Approximations des EDPs
par la méthode des différences finies
Problème parabolique et hyperbolique

1 Problème parabolique

On considère le problème parabolique de l'équation de la chaleur en une dimension d'espace avec conditions aux limites de type Dirichelet homogène

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \forall x \in]0,1[, \ t \in]0,T[\\ \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \ , \qquad \forall t \in]0,T[, \\ \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad \forall x \in]0,1[, \end{cases} \tag{1}$$

Où $u(x,t)$ représente la température au point x au temps t et u_0 une fonction régulière donnée.
Si $u_0 \in C^1(]0,1[, \mathbb{R})$ alors il existe une fonction $u \in C^2(]0,1[\times]0,T[, \mathbb{R})$ qui vérifie (1).
Pour calculer une solution approchée de (1), on se donne une discrétisation en temps et en espace.

- On se donne un ensemble de points $t_j, j = 0, 1, \ldots M+1$ de $]0,T[$ et $x_i, i = 0, 1, \ldots N+1$ de $]0,1[$.
- On considère un pas constant $h = \frac{1}{N+1}$ et $k = \frac{T}{M+1}$.
- On pose $t_j = jk$ pour $j = 0, \ldots M+1$ et $x_i = ih$ pour $i = 0, \ldots N+1$

On cherche à calculer les solutions approchées de $u(x_i, t_j)$, $i = 1, \ldots, N$ et $j = 1, \ldots M$. Les inconnues discrètes sont notés u_i^j, $i = 1, \ldots, N$ et $j = 1, \ldots M$ avec $u_0^j = u_{N+1}^j = 0$ et $u_i^0 = u_0(x_i)$.

1.1 Discrétisation par Euler explicite en temps

Ici, on prend les approximations suivantes

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) \simeq \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) \simeq \frac{u(x_{i+1}, t_{j+1}) + u(x_{i-1}, t_j) - 2u(x_i, t_j)}{h^2}$$

On obtient le schéma suivant

$$
\begin{cases}
\dfrac{u_i^{j+1}-u_i^j}{k}-\dfrac{u_{i+1}^j+u_{i-1}^j-2u_i^j}{h^2}=0 \quad ,\forall i=1,\ldots,N \ et \ j=1,\ldots,M \\[2ex]
u_0^j=u_{N+1}^j=0 \ , \qquad \forall j=0,\ldots,M+1 \\[2ex]
u_i^0=u_0(x_i) \qquad \forall i=0,\ldots,N+1
\end{cases}
$$

On pose $\lambda=\dfrac{k}{h^2}$. Pour tout $i=1,\ldots,N$ et $j=0,\ldots,M$, on écrit le schéma aux différences finies appelé "Euler explicite" suivant :

$$u_i^{j+1}=u_i^j-\lambda(2u_i^j-u_{i-1}^j-u_{i+1}^j)$$

ou encore

$$u_i^{j+1}=\lambda u_{i-1}^j+(1-2\lambda)u_i^j+\lambda u_{i+1}^j$$

La forme matricielle de ce schéma est donnée comme suit :

$$
\begin{bmatrix} u_1^{j+1} \\ u_2^{j+1} \\ . \\ . \\ u_N^{j+1} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1-2\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0... & 0 \\
\lambda & 1-2\lambda & \lambda & 0 & 0... & 0 \\
0 & \lambda & 1-2\lambda & \lambda & 0... & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
0.. & 0 & ..0 & \lambda & 1-2\lambda & \lambda \\
0.. & 0 & .. & . & \lambda & 1-2\lambda
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_1^j \\ u_2^j \\ . \\ . \\ u_N^j \end{bmatrix}
+\lambda
\begin{bmatrix} u_0^j \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \\ u_{N+1}^j \end{bmatrix}
$$

1.2 Discrétisation par schéma implicite à 3 points

Par l'approximation décentrée à gauche

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_j)\simeq\frac{u(x_i,t_j)-u(x_i,t_{j-1})}{k}$$

On obtient le schéma suivant

$$
\begin{cases}
\dfrac{u_i^{j}-u_i^{j-1}}{k}-\dfrac{u_{i+1}^j+u_{i-1}^j-2u_i^j}{h^2}=0 \quad ,\forall i=1,\ldots,N \ et \ j=1,\ldots,M \\[2ex]
u_0^j=u_{N+1}^j=0 \ , \qquad \forall j=0,\ldots,M+1 \\[2ex]
u_i^0=u_0(x_i) \qquad \forall i=0,\ldots,N+1
\end{cases}
$$

On pose $\lambda=\dfrac{k}{h^2}$. Pour tout $i=1,\ldots,N$ et $j=2,\ldots,M+1$, on écrit le schéma dit "implicite " suivant :

$$u_i^{j-1} = (2\lambda+1)u_i^j - \lambda u_{i-1}^j - \lambda u_{i+1}^j$$

ou encore, pour tout $i = 1, \ldots, N$ et $j = 1, \ldots, M$, on peut écrire :

$$u_i^j = (2\lambda+1)u_i^{j+1} - \lambda u_{i-1}^{j+1} - \lambda u_{i+1}^{j+1}$$

(Les inconnues à l'itération $j+1$ sont reliées entre elles par une relation implicite)
La forme matricielle du schéma

$$\begin{bmatrix} u_1^j \\ u_2^j \\ . \\ . \\ u_N^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda+1 & \lambda & 0 & 0 & 0... & 0 \\ \lambda & 2\lambda+1 & \lambda & 0 & 0... & 0 \\ 0 & \lambda & 2\lambda+1 & \lambda & 0... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0.. & 0 & ..0 & \lambda & 2\lambda+1 & \lambda \\ 0.. & 0 & .. & . & \lambda & 2\lambda+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{j+1} \\ u_2^{j+1} \\ . \\ . \\ u_N^{j+1} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} u_0^j \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \\ u_{N+1}^j \end{bmatrix}$$

Consistance-Convergence des schémas

1. Soit $\overline{u_i^j} = u(x_i, t_j)$ la valeur exacte de la solution en x_i et en t_j. L'erreur de consistance R_i^j en (x_i, t_j) est la somme des erreurs de consistance en temps et en espace

$$R_i^j = \tilde{R_i^j} + \widehat{R_i^j}$$

Avec
(erreur de consistance en temps)

$$\tilde{R_i^j} = \frac{\overline{u_i^{j+1}} - \overline{u_i^j}}{k} - \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j)$$

(erreur de consistance en espace)

$$\tilde{R_i^j} = \frac{\overline{u_{i-1}^j} - \overline{u_{i+1}^j} - 2\overline{u_i^j}}{h^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j)$$

Supposons que la solution u du problème (1) est de C^2 par rapport à la variable t et C^4 par rapport à la variable x. Les schémas explicites et implicites sont consistants d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace, c'est-à-dire, il existe $C \in \mathbb{R}_+$ indépendant que de u tel que

$$|R_i^j| \leq C(k + h^2)$$

2. Sous la condition $\lambda = \dfrac{k}{h^2} \leq \dfrac{1}{2}$ le schéma explicite converge en $\|\|_\infty$, donc il est nécessaire de choisir h petit, ce qui impose un choix de k plus petit.

3. Soit e^j l'erreur de convergence définie par

$$e_i^j = u(x_i, t_j) - u_i^j \qquad \textit{pour tout } i = 1, \ldots, N$$

Si $\|e^0\|_\infty \longrightarrow 0$, quand $h, k \longrightarrow 0$, le schéma implicite est convergent.

1.3 Schéma de Crank-Nicolson (schéma semi implicite)

Le schéma de Crank-Nicolson est une combinaison des schémas explicite et implicite, par sommation en faisant la moyenne des 2 égalités. Pour tout $i = 1, \ldots, N$ et $j = 0, \ldots M$, on obtient

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} - \frac{u_{i+1}^j + u_{i-1}^j - 2u_i^j}{2h^2} - \frac{u_{i+1}^{j+1} + u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1}}{2h^2} = 0$$

Soit encore

$$\begin{cases} u_i^{j+1} = u_i^j - \dfrac{2k}{h^2}(2u_i^j - u_{i-1}^j - u_{i+1}^j) - \dfrac{2k}{h^2}(2u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1} - u_{i+1}^{j+1}) = 0, \\ \qquad\qquad \forall i = 1, \ldots, N \textit{ et } j = 0, \ldots, M \\ \\ u_0^j = u_{N+1}^j = 0 \ , \qquad \forall j = 0, \ldots, M+1 \\ \\ u_i^0 = u_0(x_i) \qquad \forall i = 0, \ldots, N+1 \end{cases}$$

- Le schéma numérique de Crank-Nicolson est consistant d'ordre 2 en temps et espace.
- Le schéma de Crank-Nicolson est inconditionnellement stable et il est très largement utilisé.

2 Problème hyperbolique

On considère le problème hyperbolique de l'équation de transport

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \forall x \in]0,1[,\ t \in]0,T[\\ \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad \forall t \in]0,T[, \\ \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad \forall x \in]0,1[, \end{cases} \tag{2}$$

où la vitesse de transport $c \in \mathbb{R}$ et la condition initiale $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont données.

2.1 Schémas explicites

Nous allons établir différents schémas explicites. On approche la dérivée en temps

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) \simeq \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k}$$

En posant $r = c\dfrac{k}{h}$. Pour la dérivée en espace on a plusieurs cas :

Schéma explicite décentré amont : On prend l'approximation

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) \simeq \frac{u(x_i, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{h}$$

Nous aurons

$$u_i^{j+1} = u_i^j - r(u_i^j - u_{i-1}^j)$$

Schéma explicite décentré aval :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) \simeq \frac{u(x_{i+1}, t_j) - u(x_i, t_j)}{h}$$

Nous aurons

$$u_i^{j+1} = u_i^j - r(u_{i+1}^j - u_i^j)$$

Schéma explicite centré :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) \simeq \frac{u(x_{i+1}, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{2h}$$

Nous aurons

$$u_i^{j+1} = u_i^j - \frac{r}{2}(u_{i+1}^j - u_{i-1}^j)$$

2.2 Schémas implicites

Nous pouvons établir différents schémas implicites, en approchant toujours la dérivée en temps comme suit

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) \simeq \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1})}{k}$$

Exercice : Écrire le schéma implicite décentré amont, décentré aval, et centré du problème (2).