UNIVERSITE DE BISKRA
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUE
2 LMD MATH GEOMETRIE

FACULTE DE SCIENCES EXACTES
ET SCIENCE DE LA NATURE ET DE LA VIE

SERIE 2

EXERCICE 1

On donne la courbe paramétrée suivante:
$I = [-\pi, \frac{\pi}{2}]$, $c(t) = (\cos t, \sin t)$;

A) Esquisser l'image de la courbe et indiquer avec une flèche le sens du parcours

B) Trouver une courbe γ d'efinie sur $I = [0, 1]$ qui donnent la meme image de C

C) Trouver une courbe β d'efinie sur $I = [0, 1]$ qui donnent la meme image mais cette fois $\beta(0) = \gamma(1)$

D) Trouver une courbe λ d'efinie sur $I = [0, 3]$ qui donnent la meme image

EXERCICE 2

Soit la courbe $C : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ définie par $C(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$

1) Determiner les points d'intersection de la courbe C avec le cercle D de centre l'origine et de rayon r

2) Calculer l'angle entre la courbe C et le cercle D

3) Calculer la longueur de la courbe C

EXERCICE 3

Soit la courbe $\begin{array}{c} C : \mathrm{R} \to \mathbb{R}^3 \\ t \longmapsto (R\cos t, R\sin t, at) \end{array}$ ou $a > 0$ et $R > 0$

1) Que représente géométriquement cette courbe ?

2) Déterminer une paramétrisation par abscisse curviligne

3) Calculer le repère de Frenet

4) Calculer la courbure k_a de la courbe C en tout point. Que remarquez-vous ?

5) Calculer la torsion τ_a de la courbe C en tout point. Que remarquez-vous ?

6) Calculer les limites $\lim_{a \to 0} k_a$ et $\lim_{a \to 0} \tau_a$

EXERCICE 4

Soit la courbe $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par $C(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$

1) Montrer que C est réguliére, et calculer le vecteur tangent unitaire $T_C(t)$

2) Calculer la longueur $L(C)$ de la courbe C entre les points $C(o)$ et $C(t)$

3) Donner le paramétrage par longueur d'arc (abscisse curvilgne) de C

4) Calculer la courbure k et la torsion τ de C, puis le rapport $\frac{\tau}{k}$

5) Calculer les vecteurs $N_C(t)$ et $B_C(t)$

Série (02)

Solution

EXO3 : $C : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$t \longrightarrow C(t) = (R\cos t, R\sin t, at)$, $a>0$, $R>0$

1- La courbe represente geometriquement un Helice

2 - $\dot{C}(t) = (-R\sin t, R\cos t, a)$

$\|\dot{C}(t)\| = \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2 + a^2} = \sqrt{R^2+a^2}$

La fonction de l'abscisse curviligne

$\varphi(s) = \int_0^s \|\dot{C}(t)\| dt = \int_0^s \sqrt{R^2+a^2}\, dt$

$\varphi(s) = \sqrt{R^2+a^2} \cdot s$

on $t = \varphi(s) \Rightarrow s = \varphi^{-1}(t) = \dfrac{t}{\sqrt{R^2+a^2}}$

$\therefore \boxed{\varphi^{-1}(t) = \dfrac{t}{\sqrt{R^2+a^2}}}$

$\tilde{C} = C \circ \varphi^{-1}$, donc la parametrisation de C est :

$\tilde{C}(t) = C(\varphi^{-1}(t)) = \left(R\cos \dfrac{t}{\sqrt{R^2+a^2}}, R\sin \dfrac{t}{\sqrt{R^2+a^2}}, \dfrac{at}{\sqrt{R^2+a^2}}\right)$

3 - le repère de Frenet :

$T_c(t) = \dfrac{\dot{c}_c(t)}{\|\dot{c}_c(t)\|} = \dfrac{1}{\sqrt{R^2+a^2}}(-R\sin t, R\cos t, a)$

$\dot{T}_c(t) = \dfrac{1}{\sqrt{R^2+a^2}}(-R\cos t, -R\sin t, 0)$

$\|\dot{T}_c(t)\| = \dfrac{R}{\sqrt{R^2+a^2}}$

$N_c(t) = \dfrac{\dot{T}_c(t)}{\|\dot{T}_c(t)\|} = \dfrac{1}{\sqrt{R^2+a^2}}(-R\cos t, -R\sin t, 0) \cdot \dfrac{\sqrt{R^2+a^2}}{R}$

$\boxed{N_c(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)}$

$$B_c(t) = T_c(t) \wedge N_c(t)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{-R}{\sqrt{R^2+a^2}} \sin t & \frac{R}{\sqrt{R^2+a^2}} \cos t & a \\ -\cos t, & -\sin t & 0 \end{vmatrix}$$

$$B_c(t) = \left(-a \sin t, a \cos t, \frac{R}{\sqrt{R^2+a^2}}\right)$$

Repère de Frenet $(T_c(t), N_c(t), B_c(t))$.

4 - on a : $\frac{1}{\|\dot{c}(t)\|} \cdot \dot{T}_c(t) = k(t) \cdot N(t)$

$$= \frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}} (-R\cos t, -R \sin t, 0)$$

donc $k(t) \cdot N_c(t) = \frac{-R}{(\sqrt{R^2+a^2})^2} (\cos t, \sin t, 0)$

$\therefore \boxed{k_a(t) = \frac{R}{R^2+a^2}}$ La courbure est constante

d'autre part ; on a : $\frac{1}{\|c'(t)\|} \cdot \dot{B}_c(t) = -\tau(t) \cdot N_c(t)$

$$= \frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}} \cdot (-a\cos t, -a \sin t, 0)$$

donc $\boxed{\tau_a(t) = \frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}}$, la torsion est constante

5 - $\lim\limits_{a \to 0} k_a(t) = \lim\limits_{a \to 0} \frac{R}{R^2+a^2} = \frac{1}{R}$

$\lim\limits_{a \to 0} \tau_a(t) = \lim \frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}} = 0$

EX.04 $c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$t \longrightarrow c(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}\, t)$

1- $c'(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})$

$\|c'(t)\| = \sqrt{(e^t)^2 + (e^{-t})^2 + (\sqrt{2})^2}$

$= \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2} = \frac{1}{e^t} \sqrt{e^{4t} + 2e^{2t} + 1}$

$\|c'(t)\| = \frac{e^{2t}+1}{e^t} > 0$ donc

c est régulière.

→ La tangente unitaire

$T_c(t) = \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|} = \frac{e^t}{e^{2t}+1} (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})$

$$\boxed{T_c(t) = \left(\frac{e^{2t}}{e^{2t}+1}, \frac{1}{e^{2t}+1}, \frac{\sqrt{2}\, e^t}{e^{2t}+1} \right)}$$

2- $L(c) = \int_0^t \|c'(s)\| ds = \int_0^t \frac{e^{2s}+1}{e^s} ds$

$= \int_0^t (e^s + e^{-s}) ds = [e^s - e^{-s}]_0^t$

$= (e^t - e^{-t}) - (1 - 1)$

$\therefore \boxed{L(c) = e^t - e^{-t}}$

3- La fonction de l'abscisse curviligne.

$\varphi(s) = \int_0^s \|c'(t)\| dt = e^s - e^{-s}$

on calcul la fonction réciproque de φ

soit $t = e^s - e^{-s} \Rightarrow e^{2s} - t e^s - 1 = 0$

~~donc $\Delta = t$~~ . soit $3 = e^s$

donc $z^2 - tz - 1 = 0$

$$z = \frac{t \mp \sqrt{t^2+4}}{2}$$

on prend $z = \dfrac{t + \sqrt{t^2+4}}{2}$

donc $e^s = \dfrac{t+\sqrt{t^2+4}}{2}$

$\therefore\ s = \ln\left(\dfrac{t+\sqrt{t^2+4}}{2}\right)$

$\therefore\ \varphi^{-1}(t) = \ln\left(\dfrac{t+\sqrt{t^2+4}}{2}\right)$

le paramétrage par l'abscisse curviligne est

$$\tilde{C}(t) = C \circ \varphi^{-1}(t) = \left(\frac{t+\sqrt{t^2+4}}{2}, -\frac{t+\sqrt{t^2+4}}{2}, \sqrt{2}\ln\left(\frac{t+\sqrt{t^2+4}}{2}\right)\right)$$

4 - La courbure : k

d'après l'exercice 3 (voir exercice 3)

$$\frac{1}{\|\dot{c}(t)\|} \cdot \dot{T}_c(t) = k(t) \cdot N(t)$$

donc $k(t) = \dfrac{1}{\|\dot{c}(t)\|} \cdot \dot{T}_c(t) \cdot N_c(t)$.

aussi

$$\frac{1}{\|c'(t)\|} \cdot \dot{B}_c(t) = -\tau(t) \cdot N_c(t)$$

$$\Rightarrow \tau(t) = -\frac{1}{\|\dot{c}(t)\|} \cdot \dot{B}_c(t) \cdot N_c(t).$$

5 - et $\boxed{\dfrac{\tau(t)}{k(t)} = -\dfrac{\dot{B}_c(t)}{\dot{T}_c(t)}}$