2$, alors on dit que u est harmonique dans I si

$$\forall (x, y) \in I,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

Autre écriture u est harmonique dans I si $\forall (x, y) \in I,\ \triangle u(x, y) = 0$

où $\triangle\ = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$est un opérateur différentiel appelé laplacien.

Exemple:

Soit la fonction $u(x, y) = e^y \sin x$

$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = e^y \cos x,\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = e^y \sin x$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = -e^y \sin x,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = e^y \sin x$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = -e^y \sin x + e^y \sin x = 0.$

la fonction $u(x, y)$ est harmonique

Théorème:

Soit $f(z) = u(x, y) + iu(x, y)$ une fonction holomorphe dans un domaine $D \subseteq \mathbb{C}$, alors les deux fonctions réelles u et v sont harmoniques dans D.

On a vu que la fonction $f(z) = \dfrac{1}{z}$ est holomorphe dans tout $\mathbb{C}^*$.

On en déduit que les fonctions $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, et $v(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$ sont harmoniques dans $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Définition:

Soit u une fonction harmonique dans $I \subseteq \mathbb{R}^2$. Alors une fonction v est dite harmonique conjuguée de u si les fonctions u et v vérifient les conditions de Cauchy-Riemann.

Théorème:

Soit u une fonction harmonique dans $I \subseteq \mathbb{R}^2$. Alors il existe une fonction f holomorphe de $D \subseteq \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} f = u$.

Exemple:

Soit la fonction $u(x,y) = y^2 - x^2 + xy$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = -2x + y,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 2y + x$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = -2,\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 2$

$(\triangle u)(x,y) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = -2 + 2 = 0$

donc la fonction $u(x,y)$ est harmonique.

Pour trouver une fonction v pour que $f = u + iv$ soit holomorphe, il faut que les les fonctions u et v vérifient les conditions de Cauchy-Riemann.

$\dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = -2x + y =$ et $\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -2y - x$.

En intégrant $\dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y)$ par rapport à y on trouve $v(x,y) = -2xy + \dfrac{y^2}{2} + c_1(x)$.

En dérivant la fonction $v(x,y)$ par rapport à x on trouve

$\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -2y + c_1'(x) = -2y - x \Rightarrow c_1(x) = \dfrac{-x^2}{2} + c_2$

d'où $v(x,y) = -2xy + \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{x^2}{2} + c_2$.