

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Mohamed Khider – Biskra
Faculté des Sciences exactes et SNV
Département : Science de la matière

جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الدقيقة و علوم الطبيعة و الحياة
قسم: علوم المادة



Polycopié de cours

Mécanique Des Fluides

Réalisé par : **ALMI Kenza**

Année Universitaire : 2013-2014

Avant Propos

Ce cours est destiné aux étudiants de deuxième année licence physique Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie. Il a été écrit sur la base du programme assigné à ce niveau d'étude. Quelques notions ont été ajoutées pour qu'il vienne conforme avec ce qui est disponible comme travaux pratiques programmés aux étudiants dans le module de la mécanique des fluides. Cet ouvrage se base beaucoup plus sur les notions physiques que sur les calculs mathématiques pour qu'il soit léger et facile à comprendre, et représente une bonne initiation à la mécanique des fluides pour des étudiants qui entament cette matière pour la première fois d'autant plus lorsqu'ils ne soient pas de la spécialité énergétique.

Sommaire

Chapitre 1 : Introduction à la Mécanique Des Fluides	1
1- Introduction	1
2- Définitions	2
- Le fluide	2
- Notion de la particule fluide	2
- Forces de volume et forces de surface appliquées sur un domaine fluide	3
- La masse volumique	5
- La densité	5
- Fluide incompressible	5
- Fluide compressible	5
- Débit massique et débit volumique	6
- Fluide parfait	6
- Fluide réel	6
- La Viscosité	7
- Mesure de viscosité	9
3- Régime d'écoulement	10
- Régime laminaire	10
- Régime turbulent	10
- Régime transitoire	10
4- Force de frottement fluide (la traînée)	11
- Coefficient de traînée et le nombre de Reynolds	13
- Coefficient de traînée d'une sphère	13
Chapitre II : Statique des fluides	15
1- Définition	15
2- Equation fondamentale de la statique	15
3- Statique des fluides incompressibles	18
- Théorème de l'hydrostatique	18

-	<u>Conséquences du théorème fondamental de l'hydrostatique</u>	<u>20</u>
-	<u>Egalité des pressions en tout point d'un plan horizontal</u>	<u>20</u>
-	<u>Théorème de Pascal</u>	<u>21</u>
-	<u>Principe d'Archimède</u>	<u>22</u>
4-	<u>Statique des fluides compressibles</u>	<u>23</u>
 Chapitre III : Cinématique Des Fluides		<u>26</u>
1.	<u>Descriptions de mouvement</u>	<u>26</u>
-	<u>Description de Lagrange</u>	<u>26</u>
-	<u>Description d'Euler</u>	<u>26</u>
2.	<u>Ecoulement permanent</u>	<u>27</u>
3.	<u>Dérivée Particulaire</u>	<u>28</u>
4.	<u>Trajectoire</u>	<u>31</u>
5.	<u>Ligne de courant</u>	<u>32</u>
6.	<u>Ligne d'émission</u>	<u>34</u>
7.	<u>Débit massique et débit volumique</u>	<u>37</u>
8.	<u>Le mouvement d'un élément de fluide tenseur de déformation</u>	<u>37</u>
9.	<u>Écoulement rotationnel ou tourbillonnaire</u>	<u>44</u>
-	<u>Ligne tourbillon</u>	<u>44</u>
-	<u>Filet tourbillon</u>	<u>44</u>
-	<u>Vortex</u>	<u>44</u>
10.	<u>Écoulement irrotationnel ou à potentiel des vitesses</u>	<u>45</u>
11.	<u>Fonction de potentiel</u>	<u>48</u>
12.	<u>Propriétés du potentiel des vitesses</u>	<u>48</u>
13.	<u>Fonction de courant</u>	<u>51</u>
14.	<u>Propriétés de la fonction de courant</u>	<u>52</u>
15.	<u>Débits et lignes de courant</u>	<u>55</u>
16.	<u>Exemples d'écoulements plans</u>	<u>56</u>
-	<u>Ecoulement uniforme</u>	<u>56</u>
-	<u>Ecoulement plan autour d'une source ou d'un puits</u>	<u>57</u>
-	<u>Vortex ou tourbillon libre</u>	<u>59</u>

Chapitre IV : Dynamique des fluides parfaits 62

1. <u>Equation fondamentale pour un fluide parfait - théorème d'<i>Euler</i></u>	62
- <u>Théorème de transport de <i>Reynolds</i></u>	62
- <u>Théorème de transport appliqué à la quantité de mouvement</u>	63
- <u>Théorème d'<i>Euler</i></u>	64
2. <u>Equation de Bernoulli</u>	65
3. <u>Interprétation de l'équation de <i>Bernoulli</i></u>	68
- <u>Interprétation en termes d'énergie</u>	68
- <u>Interprétation en termes de pression</u>	68
4. <u>Applications</u>	69
- <u>La pression en amont d'un obstacle</u>	69
- <u>Tube de <i>Pitot</i></u>	70
- <u>Tube de <i>Venturi</i> - Mesure de débit</u>	71
- <u>Ecoulement par orifice (vidange d'un réservoir)</u>	73
- <u>Phénomène de cavitation</u>	76

Chapitre V : Dynamique des fluides réels 77

1. <u>Application du Principe Fondamental de la Dynamique</u>	77
- <u>Forces de surface - Tenseur des contraintes</u>	77
2. <u>Fluide newtonien et équation de Navier-Stokes</u>	80
3. <u>Application sur des écoulements réels particuliers</u>	83
- <u>Ecoulement de couette</u>	83
- <u>Ecoulement de Poiseuille plan</u>	85
- <u>Écoulement de cisaillement de Couette-Poiseuille plan</u>	85
- <u>Ecoulement laminaire en conduit cylindrique : loi de Poiseuille</u>	86
- <u>Ecoulement de Couette cylindrique</u>	88

Chapitre I : Introduction à la Mécanique Des Fluides

I- Introduction

1- C'est quoi la mécanique des fluides ?!

La mécanique des fluides est une branche de la physique qui étudie les écoulements des fluides ; c'est-à-dire des liquides et des gaz lorsque ceux-ci subissent des forces ou des contraintes en utilisant les lois de la mécanique de Newton.

2- Pourquoi on étudie cette science ?!

La mécanique des fluides a de nombreuses applications dans divers domaines de notre vie. Tels que : le domaine Spatial, l'Océanographie, Météorologie, l'Aérodynamique, Hydrologie, Rhéologie, et dans le domaine Physiologiques

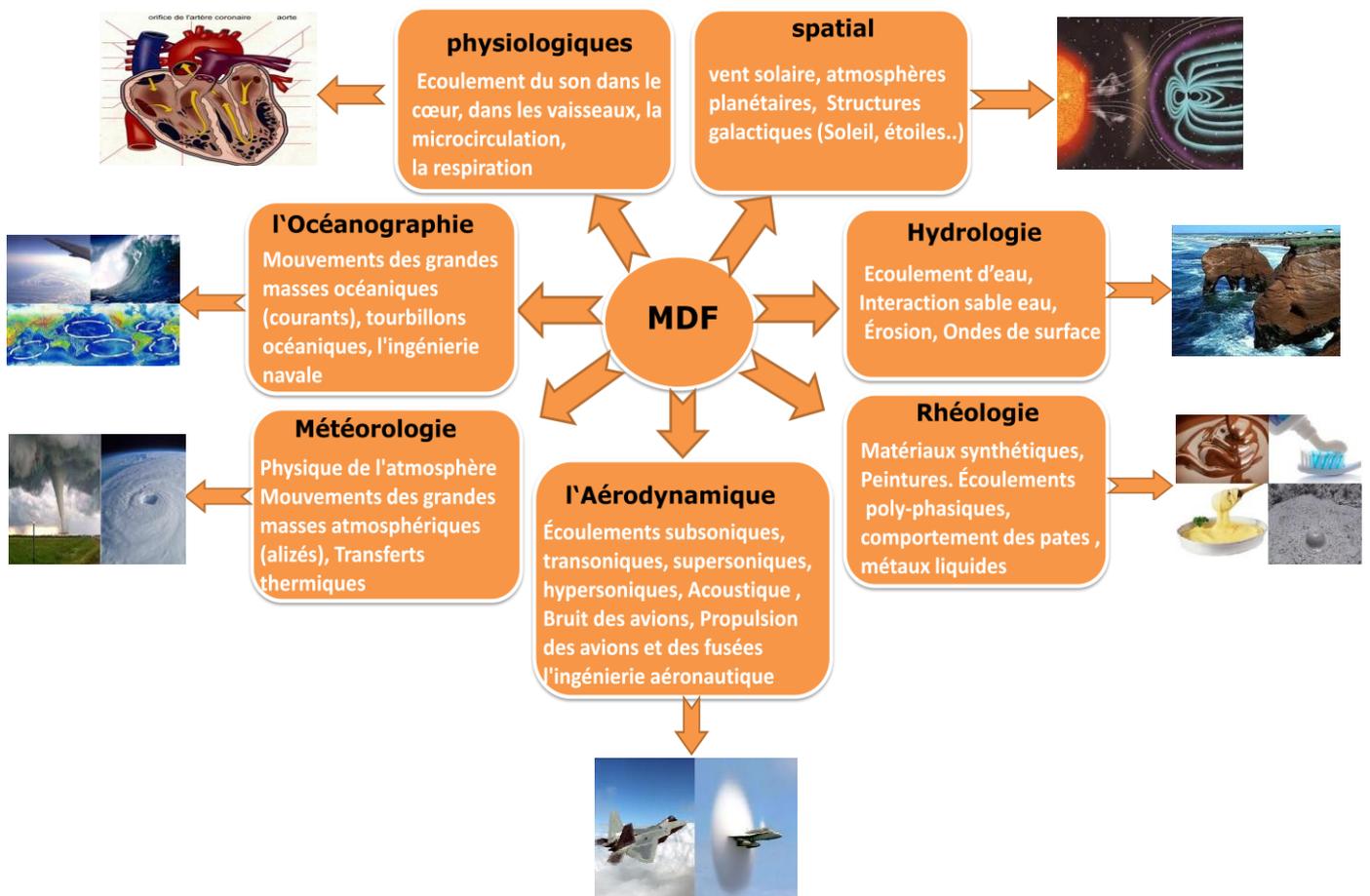


Figure I.1 : Domaines d'application de la mécanique des fluides

II- Définitions

1- Le fluide

Un fluide est un milieu continu, formé de particules matérielles, très petites et très nombreuses, libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. C'est un milieu déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler. On distingue deux sortes de fluides : les liquides et les gaz

- **Les liquides** n'ont pas de forme propre ; Ils prennent la forme du récipient qui les contient, mais ils ont un volume propre.
- **Les gaz** n'ont ni forme ni volume propre.

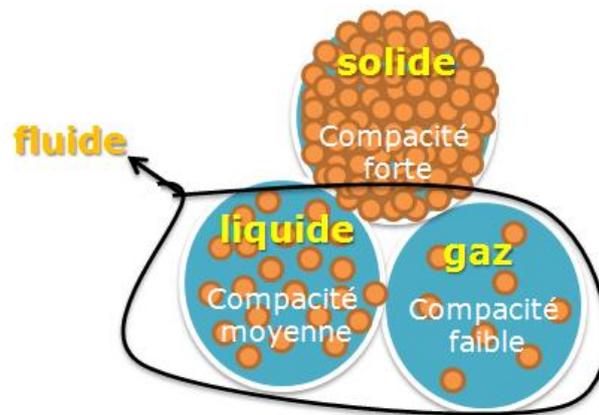


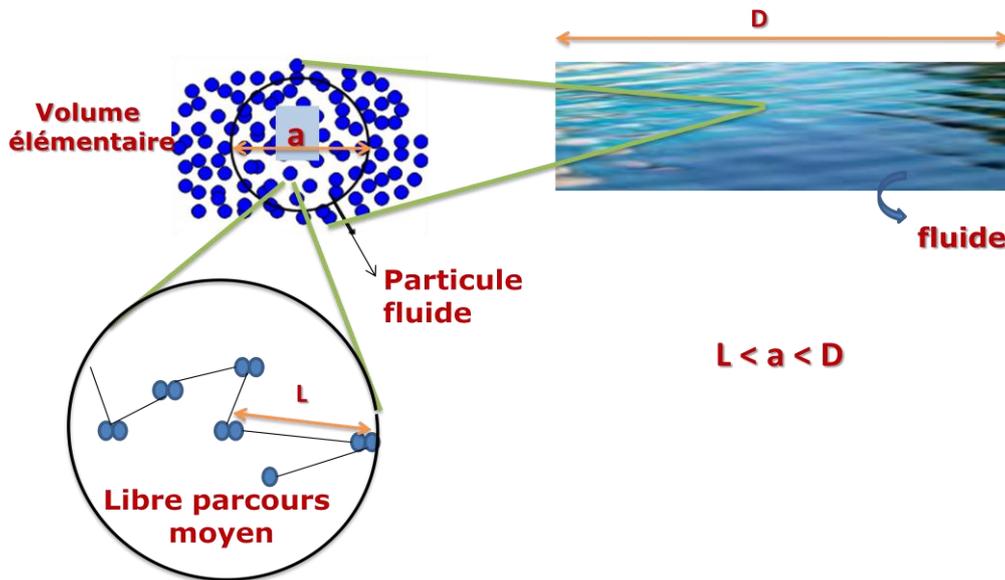
Figure I.2 : Etats de la matière

2- Notion de la particule fluide

Les concepts de la mécanique des fluides reposent sur les hypothèses fondamentales suivantes :

- Le fluide est un milieu continu
- Le milieu est considéré continu lorsqu'il est possible de définir, en tout point de ce milieu (l'écoulement) et à tout instant, des fonctions de champ (masse volumique, température, vitesse, etc..)
- Quelque soit l'élément de volume qu'on choisit est très petit (une gouttelette de brouillard), il sera toujours beaucoup plus grand que la dimension des molécules qui le constitue
- Il n'est pas nécessaire de suivre l'évolution de chaque molécule à l'échelle microscopique
- Le fluide est constitué de ce qu'on appelle *particules fluides* comportant un grand nombre de molécules et occupant un volume négligeable à l'échelle macroscopique.

- On peut affecter à chaque particule de fluide une vitesse v , une pression p , une température T , une masse m ...



D : caractérise la dimension du domaine (l'échelle macroscopique)

L : caractérise la dimension intermoléculaire représente le libre parcours moyen (l'échelle microscopique)

a : caractérise la dimension de la particule fluide (l'échelle mésoscopique)

Figure I.3 : Notion de la particule fluide

3- Forces de volume et forces de surface appliquées sur un domaine fluide

➤ Forces de volume

Sont les forces qui s'exercent sur le volume entier du domaine fluide par exemple force de pesanteur, force électrique, magnétique, électromagnétique.

$$\vec{F} = \int_V \vec{f} \, d\tau$$

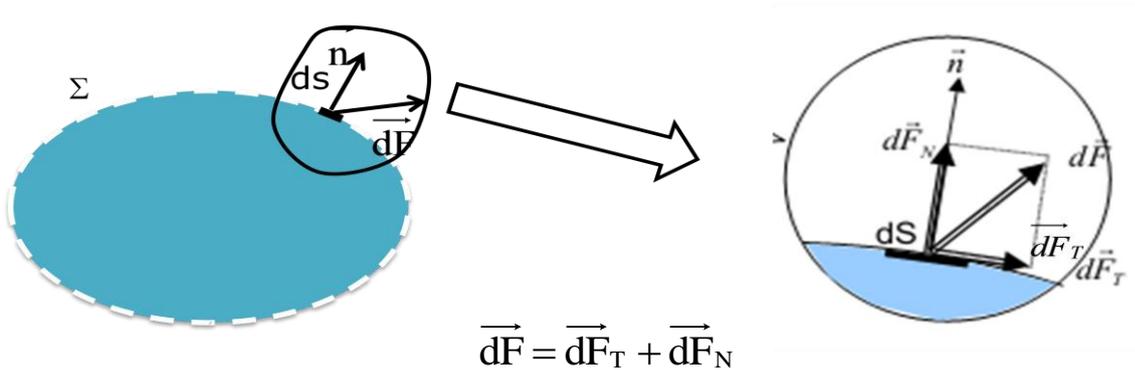
$d\tau$: Volume élémentaire

\vec{f} : Force par unité de volume

➤ **Forces de surface**

Sont les forces qui s'exercent sur la surface du domaine fluide on les appelle *forces surfaciques* ou *superficielles*.

Soit un volume fluide, délimité par une surface fermée Σ



$$\vec{dF} = \vec{dF}_T + \vec{dF}_N$$

Considérons la force qui s'exerce au niveau de la surface élémentaire dS de normale \vec{n}

On peut toujours décomposer \vec{dF} en deux composantes:

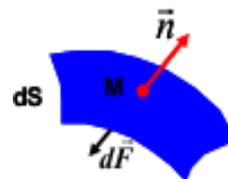
- une composante \vec{dF}_T tangentielle à dS appelée *force de contrainte visqueuse* ou frottement.
- une composante \vec{dF}_N normale à dS appelée *force de pression*.

➤ La pression désigne la force par unité de surface qui s'exerce perpendiculairement à un élément de surface dS .

$$\vec{dF} = -p \cdot \vec{n} \cdot ds \implies p = \frac{dF}{ds}$$

dF est la force exercée sur l'élément de surface dS .

p est la pression régnant au point M.



- La force de pression agit toujours vers l'intérieur du volume délimité par l'élément de surface.
- La pression s'exprime en pascal : $\text{Pa} = \text{N} \cdot \text{m}^{-2} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$

On trouve aussi : $1 \text{ atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ atm} = 760 \text{ mm Hg}$$

4- La masse volumique

La masse volumique ρ est définie comme la masse par unité de volume

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

5- La densité

La densité d est sans dimension est définie comme la masse volumique du fluide étudié rapportée à la masse volumique de l'eau (1000 kgm^{-3}) dans le cas d'un liquide et à la masse volumique de l'air ($1,29 \text{ kgm}^{-3}$) dans le cas d'un gaz

6- Fluide incompressible

Un fluide est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure. Les liquides peuvent être considérés comme des fluides incompressibles (eau, huile, etc.)

Exemple : Il faut une force de 10^9 N par m^2 de surface pour diminuer le volume de l'eau de 5% .

7- Fluide compressible

Un fluide est dit compressible lorsque le volume occupé par une masse donnée varie en fonction de la pression extérieure. Les gaz sont des fluides compressibles.

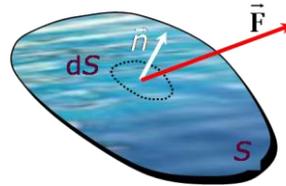
Exemple : l'air, l'hydrogène, le méthane à l'état gazeux

8- Débit massique et débit volumique

➤ Débits

Le débit d'une fonction \vec{F} à travers la surface S , est donné par :

$$q_F = \int_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$



➤ Débit massique

Le débit massique de fluide est donné par :

$q_m = \rho v_n S$; v_n est la vitesse uniforme sur toute la surface S

$$q_m = \int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS$$

- Si l'écoulement est permanent (l'écoulement n'évolue pas dans le temps), alors le débit massique est conservé : $q_m(S_1) = q_m(S_2)$

➤ Débit volumique

Le débit volumique de fluide est donné par :

$q_v = v_n S$; v_n est la vitesse uniforme sur toute la surface S

$$q_v = \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS$$

- Si le fluide est incompressible, alors le débit volumique est conservé

9- Fluide parfait

Un fluide est dit parfait lorsque la résultante des forces de surface exercées sur le fluide reste normale à la surface dS . C'est-à-dire la composante tangentielle F_T est nulle (l'effets de frottement est négligeable)

10- Fluide réel

Dans un fluide réel les forces tangentielles de frottement interne (frottement visqueux) qui s'opposent au glissement relatif des couches fluides sont prises en considération.

- Ce phénomène de frottement visqueux apparaît lors du mouvement du fluide.
- Au repos, le fluide réel se comporte comme un fluide parfait

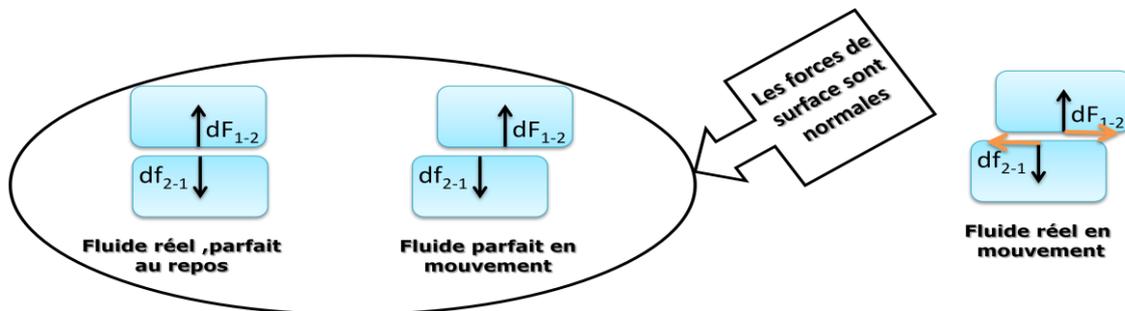
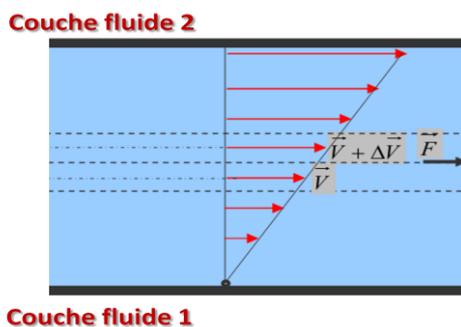


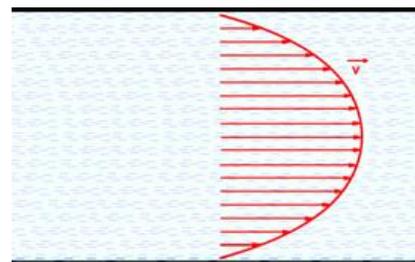
Figure I.4 : Différence entre un fluide réel et fluide parfait

11- La Viscosité

La viscosité est déterminée par la capacité d'entraînement (adhérence) que possède une couche en mouvement sur les autres couches adjacentes. Dans les écoulements visqueux les couches fluide ne s'écoulent pas à la même vitesse, on dit qu'il ya un profil de vitesse.



Profil des vitesses linéaire



Profil des vitesses parabolique

Figure I.5 : Profil des vitesses dans un fluide réel

On distingue la viscosité dynamique et la viscosité cinématique :

➤ **Viscosité dynamique**

Considérons deux couches contiguës distantes de Δz d'un fluide qui s'écoule en filets rectilignes et parallèles. La différence de vitesse entre les deux couches fluide engendre une force de frottement F qui s'exerce à la surface de séparation de ces deux couches et s'oppose au glissement de l'une sur l'autre. Elle est proportionnelle à la différence de vitesse des couches Δv , à leur surface S et inversement proportionnelle à Δz .

$$F = \mu \frac{\Delta V}{\Delta Z} S$$

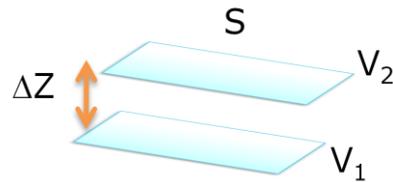


Figure I.6 : Expression de Newton de la viscosité

Le facteur de proportionnalité μ est le coefficient de la viscosité dynamique du fluide.

$$[\mu] = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}.$$

Dans le système international (SI), l'unité de viscosité dynamique est le Pascal seconde (Pa·s) ou Poiseuille (Pl).

➤ **Viscosité cinématique**

Dans de nombreuses formules apparaît le rapport de la viscosité dynamique μ et de la masse volumique ρ . Ce rapport est appelé viscosité cinématique η

$$[\eta] = L^2 \cdot T^{-1} \qquad \eta = \frac{\mu}{\rho}$$

Dans le système international (SI), l'unité de viscosité n'a pas de nom particulier : (m^2/s). Dans le système CGS, l'unité est le Stokes (St) : $1 m^2/s = 10^4 St$

➤ **Mesure de viscosité**

La viscosité peut être mesurée en utilisant plusieurs instruments, Parmi lesquels on cite les méthodes suivantes :

Viscosimètre à chute de bille ou viscosimètre d'Hoepler (voir TP)

Une bille sphérique tombe lentement dans un tube bien calibré renfermant le liquide visqueux. On mesure la durée t que met la bille pour parcourir une certaine distance.



Figure I.7 : Vicosimètre d'Hoepler

Viscosimètre rotatif ou viscosimètre de Couette

Un cylindre plein (A) tourne à vitesse constante dans un liquide contenu dans un récipient cylindrique (B) ; celui-ci, mobile autour de son axe de révolution, est entraîné par le liquide. Un ressort, exerçant un couple de torsion après avoir tourné d'un angle α , retient (B) en équilibre. On montre que la viscosité dynamique η est proportionnelle à l'angle α

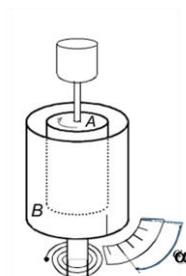


Figure I.8 : Viscosimètre de Couette

12- Régime d'écoulement

En 1883, l'ingénieur britannique *Osborne Reynolds* montra l'existence de deux types d'écoulements visqueux dans les tuyaux.

➤ Régime laminaire

Il correspond à des écoulements réguliers où la masse de fluide est constituée de filets juxtaposés, parfaitement individualisés, les surfaces libres sont lisses et unies; les filets ne sont soumis qu'à des efforts tangentiels de frottement dus à la viscosité du fluide. Ce sont les forces de viscosité. Ces écoulements ne se rencontrent guère en pratique sauf pour quelques problèmes particuliers (à faibles vitesses) ou dans le cas de fluides très visqueux

➤ Régime turbulent

À partir d'une certaine vitesse, les fluctuations locales de pression ou de vitesses ou les perturbations extérieures de l'écoulement (rugosité de la paroi, forces d'inertie) modifient d'une façon irréversible les lignes de courants. Ils ne conservent pas leur individualité ce qui provoque des gradients de pression de part et d'autre de la couche et conduit à la création de tourbillons locaux. Lorsque le fluide est rempli de ces tourbillons, le régime est qualifié de "*turbulent*".

➤ Régime transitoire

C'est un régime intermédiaire. L'écoulement est dit transitoire lorsque des petites perturbations commencent à apparaître.

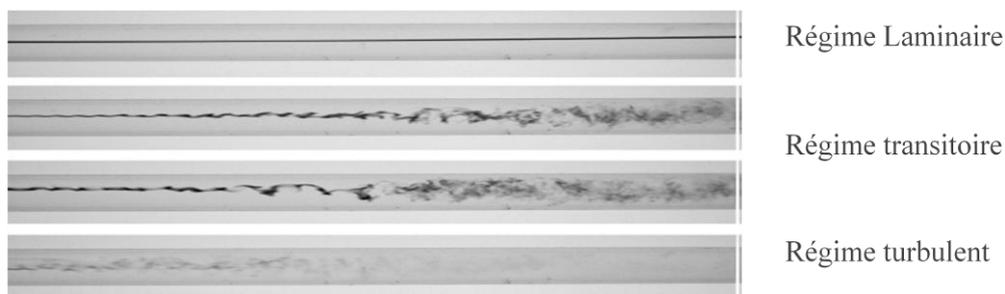


Figure I.9: Régimes d'écoulement

➤ Nombre de Reynolds

En utilisant des fluides de diverses viscosités, et en faisant varier les conditions expérimentales, Reynolds a montré, qu'il existait un paramètre Re , sans dimension, qui permet de classer ces différents comportements. On le nomme nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\rho V d}{\mu} = \frac{V d}{\eta}$$

}

$Re < 2000$ le régime est **laminaire**

$2000 < Re < 3000$ le régime est **transitoire**

$Re > 3000$ le régime est **turbulent**

ρ : est masse volumique du fluide ; V : la vitesse moyenne ; d une dimension transversale de la conduite ; μ et η les viscosités dynamiques et cinématiques du fluide.

13- Force de frottement fluide (la traînée)

Lorsqu' un corps pénètre dans un fluide, sera soumis à des forces, réparties en surface, dont les valeurs et distributions dépendent de:

- ✓ L'état physique de fluide (masse volumique, poids,..)
- ✓ de la vitesse relative
- ✓ de la forme du corps et de la rugosité de sa surface

La somme de ces forces peut être décomposée en une composante perpendiculaire appelée force de pression ou *portance* en aérodynamique et une composante dirigée en sens inverse de la vitesse, appelée force R de frottement visqueux (amortissement fluide) ou *traînée*.

14- La traînée

La traînée est la résultante des forces de frottement internes c'est la force qui freine le corps dans le fluide. On distingue deux types de traînées:



➤ **La trainée au régime laminaire**

Aux faibles vitesses, l'écoulement du fluide autour du corps est laminaire. Le fluide, à la surface du corps, possède une vitesse locale, égale à celle du corps, et décroissante régulièrement en fonction de son éloignement du corps. Dans ce régime c'est *la viscosité qui prédomine* dans l'effet de la trainée qui est exprimé par:

$$T = K V d \mu$$

d : dimension linéaire du corps en mouvement

K : coefficient numérique dépendant de la forme et de l'orientation

➤ **La trainée au régime turbulent**

Aux grandes vitesses, le corps met le fluide en mouvement dans son sillage. L'énergie ainsi communiquée, égale à $1/2 \rho V^2$ par unité de volume, a pour effet de ralentir le mobile et doit donc intervenir dans l'expression de la force de frottement donc dans ce régime c'est l'inertie, qui prédomine dans l'effet de trainée. Elle peut être modélisée par l'expression suivante:

$$T = C_x \frac{1}{2} \rho V^2 S$$

Le coefficient C_x , qu'on cherche à le réduire, est un nombre sans dimension. Il dépend de la forme du corps et de son orientation par rapport à la direction de la vitesse.

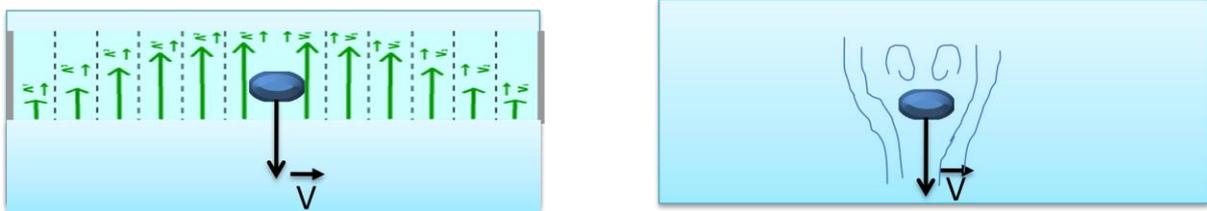


Figure I.10 : La trainée dans différents régimes d'écoulement

➤ **Coefficient de traînée et le nombre de Reynolds**

Compte tenu de l'importance des situations où l'inertie du fluide joue un rôle prédominant (traînée en V^2), on convient d'écrire dans tous les cas la traînée sous la forme:

$$T = C_x \frac{1}{2} \rho V^2 S$$

Le coefficient de traînée C_x dépend maintenant de la vitesse.

Lorsqu'on effectue le rapport des relations de la traînée on obtient:

$$\frac{T_{\text{turbulent}}}{T_{\text{laminaire}}} = \frac{C_x}{2K} \frac{\rho V^2 S}{\mu d V} = c \frac{\rho V d}{\mu} = c R_e$$

R_e , représente le rapport des forces d'inertie et les forces de viscosité, donc La détermination de T dans le cas général revient à la détermination de C_x qui dépend de la valeur de R_e .

Des graphes représentant C_x en fonction de R_e ont été constitués par le regroupement de résultats expérimentaux obtenus sur des systèmes très divers (billes d'alliages métalliques dans de l'huile, billes de cire dans l'alcool, de paraffine dans l'aniline, d'ambre dans l'eau, bulles d'air dans l'eau, etc.)

➤ **Coefficient de traînée d'une sphère**

Dans le cas d'une sphère de rayon r se déplaçant à faible vitesse V ($R_e \leq 1$) dans un fluide, la traînée est donnée par la formule de Stokes :

$$T = 6\pi r\mu V$$

Dans le cas des grandes vitesses ($1000 \leq R_e \leq 2 \cdot 10^5$) où $C_x = 0,48$, et en utilisant $S = \pi r^2$, la traînée est donné par :

$$T = C_x \frac{1}{2} \rho V^2 \pi r^2$$

Le coefficient de traînée d'une sphère à faible vitesse :

$$C_x = \frac{12\mu}{r\rho V} = \frac{24}{R_e}$$

D'où le nombre de Reynolds égal :

$$R_e = \frac{2r\rho V}{\mu}$$

Tel que le diamètre d de sphère égal $2r$

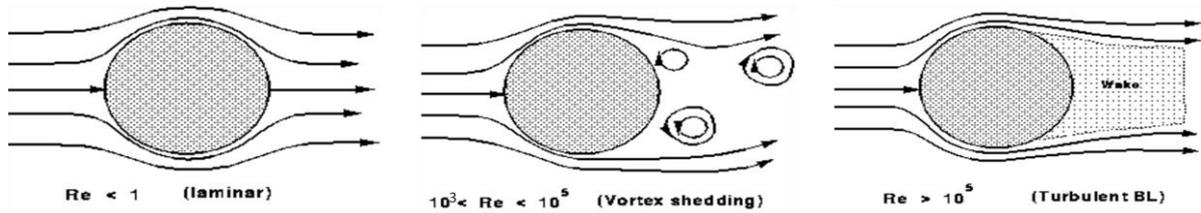


Figure I.11 : Le nombre de Reynolds à différents régimes

Chapitre II : Statique des fluides

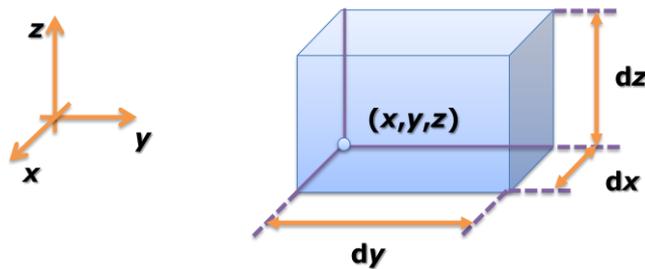
1- Définition

La statique des fluides est l'étude des conditions d'équilibre des fluides et de leurs comportements dans des situations où il y a absence de mouvement relatif entre les particules qui les constituent:

- Fluides au repos / Accélération nulle
- Fluides en mouvement sans frottement: les fluides parfaits
- Les forces de surface en jeu sont des forces dues uniquement à la pression.

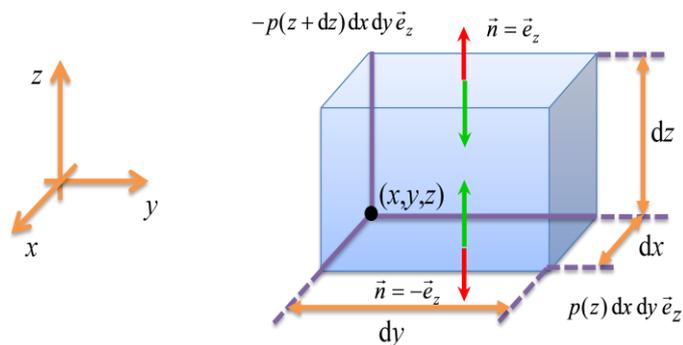
2- Equation fondamentale de la statique

On considère un élément de volume fluide de forme parallélépipédique, de volume $dV = dx.dy.dz$, dans un repère cartésien :



Le bilan des forces qui s'appliquent sur cet élément de volume impose de distinguer :

- les forces de volume : le poids
- les forces de surface : les forces de pression



Force de volume

L'expression du poids du fluide est donnée par :

$$\vec{dP} = dm \vec{g} = \rho dV \vec{g}$$

Force de surface

On peut décomposer cette force en ses trois composantes :

$$\vec{dF} = \vec{dF}_x + \vec{dF}_y + \vec{dF}_z \quad \longrightarrow \quad \vec{dF} = dF_x \vec{e}_x + dF_y \vec{e}_y + dF_z \vec{e}_z$$

Intéressons nous à la composante \vec{dF}_z , les forces de surface sont nécessairement normales, la composante suivant z correspond aux forces de pression s'exerçant sur les surfaces perpendiculaires à l'axe z .

$$\vec{dF}_z = dF_z \vec{e}_z = F_z(z) \vec{e}_z - F_z(z+dz) \vec{e}_z = P(z) dx dy \vec{e}_z - P(z+dz) dx dy \vec{e}_z$$

Donc : $dF_z = [p(z) - p(z+dz)] dx dy$

Par un développement au premier ordre, on trouve :

$$p(z+dz) = p(z) + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

D'où : $dF_z = -\frac{\partial p}{\partial z} dx dy dz = -\frac{\partial p}{\partial z} dV$

Par analogie, les deux autres axes donnent :

$$\left\{ \begin{array}{l} dF_x = -\frac{\partial p}{\partial x} dV \\ dF_y = -\frac{\partial p}{\partial y} dV \end{array} \right.$$

La force de surface se résume alors à :

$$\vec{dF} = - \underbrace{\left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z \right)}_{\vec{\nabla} p \equiv \overrightarrow{\text{grad}} p} dV$$

Soit : $\vec{dF} = -\vec{\nabla}p dV$

La force de poids $\vec{dP} = \rho dV \vec{g}$ et $\vec{dF} = -\vec{\nabla}p dV$

D'après le principe fondamental de la dynamique, l'ensemble des forces agissant sur la particule fluide équivaut au produit de sa masse par son accélération :

$$\vec{dP} + \vec{dF} = \rho dV \vec{a}$$

Par conséquent, on a : $\rho dV \vec{g} - \vec{\nabla}p dV = \rho dV \vec{a}$

D'où : $\rho \vec{g} - \vec{\nabla}p = \rho \vec{a}$

 Le fluide est au repos : $\vec{a} = \vec{0}$

Dans ce cas : $\vec{\nabla}p = \rho \vec{g}$ c'est l'équation fondamentale de la statique des fluides (*Équation locale*)

Dans le cas d'un fluide au repos, en supposant que $\vec{g} = -g \vec{e}_z$ on a :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad \Rightarrow \quad p(x, y, z) = p(z)$$

D'où : $\frac{dp}{dz} = -\rho g$ C'est l'équation différentielle de la statique des fluides à résoudre pour connaître la pression en tout point du fluide au repos.

3- Statique des fluides incompressibles

Un fluide est dit incompressible si l'on peut considérer que sa masse volumique est en tout point la même :

$$\rho = C^{\text{te}}$$

Par ailleurs, on peut considérer que l'accélération de la pesanteur est une constante :

$$g = C^{\text{te}}$$

Par conséquent :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = C^{\text{te}}$$

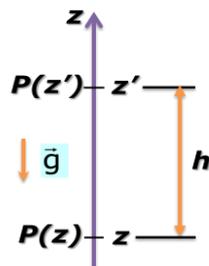
Par intégration :

$$p(z) = \int \frac{dp}{dz} dz = - \int \rho g dz = -\rho g \int dz = -\rho gz + C^{\text{te}}$$

Soit :

$$p(z) + \rho gz = C^{\text{te}} \quad \text{C'est la loi fondamentale de l'hydrostatique}$$

➤ Théorème de l'hydrostatique



D'après la loi de l'hydrostatique on a :

$$p(z) + \rho gz = C^{\text{te}} = p(z') + \rho gz'$$

Donc :

$$p(z) - p(z') = \rho g (z' - z)$$

$$p(z) - p(z') = \rho g h$$

La plupart du temps, on prendra le niveau de référence $z' = 0$ correspondant à la surface libre du fluide où

$$p(0) = p_0 = p_a$$

Donc :

$$p = p_0 + \rho g h$$

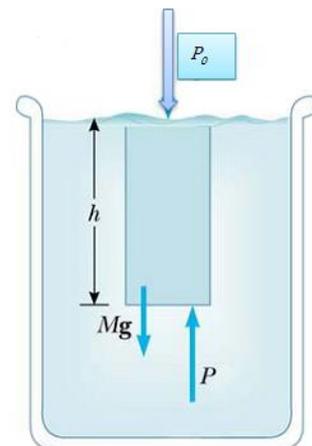
Profondeur de fluide 
sous le niveau de référence

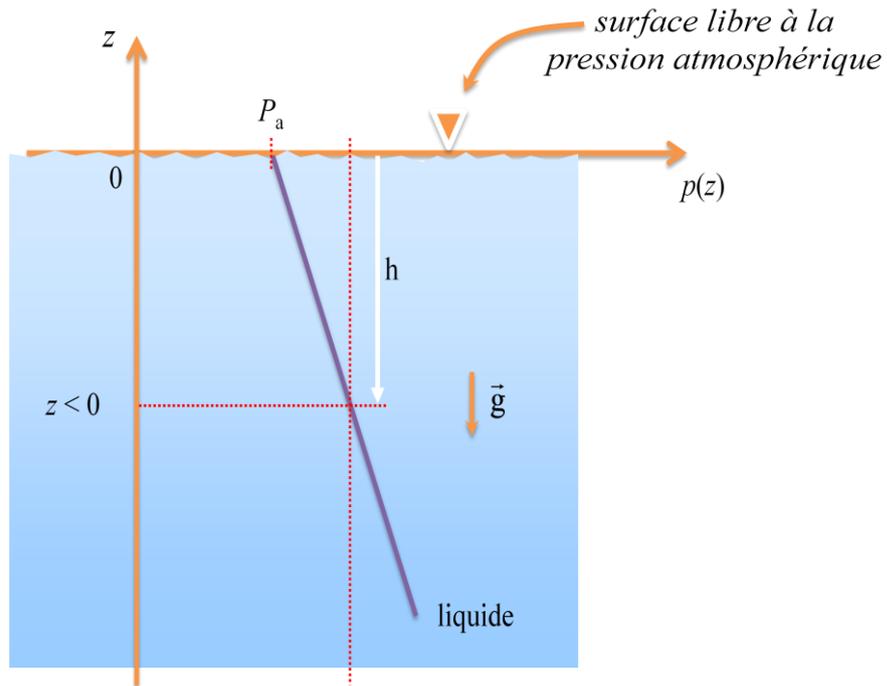
La pression atmosphérique standard : $p_a = 1,013 \cdot 10^5$ Pa

➤ **Énoncé du théorème de l'hydrostatique**

La différence des pressions entre deux points d'un liquide en équilibre est égale au poids d'une colonne de ce liquide ayant pour hauteur la différence des niveaux entre ces deux points et pour section droite l'unité de surface.

$$p - p_0 = \rho g h$$





$$p = p_a - \rho g z$$

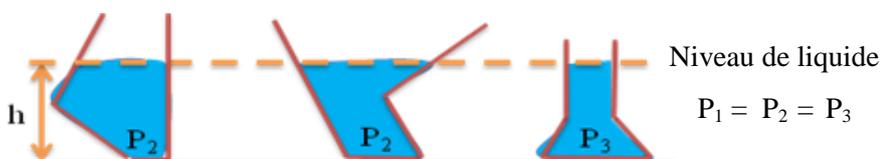
$$p = p_a + \rho g h$$

La pression augmente avec la profondeur dans le liquide, la position du point dans le liquide est repérée par rapport à la surface libre du liquide

➤ **Conséquences du théorème fondamental de l'hydrostatique**

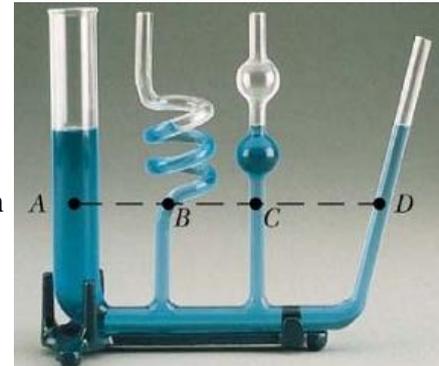
Egalité des pressions en tout point d'un plan horizontal

- ✓ les pressions en deux points M et M' situés dans le même plan horizontal, sont égales
- ✓ les plans horizontaux dans un liquide, sont des plans isobares
- ✓ La pression au fond d'un récipient ne dépend pas de la forme du récipient mais uniquement de la hauteur du liquide.

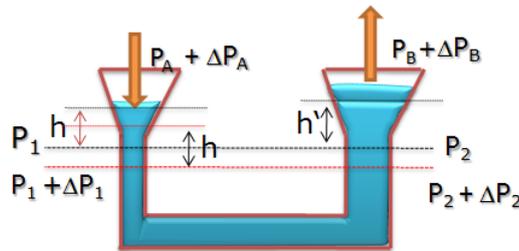


- ✓ Les surfaces libres des vases communicants sont sur un même plan horizontal

Surface horizontale \equiv Egalité de pression



➤ Théorème de Pascal



$$P_1 = P_A + \rho gh$$

$$P_2 = P_B + \rho gh'$$

$$P_1 = P_2$$

$$P_1 + \Delta P_1 = P_A + \Delta P_A + \rho gh \quad \longrightarrow \quad \Delta P_1 = \Delta P_A$$

$$P_1 + \Delta P_1 = P_2 + \Delta P_2 \quad \longrightarrow \quad \Delta P_2 = \Delta P_1 = \Delta P_A$$

$$P_2 + \Delta P_2 = (P_B + \Delta P_B) + \rho gh' \quad \longrightarrow \quad \Delta P_B = \Delta P_2 = \Delta P_A$$

Enoncé :

Dans un fluide incompressible en équilibre, toute variation de pression en un point entraîne la même variation de pression en tout autre point.

On a

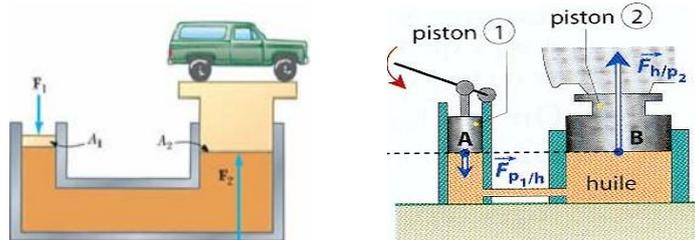
$$p = \frac{F_A}{S_A} = \frac{F_B}{S_B}$$

$$S_B > S_A \Rightarrow F_B = \frac{F_A S_B}{S_A} \Rightarrow F_B \gg F_A$$

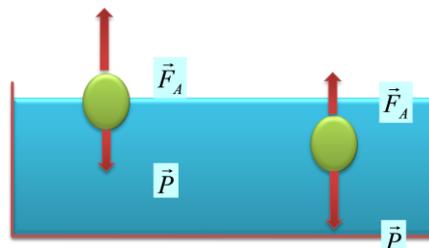
La force appliquée F_A peut être amplifiée en choisissant $S_A \ll S_B$



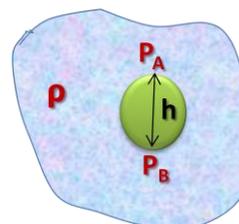
Exemples d'applications de théorème de Pascal : Elévateur hydraulique, Cric hydraulique, presse hydraulique, frein hydraulique, ascenseur



➤ Principe d'Archimède



$P_B = P_A + \rho gh$ ➔ $P_B - P_A = \rho gh$
 ➔ $(P_B - P_A) S = \rho ghS$
 ➔ $F_{ARCH} = \rho gV$



V est le volume du fluide déplacé et égal au volume du corps immergé, ρ sa masse volumique.

La différence de pression entre le haut et le bas du solide engendre une poussée verticale dirigée vers les pressions décroissantes (de bas vers le haut). Elle est appelée *poussée d'Archimède*.

Enoncé (principe d'Archimède)

Tout corps plongé dans un fluide reçoit de la part de ce fluide une force (poussée) verticale, vers le haut dont l'intensité est égale au poids du volume de fluide déplacé (ce volume est donc égal au volume immergé du corps).

$$F_{\text{ARCH}} = \rho_{\text{fluide}} \cdot V_{\text{imm}} \cdot g$$

Poids apparent

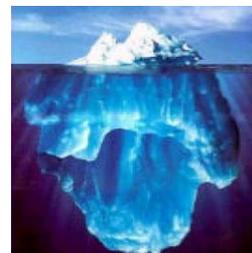
C'est la différence entre le poids réel et la poussée d'Archimède (le poids du corps à l'intérieur du fluide).

$$P_{\text{app}} = P - F_a \quad \rightarrow \quad P_{\text{app}} = V \cdot g (\rho - \rho_{\text{fluide}})$$

$P_{\text{App}} > 0$  Corps immergé

$P_{\text{App}} < 0$  Corps flotté

$P_{\text{App}} = 0$  Corps suspendu



4- Statique des fluides compressibles

De façon générale, il s'agit des gaz puisque leur densité dépend de la pression. Pour simplifier l'étude, on prendra le cas d'un gaz parfait :

$$pV = nRT$$

Soit : $p = \frac{nRT}{V}$, Or : $\rho = \frac{m}{V} = \frac{nM}{V} \Rightarrow \frac{n}{V} = \frac{\rho}{M}$ *masse molaire du gaz*

D'où : $p = \frac{\rho RT}{M} \Rightarrow \rho = \frac{M}{RT} p$ *la masse volumique en fonction de la pression \Rightarrow compressibilité*

En partant de l'équation fondamentale de la statique des fluides comme suit :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho(p)g \Rightarrow \frac{dp}{dz} = -\frac{M}{RT} pg \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{M}{RT} g dz$$

Il faut donc intégrer :

$$\int \frac{dp}{p} = - \int \frac{M}{RT} g dz + C^{te}$$

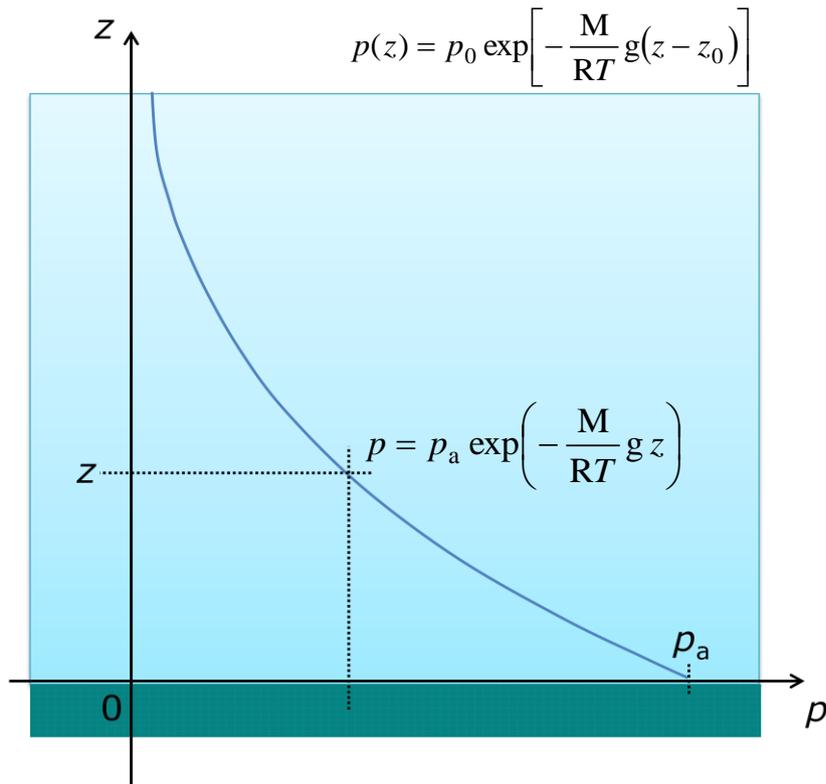
Constante si la température est homogène

Soit : $\ln p = -\frac{M}{RT} g z + C^{te}$

Donc : $p(z) = C^{te} \exp\left(-\frac{M}{RT} g z\right)$ où la constante se définit par rapport à la pression pour un niveau de référence.

Ainsi, si $p = p_0$ en $z = z_0$, alors : $p_0 = C^{te} \exp\left(-\frac{M}{RT} g z_0\right) \Rightarrow C^{te} = p_0 \exp\left(\frac{M}{RT} g z_0\right)$

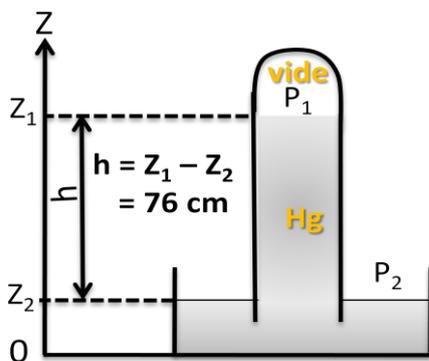
Donc : $p(z) = p_0 \exp\left[-\frac{M}{RT} g(z - z_0)\right]$



Application: Mesure de la pression atmosphérique (Baromètre de Torricelli)

La pression atmosphérique est la force qu'exerce l'air atmosphérique par unité de surface.

Un tube en verre rempli de mercure puis retourné sur une cuve pleine de mercure également. Le niveau de mercure dans le tube se stabilise à une hauteur indépendante de la forme et de l'inclinaison du tube. La pression P_2 qui s'exerce sur le mercure de la cuve est la pression atmosphérique.



$P_1 = 0$

$P_2 =$ pression atmosphérique.

$\rho_{\text{mercure}} = 13600 \text{ kg.m}^{-3}$

$P_2 - P_1 = \rho \cdot g \cdot h = 13600 \times 9.81 \times 0,76 = 101396.16 \text{ Pa}$

Chapitre III : Cinématique Des Fluides

La cinématique des fluides concerne la description des écoulements sans avoir recours au calcul des forces mises en jeu.

1. Descriptions de mouvement

➤ Description de *Lagrange*

Cette description de l'écoulement consiste à suivre une particule donnée au cours de son mouvement au sein du fluide. Avec cette description tous les inconnues du problème (position, vitesse, pression...etc.) s'écrivent en fonction de $(x_0; y_0; z_0; t)$ qui sont les coordonnées de la position de particule fluide dans sa configuration initiale $t=0s$, et t représente le temps.

Pour connaître parfaitement l'évolution du fluide, il faut déterminer les 3 fonctions suivantes:

$$x = x(x_0; y_0; z_0; t)$$

$$y = y(x_0; y_0; z_0; t)$$

$$z = z(x_0; y_0; z_0; t)$$

$(x_0; y_0; z_0; t)$ sont les variables de Lagrange.

➤ Description d'*Euler*

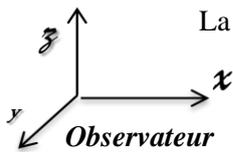
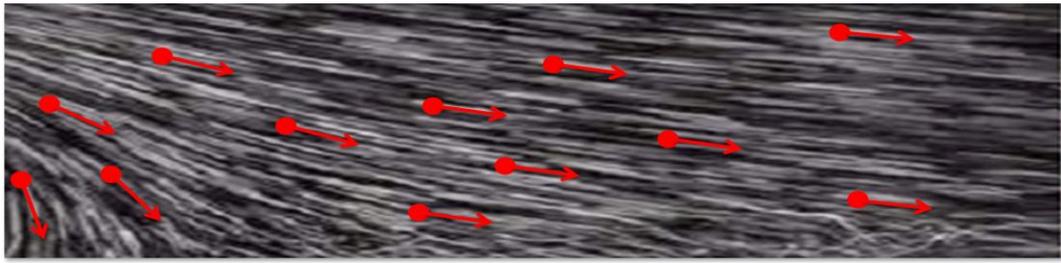
Cette description consiste à connaître la vitesse des particules au cours du temps à un endroit donné déterminé par ses coordonnées, par exemple cartésiennes x, y, z .

L'écoulement du fluide est décrit au moyen d'un champ de vecteurs vitesse à chaque instant t .

Ainsi :

$$\vec{V}(t) = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

$$v_x = v_x(x, y, z), \quad v_y = v_y(x, y, z), \quad v_z = v_z(x, y, z)$$



La vitesse en tous points (x,y,z) de l'écoulement (Champ de vitesse)

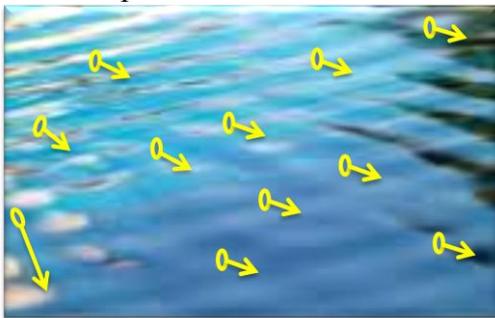
« Photo instantanée de l'écoulement »

2. Ecoulement permanent

Un écoulement est dit *permanent* (ou stationnaire) lorsque le champ de vecteurs vitesse \vec{v} ne varie pas dans le temps. Les grandeurs physiques de l'écoulement ne dépendent pas explicitement du temps.

Écoulement stationnaire :

Champ de vitesse à l'instant t

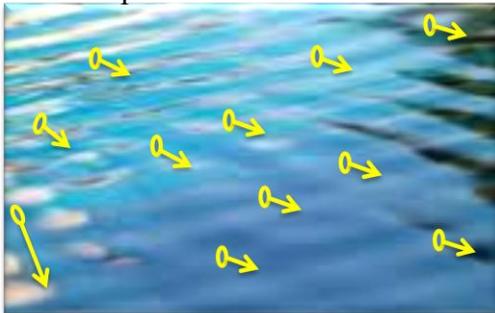


Champ de vitesse à l'instant t'



Écoulement instationnaire :

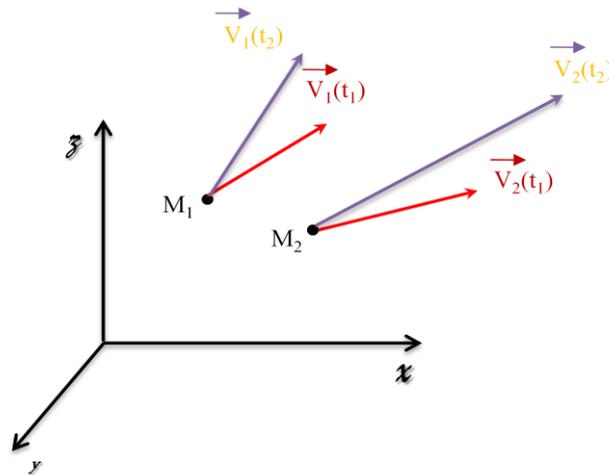
Champ de vitesse à l'instant t



Champ de vitesse à l'instant t'



Soit la vitesse $V(t)$ associée au point M évolue au cours du temps.



Les grandeurs physiques de l'écoulement sont donc définies en fonction des coordonnées de l'espace x, y, z et de temps t . Ces coordonnées représentent les variables d'Euler.

La description eulérienne est plus adaptée que la description lagrangienne, la connaissance du champ des vitesses étant suffisante pour la description du fluide en mouvement.

3. Dérivée Particulaire

Considérons la fonction scalaire $\Phi(x,y,z,t)$ une grandeur physique caractéristique du fluide au point de coordonnées x, y, z et au temps t .

La particule fluide au temps $t+dt$ sera au point de coordonnées $x+dx, y+dy, z+dz$. La variation de la fonction sera donc égale à :

$$d\Phi = \Phi(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt) - \Phi(x, y, z, t)$$

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial\Phi}{\partial t} dt$$

Développement en premier ordre

Puisque

$$dx = v_x dt$$

$$dy = v_y dt$$

$$dz = v_z dt$$

Donc :

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x} v_x dt + \frac{\partial\Phi}{\partial y} v_y dt + \frac{\partial\Phi}{\partial z} v_z dt + \frac{\partial\Phi}{\partial t} dt$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x} v_x + \frac{\partial\Phi}{\partial y} v_y + \frac{\partial\Phi}{\partial z} v_z$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \vec{v} \text{grad}\Phi$$

La dérivée $\frac{d\Phi}{dt}$ que l'on note $\frac{D\Phi}{Dt}$ est la dérivée particulaire, (liée à la particule), est égale

à:

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \vec{v} \text{grad}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + v_x \frac{\partial\Phi}{\partial x} + v_y \frac{\partial\Phi}{\partial y} + v_z \frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

Définition

La dérivée particulaire d'une grandeur physique définie par le champ $\Phi(M,t)$ est la dérivée par rapport au temps d'une grandeur attachée aux particules de fluide (masse volumique ou vitesse par exemple).

Cette dérivée apparaît comme la somme de deux termes :

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial\Phi}{\partial t}}_{\text{temporel}} + \underbrace{v_x \frac{\partial\Phi}{\partial x} + v_y \frac{\partial\Phi}{\partial y} + v_z \frac{\partial\Phi}{\partial z}}_{\text{convectif}}$$

Qualifié de temporel, est du au caractère instationnaire de l'écoulement.

Qualifié de convectif, est du à la non-uniformité de l'écoulement représente le transport de la quantité de F par le champ de vitesses

Exemple :

Un écoulement bidimensionnel d'un fluide est défini en coordonnées Lagrangiennes par:

$$x = x_0 e^{kt} \quad y = y_0 e^{-kt}$$

Où x_0 , y_0 et k sont des constantes.

1. Trouver les composantes de la vitesse.
3. Écrire la vitesse en coordonnées Eulériennes.
4. L'écoulement est-il stationnaire?
5. Déterminer les composantes de l'accélération par deux méthodes

La réponse :

1. Les composantes de la vitesse :

$$\dot{x} = x_0 k e^{kt} \quad \dot{y} = -y_0 k e^{-kt}$$

2. Le champ de vitesse en coordonnées eulériennes :

$$u = \dot{x} = k x \quad , \quad v = \dot{y} = -k y$$

3. L'écoulement est stationnaire car la dérivée du champ de vitesse (dans l'expression eulérienne) par rapport au temps est nulle

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \vec{i} + \frac{\partial v}{\partial t} \vec{j} = 0$$

4. Calcul de l'accélération

- A partir des coordonnées de Lagrange :

$$a_x = \frac{\partial \dot{x}}{\partial t} = x_0 k^2 e^{kt}$$

$$a_y = \frac{\partial \dot{y}}{\partial t} = -y_0 k^2 e^{-kt}$$

L'expression eulérienne de l'accélération :

$$a_x = k^2 x$$

$$a_y = k^2 y$$

- A partir des coordonnées d'Euler :

Nous devons utiliser la dérivée particulaire pour déterminer l'accélération à partir de l'expression eulérienne de vitesse

$$a_x = \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + v_x \frac{\partial u}{\partial x} + v_y \frac{\partial u}{\partial y} + v_z \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v_x \frac{\partial v}{\partial x} + v_y \frac{\partial v}{\partial y} + v_z \frac{\partial v}{\partial z}$$

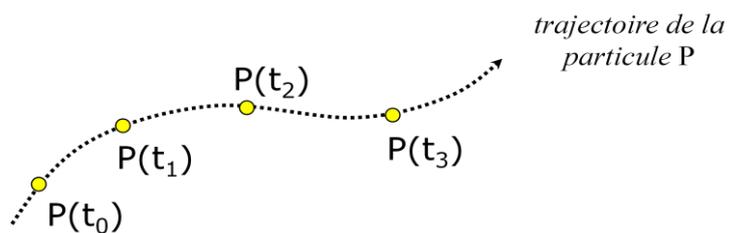
→

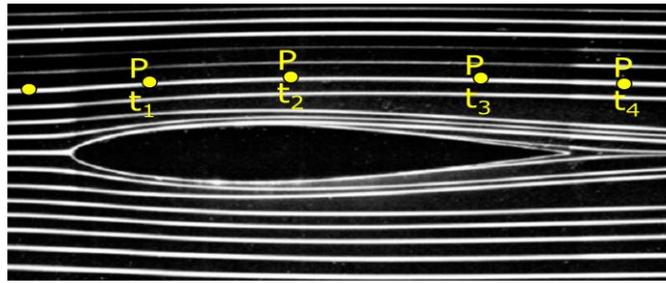
$$a_x = k^2 x$$

$$a_y = k^2 y$$

4. La trajectoire

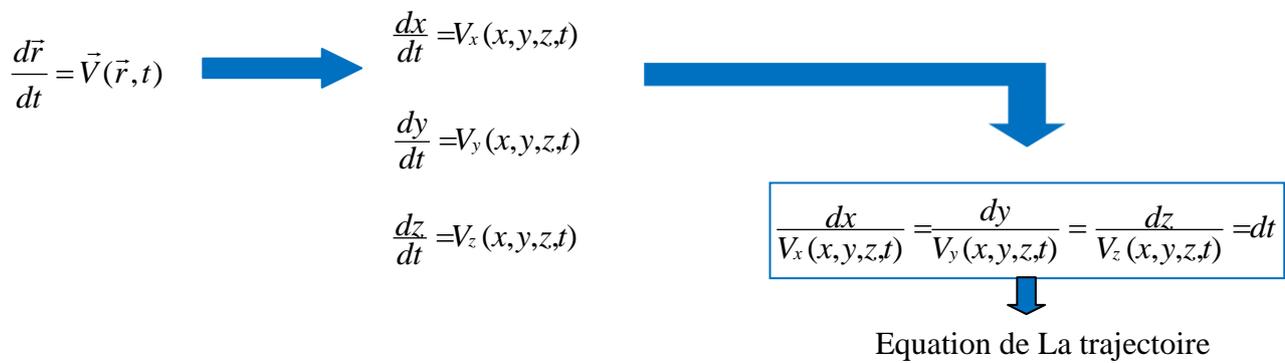
L'ensemble des positions successives occupées par une particule, constituent ce qu'on appelle la trajectoire de cette particule.





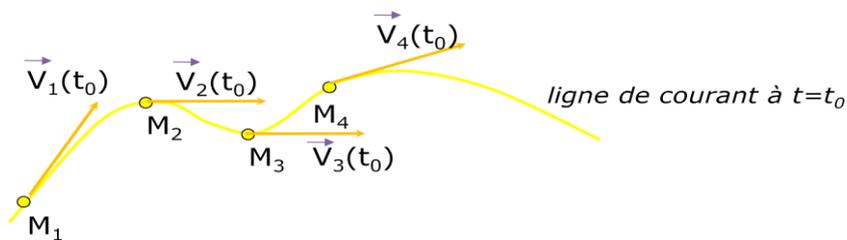
Visualisation d'une trajectoire en utilisant des traceurs (colorants ou fumées) et en prenant une photo avec un long temps pose.

Equation de La trajectoire



5. Ligne de courant

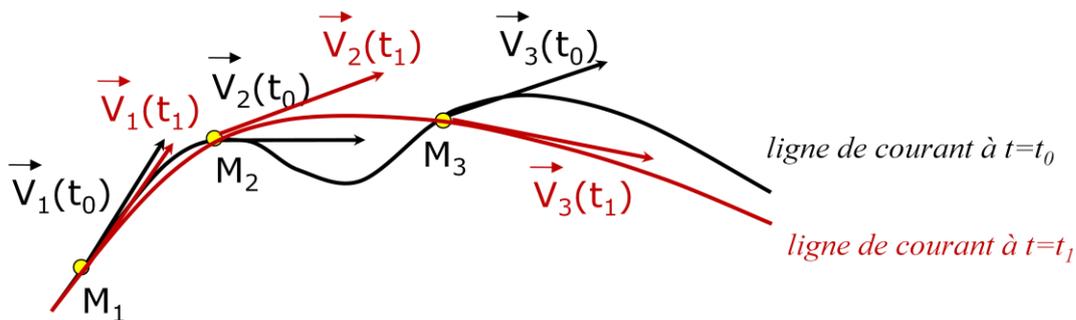
Dans la description d'*Euler*, on appelle ligne de courant la courbe qui, en chacun de ses points, est tangente aux vecteurs vitesses.



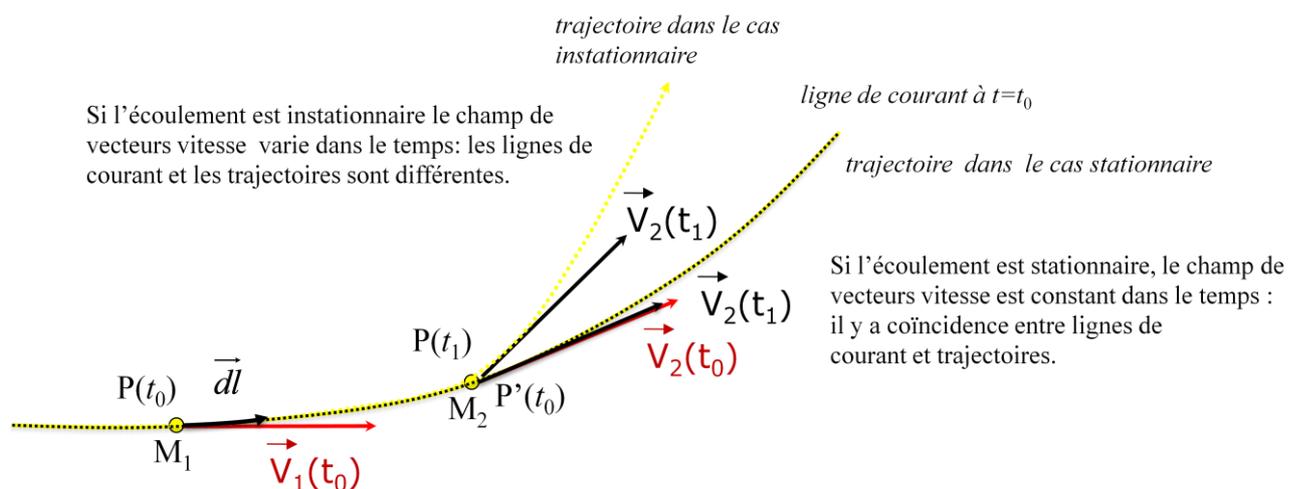


Ligne de courant des fumées

Remarque : Les lignes de courant évoluent dans le temps, au même titre que le champ de vecteurs vitesses



Remarque : il ne faut pas confondre *ligne de courant* et *trajectoire*. Ce sont deux notions bien différentes.



Equation des lignes de courant

Soit \vec{dl} vecteur élémentaire d'une ligne de courant

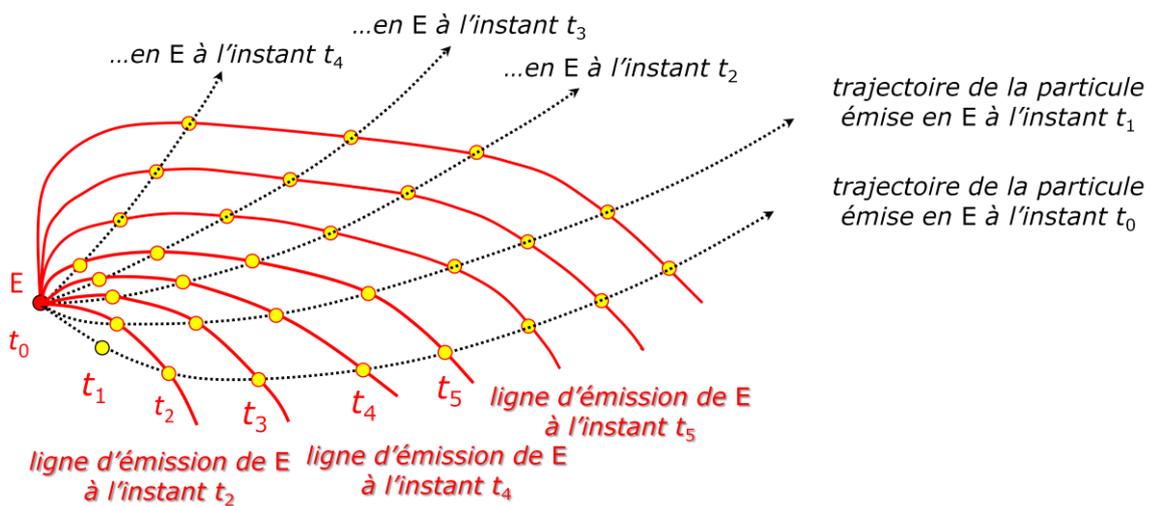
$$\vec{V} // \vec{dl} \implies \vec{V} \otimes \vec{dl} = 0 \implies \begin{cases} V_y dz - V_z dy = 0 \\ V_z dx - V_x dz = 0 \\ V_x dy - V_y dx = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{dx}{V_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{V_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{V_z(x, y, z, t)}}$$

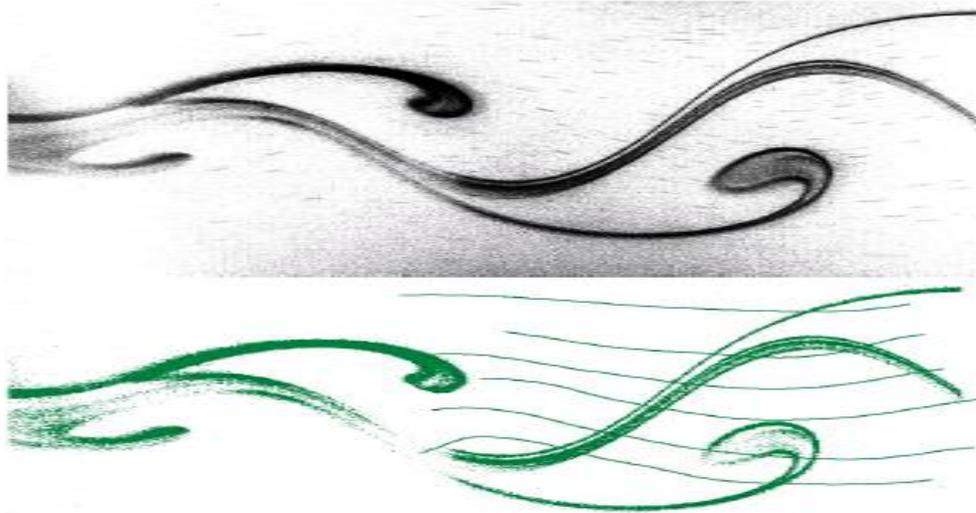
Equation des lignes de courant

6. Ligne d'émission

Toutes les particules qui sont passées par un même point E sont situées, à l'instant t , sur une courbe appelée « ligne d'émission » relative au point E.



Pratiquement : une ligne d'émission peut se visualiser en fixant une source colorante au point E : les courbes colorées correspondent alors aux lignes d'émission



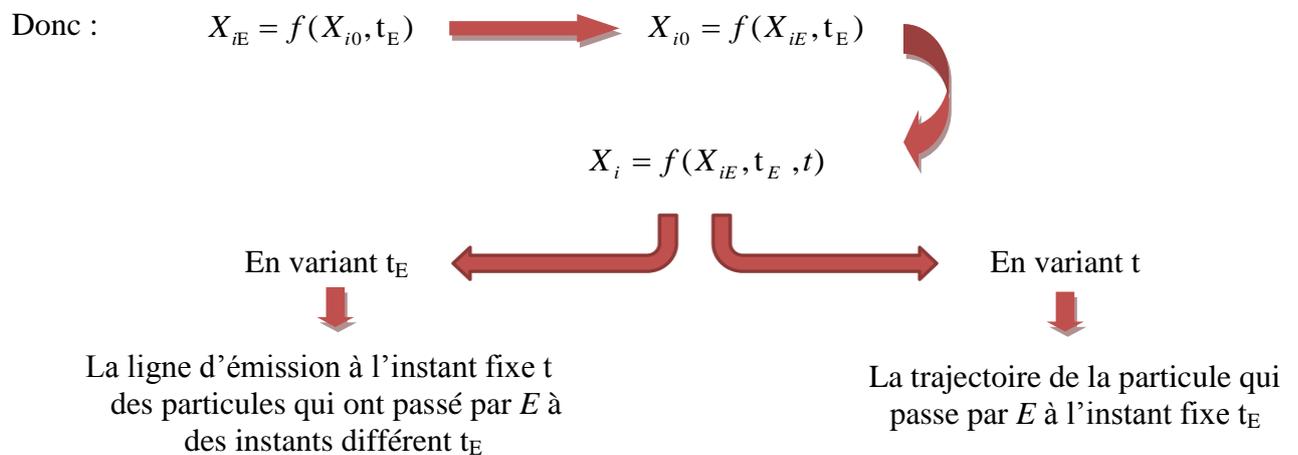
Ecoulement instationnaire derrière un cylindre; En haut, visualisation simultanée des lignes d'émission et lignes de courant; En bas, lignes d'émission extraites de l'image et quelques lignes de courant reconstruites

Equation des lignes d'émission

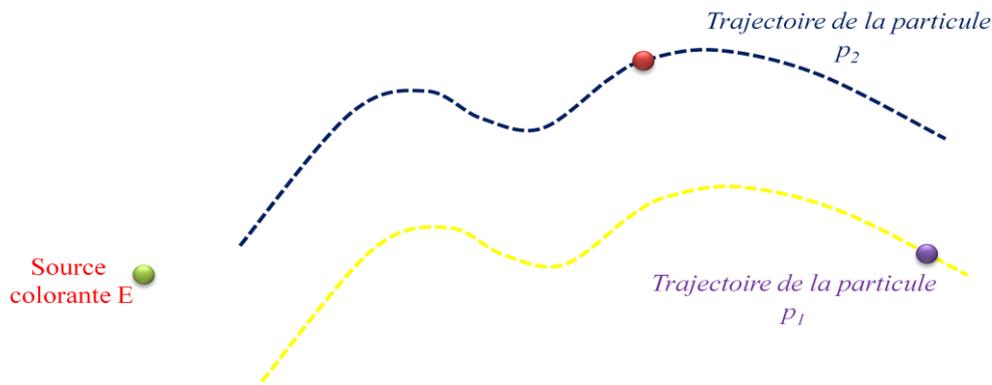
Les équations paramétriques des trajectoires sont :

$$X_i = f(X_{i0}, t)$$

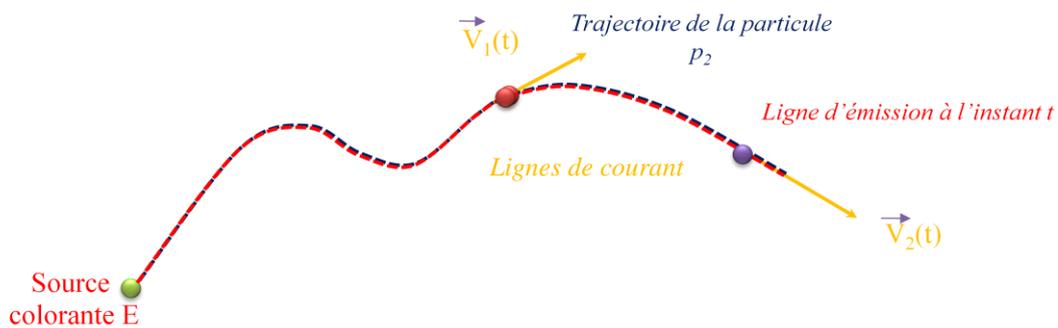
le point d'émission $E(X_{iE})$, vérifier les équations paramétriques des trajectoires des particules qui sont passées à un instant t_E par ce point.



Dans le cas d'un écoulement permanent (ou stationnaire) les lignes d'émission coïncident avec les trajectoires et les lignes de courant.



Dans l'écoulement permanent Les trajectoires ont la même forme :



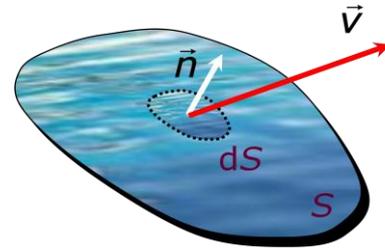
Lignes de courant ≡ Trajectoires ≡ Lignes d'émission

7. Débit massique et débit volumique

Le Débits

A travers la surface S , le débit massique de fluide est donné par :

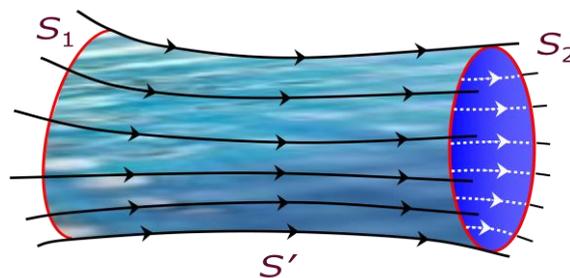
$$q_m = \int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$



A travers la surface S , le débit volumique de fluide est donné par :

$$q_v = \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

Toutes les lignes de courant s'appuyant sur une même courbe fermée constituent une surface (S') appelée « tube de courant ».



- Si l'écoulement est permanent (le tube n'évolue pas dans le temps), alors le débit massique est conservé : $q_m(S_1) = q_m(S_2)$
- Si le fluide est incompressible, alors le débit volumique est conservé.

8. Le mouvement d'un élément de fluide tenseur de déformation

Au sein de l'écoulement, chaque particule fluide subit des changements de *position*, d'*orientation* et de *forme*.

Afin d'analyser ces changements, nous considérons deux points voisins d'un même fluide $M(x, y, z)$ et $M'(x+dx, y+dy, z+dz)$ et leurs vitesses respectives soient $\vec{v}_M, \vec{v}_{M'}$ à un instant t .

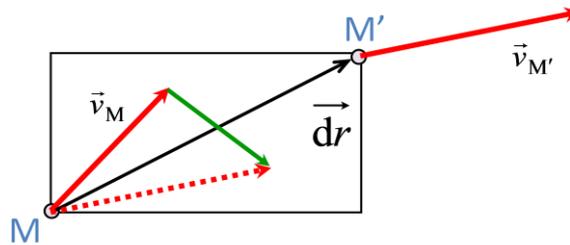
Soient $\vec{v}_M(u, v, w)$ la vitesse au point M et $\vec{v}_{M'}(u', v', w')$ la vitesse au point M' .

Exprimons $\vec{v}_{M'}$ en fonction de \vec{v}_M et de $\vec{dr} = \overrightarrow{MM'}$:

$$\vec{v}_{M'} = \vec{v}(\vec{r} + \vec{dr}) = \vec{v}(\vec{r}) + \vec{dv}$$

\vec{v}_M Accroissement de vitesse

$$\vec{v}_{M'} = \vec{v}(\vec{r} + \vec{dr}) = \vec{v}(\vec{r}) + \vec{dv}$$



Effectuons un développement au premier ordre des 3 composantes de la vitesse :

$$\begin{cases} u' = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ v' = v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\ w' = w + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(\vec{r} + \vec{dr}) = \vec{v}(\vec{r}) + \overline{\overline{G}} \vec{dr}$$

$$\overline{\overline{G}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Tel que $\overline{\overline{G}}$ est le Tenseur des taux de déformation

Signification des éléments tensoriels

Quelque soit le tenseur, il est toujours possible de le décomposer en deux, pour en faire la somme d'un *tenseur symétrique* et d'un *tenseur antisymétrique* :

$$\overline{G} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}}_{\text{Symétrique}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Antisymétrique}}$$

\overline{e} $\overline{\omega}$

Partie symétrique

On peut décomposer \overline{e} en deux tenseurs: $\overline{e} = \overline{T} + \overline{D}$

$$\overline{e} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & 0 \end{pmatrix}$$



Tenseur des termes diagonaux
 \overline{T}



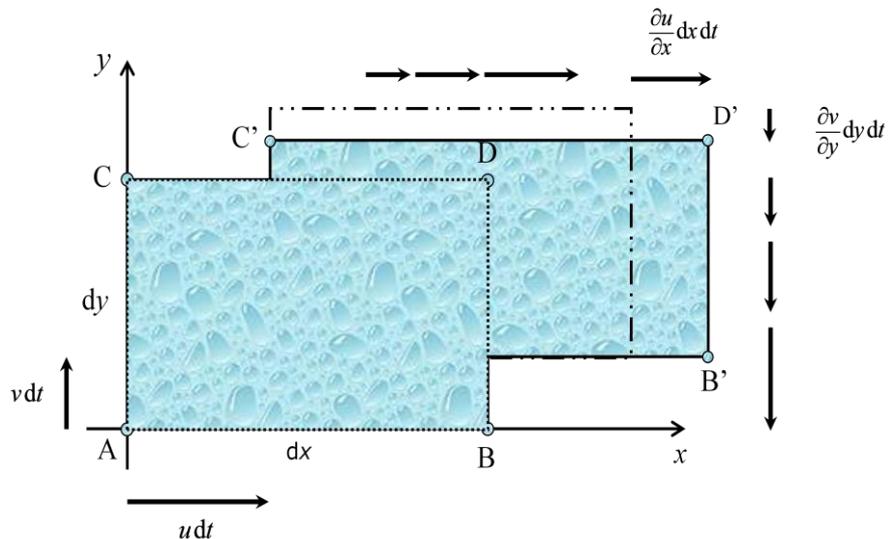
Tenseur des termes hors-diagonaux
 \overline{D}

Tenseur des termes diagonaux

$$\bar{\bar{T}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

On remarque que dans ce cas, la composante u suivant x de la vitesse varie en fonction de x , la composante v suivant y de la vitesse varie en fonction de y , et la composante w suivant z de la vitesse varie en fonction de z .

L'analyse du mouvement d'une particule dans un écoulement plan (\bar{e}_x, \bar{e}_y) montre :



$\frac{\partial u}{\partial x}$ taux d'élongation suivant x

$\frac{\partial v}{\partial y}$ taux d'élongation suivant y

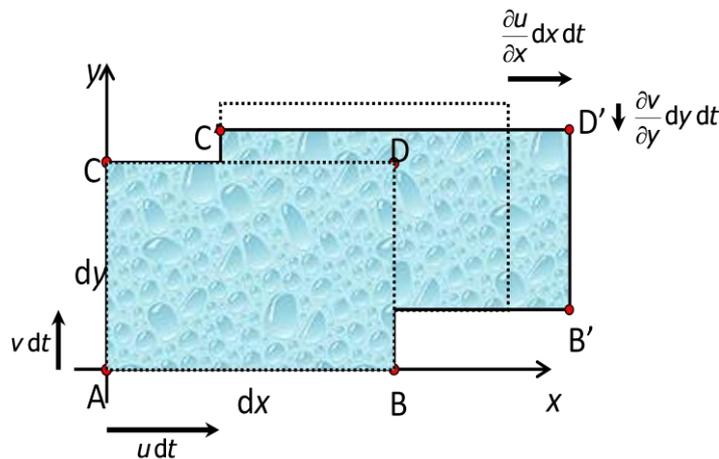
La déformation de la particule est une *élongation* (ou *contraction*)

Généralisation à 3D

$$\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)}_{\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \text{Tr}(\vec{e}) = \text{Tr}(\vec{G})} dt = \frac{dV}{V}$$

la variation relative de volume d'une particule fluide

La trace de \vec{G} correspond au taux d'expansion du volume.



Remarque

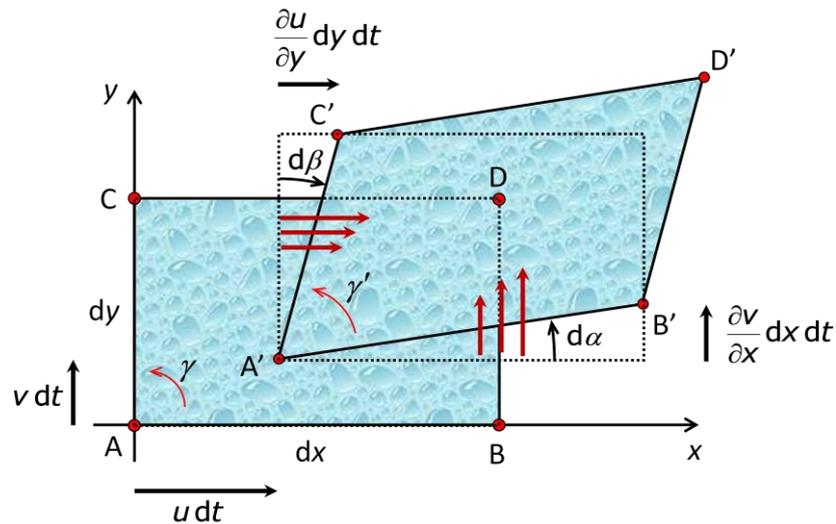
Si le fluide est incompressible et que l'écoulement est conservatif, alors $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 = dV/V$ dans ce cas, il n'y a pas de variation de volume.

Tenseur des termes hors-diagonale

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que dans ce cas, la composante u suivant x de la vitesse varie avec y, z , la composante v suivant y de la vitesse varie avec x, z et la composante w suivant z de la vitesse varie avec x, y

Le cas d'un écoulement plan (\vec{e}_x, \vec{e}_y)



Une Déformation *angulaire* de la particule

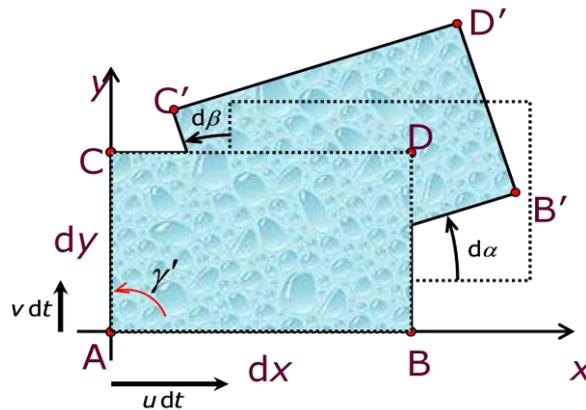
Remarque

Le fait que le tenseur est symétrique il s'agit d'une déformation angulaire pure

Partie antisymétrique

$$\bar{\bar{\omega}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & 0 \end{pmatrix}$$

Il s'agit bien d'une rotation autour de l'axe z



On peut alors définir une vitesse angulaire de rotation suivant z :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} [\vec{\nabla} \wedge \vec{v}]_z$$

En généralisant, on définit :

Le vecteur vitesse angulaire de rotation ou vecteur tourbillon

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$$

Le rotationnel de la vitesse v est

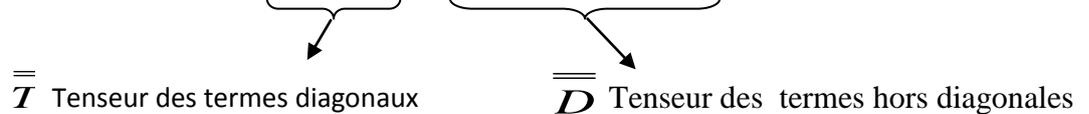
$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \begin{cases} \partial w / \partial y - \partial v / \partial z \\ \partial u / \partial z - \partial w / \partial x \\ \partial v / \partial x - \partial u / \partial y \end{cases}$$

Récapitulation :

$$\vec{v}(\vec{r} + d\vec{r}) = \vec{v}(\vec{r}) + d\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}) + \overline{\overline{G}} d\vec{r}$$

$\overline{\overline{G}} = \overline{\overline{e}} + \overline{\overline{\omega}}$: Tenseur des taux de déformation

$\overline{\overline{e}}$: Taux de déformations pures (élongation + déformation angulaire)



$\overline{\omega}$: tenseur des taux de rotations pures

$$\overline{G} \overrightarrow{dr} = \overline{e} \overrightarrow{dr} + \overline{\omega} \overrightarrow{dr} = \underbrace{\overline{e} \overrightarrow{dr}}_{\substack{\text{Déformations} \\ \text{pures}}} + \underbrace{\overline{\Omega} \wedge \overrightarrow{dr}}_{\substack{\text{Rotations} \\ \text{pures}}}$$

9. Écoulement rotationnel ou tourbillonnaire

C'est l'écoulement pour lequel, il existe un champ de vecteur tourbillon associé au champ de vitesse ;

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \frac{1}{2} \text{rot} v \neq 0$$

Ligne tourbillon

C'est une ligne tangente en chacun de ces points au vecteur tourbillon. L'ensemble des lignes tourbillons s'appuyant sur une courbe fermée, définit un tube tourbillon

Filet tourbillon

Si la section droite de tube tourbillon est très petite on obtient un filet tourbillon. Les lignes de tourbillon sont solution des équations :

$$\frac{dx}{\Omega_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{\Omega_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{\Omega_z(x, y, z, t)}$$

avec $\vec{\Omega} = \Omega_x \vec{i} + \Omega_y \vec{j} + \Omega_z \vec{k}$

Vortex

C'est la rotation des particules sur elle-même (l'écoulement de Karman à l'arrière d'un obstacle).

10. Écoulement irrotationnel ou à potentiel des vitesses

On dit que l'écoulement est irrotationnel ou à potentiel de vitesses lorsque les particules fluides ne subissent pas de rotations pures :

$$\vec{\omega} = \vec{0} \quad \vec{\omega} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\Omega} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0}$$

Donc l'écoulement est irrotationnel lorsque $\vec{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$ en tout point du fluide.

Exercice

Un écoulement bidimensionnel d'un fluide est défini en coordonnées Lagrangiennes par :

$$x = x_0 e^{kt} \quad y = y_0 e^{-kt}$$

Où x_0 , y_0 et k sont des constantes.

1. Déterminer la trajectoire d'une particule de fluide.
2. Trouver les composantes de la vitesse.
3. Écrire la vitesse en coordonnées Eulériennes.
4. l'écoulement est-il stationnaire?
5. Quelle forme de déformation subit cet écoulement?
6. Déterminer le tenseur des taux de déformation.
7. l'écoulement est-il rotationnaire?
8. Déterminer les lignes de courant
9. Déterminer les lignes d'émissions correspondantes à $S(a_s, b_s)$

La réponse :

1. Les lignes de la trajectoire :

$$\begin{array}{l} x = x_0 e^{kt} \\ y = y_0 e^{-kt} \end{array} \quad \longrightarrow \quad e^{-kt} = \frac{y}{y_0}$$

$$x y = x_0 y_0$$

2. Les composantes de la vitesse :

$$\dot{x} = x_0 k e^{kt} \quad \dot{y} = -k y_0 e^{-kt}$$

3. La vitesse en coordonnées Eulériennes :

$$u = k x \quad v = -k y$$

4. Type d'écoulement

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{L'écoulement est stationnaire}$$

5. Type de déformation

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Déformation pure (élongation ou contraction)}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = k - k = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Conservation du volume ; l'élongation dans} \\ \text{une direction est récompensé par une réduction} \\ \text{dans l'autre direction} \end{array}$$

6. Tenseur de déformation de l'écoulement :

$$\overline{\overline{G}} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. L'écoulement n'est pas rotationnel puisque $\overline{\overline{\omega}} = \overline{\overline{0}} \Rightarrow \vec{\Omega} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

8. Les lignes de courant :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad \text{à } t \text{ constant}$$

$$\frac{dx}{kx} = \frac{dy}{-ky} \quad \Longrightarrow \quad x y = x_0 y_0$$

9. Les lignes d'émissions correspondantes à $S(a_s, b_s, t_s)$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 e^{kt} \\ y = y_0 e^{-kt} \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} a_s = x_0 e^{kts} \\ b_s = y_0 e^{-kts} \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_0 = a_s e^{-kts} \\ y_0 = b_s e^{kts} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a_s e^{-kts} e^{kt} \\ y = b_s e^{kts} e^{-kt} \end{array} \right. \quad ; \quad t_s \text{ variable, } t \text{ est un constant}$$

$$\Longrightarrow \quad x y = a_s b_s \quad ; \quad \text{équation indépendante de } t_s$$

Remarque

On remarque que les lignes de trajectoire, de courant et d'émission sont identiques lorsque l'écoulement est stationnaire.

11. Fonction de potentiel

Un écoulement irrotationnel signifie que $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$ or d'un point de vue mathématique, la relation $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \varphi) = \vec{0} \quad \forall \varphi$ est toujours vraie. il existe donc une fonction scalaire φ telle que:

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$$

Ceci veut dire que dans un écoulement irrotationnel le champ de vitesse est dérivé d'un potentiel scalaire φ . L'écoulement est dit écoulement potentiel et la fonction φ est appelée fonction de potentiel des vitesses

12. Propriétés du potentiel des vitesses

Il est alors possible d'exprimer les composantes du vecteur vitesse à partir du potentiel des vitesses :

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \varphi \Rightarrow v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Si on suppose qu'en outre le fluide est incompressible, on doit vérifier :

$$\vec{\nabla} \vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Ce qui conduit à la relation :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow \Delta \varphi = 0 \quad \text{Équation de Laplace}$$

Il faut en conclure que le potentiel des vitesses doit vérifier l'équation de Laplace. Lorsqu'un écoulement est plan, l'équation $\varphi(x, y) = C^{\text{te}}$ définit, dans le plan de l'écoulement, une courbe appelée « équipotentielle ». Le long de cette courbe, $\varphi(x, y) = C^{\text{te}}$, donc: $d\varphi = 0$

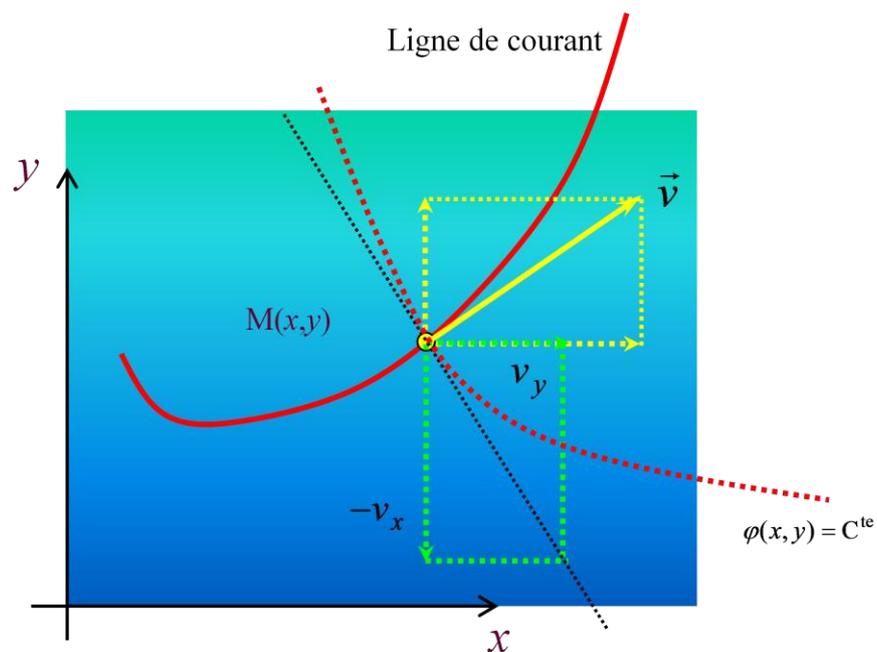
Or, la différentielle peut s'écrire :

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy$$

Et comme le long d'une équipotentielle $d\varphi = 0$, alors :

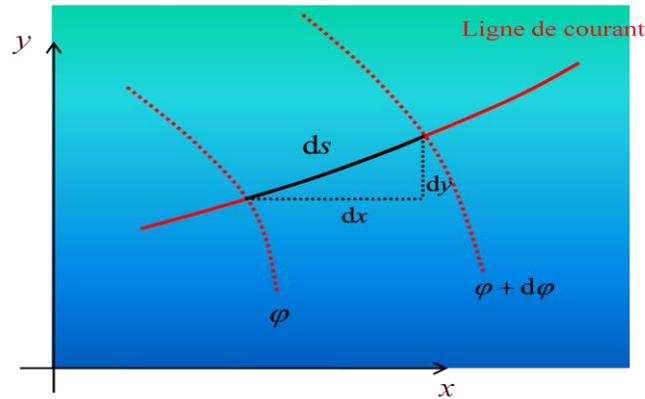
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0 \quad \longrightarrow \quad v_x dx + v_y dy = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{v_x}{v_y} \quad \text{Relation qui est}$$

vérifiée en tout point de l'équipotentielle



En tout point $M(x,y)$ du plan de l'écoulement, la *ligne de courant* et l'*équipotentielle* sont *orthogonales*.

Calcul de la longueur d'un élément d'arc le long d'une ligne de courant



$$ds_{\Psi=C^{\text{te}}} = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad , \quad \vec{v} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = v_x dx + v_y dy$$

Puisque $\vec{v} // \vec{ds}$ donc :

$$d\varphi = \vec{v} \vec{ds} = v ds$$

Alors :

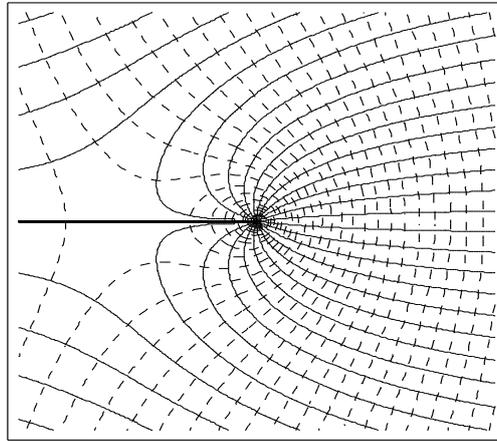
$$ds_{\Psi=C^{\text{te}}} = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{d\varphi}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

Soit :

$$ds_{\Psi=C^{\text{te}}} = \frac{d\varphi}{v}$$

$ds_{\Psi=C^{\text{te}}}$ est la distance entre deux équipotentiels, elle est inversement proportionnelle à la vitesse de l'écoulement.

Si on choisit de représenter les équipotentielles avec un écart $d\phi = C^{te}$, alors la distance entre les équipotentielles sera d'autant plus faible que la vitesse de l'écoulement est grande (et inversement).



13. Fonction de courant

Si l'écoulement d'un fluide incompressible est conservatif, alors l'équation de continuité s'écrit :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

Or, d'un point de vue mathématique, la relation $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ est toujours vraie. On

est alors en droit de définir un vecteur \vec{A} tel que :

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

où \vec{A} correspond donc à un potentiel vecteur. Il s'en suit :

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{cases} v_x = \partial A_z / \partial y - \partial A_y / \partial z \\ v_y = \partial A_x / \partial z - \partial A_z / \partial x \\ v_z = \partial A_y / \partial x - \partial A_x / \partial y \end{cases}$$

Si l'on considère un écoulement dans le plan \perp à Oz , et donc invariant par translation suivant z , alors :

$$v_z = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0$$

$$\text{D'où : } v_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} \quad \text{et} \quad v_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x}$$

Donc, dans le plan (\vec{e}_x, \vec{e}_y) , la vitesse est en tout point définie au moyen de la seule grandeur scalaire $A_z(x, y)$.

On peut alors poser : $A_z(x, y) = \Psi(x, y)$ *fonction de courant*

$$\text{Et } \begin{cases} v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{cases} \text{ constitue ce qu'on appellera le } \textit{champ de vitesses}.$$

Remarque :

En coordonnées cylindriques, si $v_z = 0$ et $\frac{\partial}{\partial z} = 0$, alors on a :

$$\begin{cases} v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\ v_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \end{cases} \quad \text{où} \quad \Psi = \Psi(r, \theta)$$

14. Propriétés de la fonction de courant

1) $d\Psi$ est une différentielle totale exacte

Pour un fluide incompressible et conservatif (conservation de masse) on a $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$

Alors :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

et comme $v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$ et $v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$

Alors :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} = 0$$

Donc $d\Psi$ est une *différentielle totale exacte* :

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy$$

Cela signifie que $d\Psi$ possède une seule et unique primitive :

$$\int_A^B d\Psi = \Psi_B - \Psi_A$$

2) Dans le plan (x,y) , l'ensemble des points pour lesquels la valeur de Ψ est constante représente une ligne de courant.

$$\Psi(x, y) = C^{te} \Leftrightarrow y(x) \text{ est une courbe le long de laquelle } d\Psi = 0$$

Sur cette courbe, on doit alors vérifier que :

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = 0$$

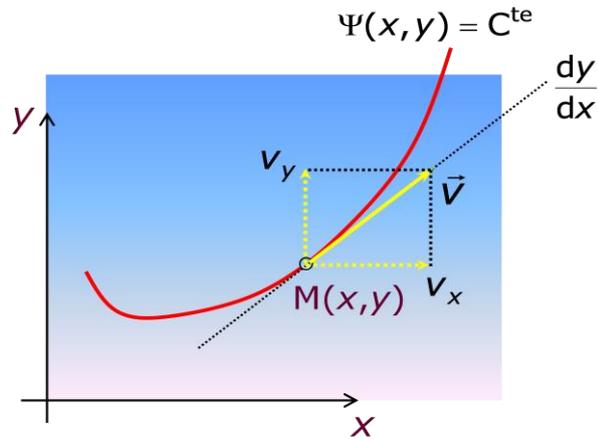
Soit :

$$-v_y dx + v_x dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x}$$

↙
↘

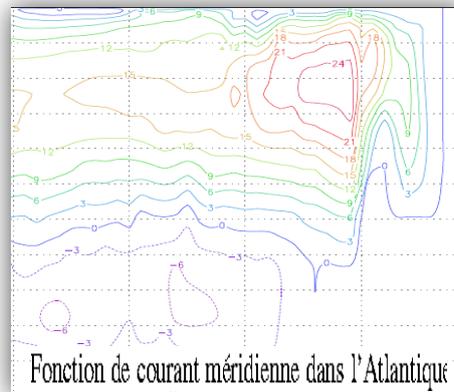
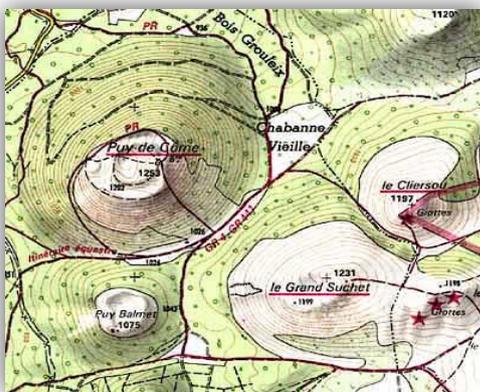
pente de la courbe $y(x)$ en $M(x,y)$
pente du vecteur \vec{V} en $M(x,y)$

Il s'agit de la définition de la *ligne de courant* $\Psi(x, y) = C^{te}$ est donc une ligne de courant



Remarque :

A chaque ligne de courant est associée une constante différente. L'analogie avec les lignes de niveau en cartographie donne:



$$\Psi(x, y) \Leftrightarrow H(x, y) \text{ (Altitude)}$$

$$\Psi(x, y) = C^{te} \Leftrightarrow H(x, y) = C^{te}$$

Ligne de courant

Ligne de niveau

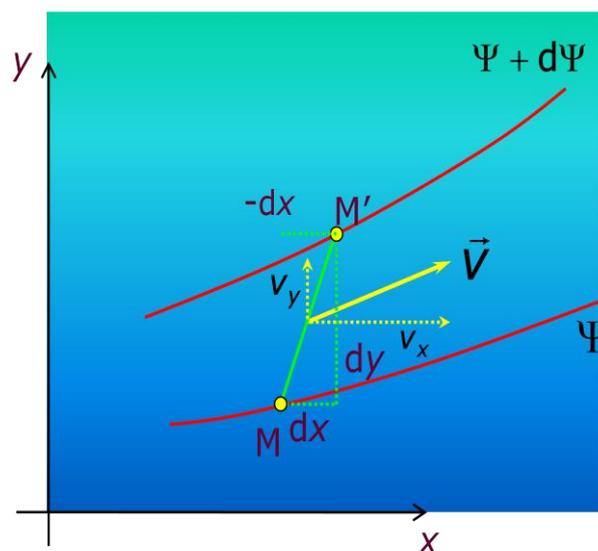
Remarque :

Si l'écoulement est irrotationnel, la fonction de courant doit également vérifier l'équation de Laplace :

$$\vec{v} = \begin{cases} \partial\Psi/\partial y \\ -\partial\Psi/\partial x \\ 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \partial\Psi/\partial y \\ -\partial\Psi/\partial x \\ 0 \end{pmatrix}}_{-\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}} = \vec{0} \Rightarrow \Delta\Psi = 0$$

15. Débits et lignes de courant

Calculons le débit volumique entre 2 lignes de courant infiniment voisines :



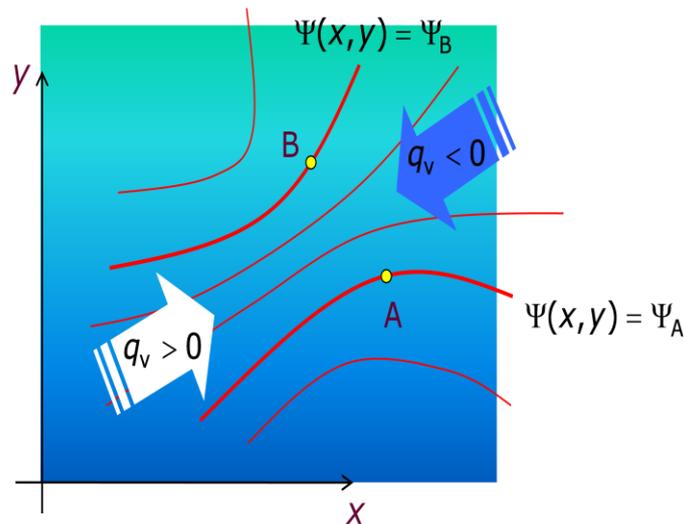
Soit le débit volumique élémentaire entre les points M et M' :

$$dq_v = \underbrace{v_x}_{\frac{\partial\Psi}{\partial y}} dy - \underbrace{v_y}_{-\frac{\partial\Psi}{\partial x}} dx$$

$$\Rightarrow dq_v = \frac{\partial\Psi}{\partial y} dy + \frac{\partial\Psi}{\partial x} dx = d\Psi$$

Donc $dq_v = d\Psi$ par conséquent, entre 2 lignes de courant quelconques, de constantes Ψ_A

et Ψ_B , le débit volumique est donné par :

$$q_v = \int_A^B dq_v = \int_A^B d\Psi = \Psi_B - \Psi_A$$


16. Exemples d'écoulements plans

Un écoulement plan, peut être décrit au moyen d'une fonction de courant $\Psi(x, y)$ et d'un potentiel des vitesses $\varphi(x, y)$.

Écoulement uniforme

Considérons les écoulements plans donnés par les fonctions suivantes:

$$\begin{cases} \varphi(x, y) = Ux \\ \Psi(x, y) = Uy \end{cases}$$

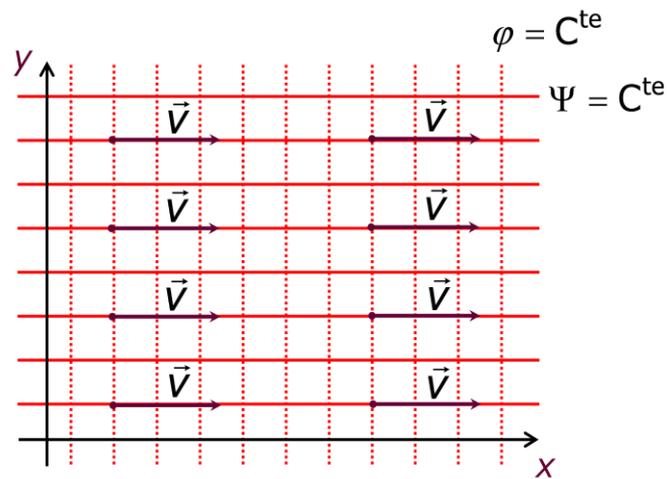
Les lignes de courant sont telles que : $\Psi(x, y) = Uy = C^{te} \Rightarrow y = C^{te} \forall x$ ce sont des droites horizontales.

Les équipotentiels sont telles que : $\varphi(x, y) = Ux = C^{te} \Rightarrow x = C^{te} \forall y$ ce sont des droites verticales.

Détermination du champ de vitesses :

$$\vec{v} = \begin{cases} v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = U \\ v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

La vitesse est uniforme : $\vec{v} = U \vec{e}_x$



Ecoulement uniforme

Ecoulement plan autour d'une source ou d'un puits

Considérons l'écoulement plan modélisé par la fonction de courant et le potentiel des vitesses:

$$\begin{cases} \varphi(r, \theta) = C \ln r \\ \Psi(r, \theta) = C \theta \end{cases} \quad \text{Où } C \text{ une constante réelle.}$$

Les lignes de courant sont telles que : $\Psi(r, \theta) = C \theta = C^{te}$

$\Rightarrow \theta = C^{te} \forall r$ ce sont des droites passant par l'origine.

Les équipotentiels sont telles que : $\varphi(r, \theta) = C \ln r = C^{\text{te}}$

$\Rightarrow r = C^{\text{te}} \forall \theta$ ce sont des cercles concentriques centrés sur l'origine.

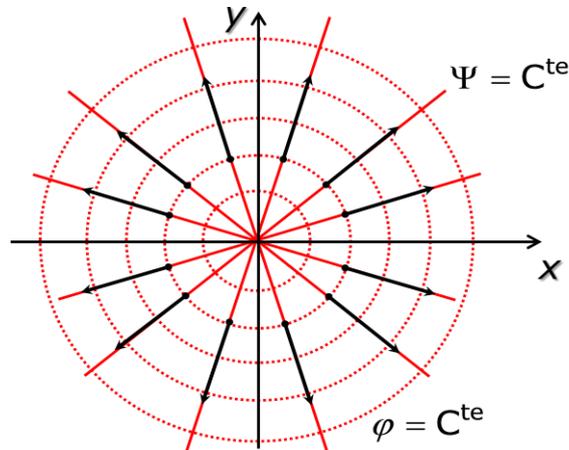
Détermination du champ de vitesses :

$$\vec{v} = \begin{cases} v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\ v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \end{cases}$$

Soit :

$$\vec{v} = \begin{cases} v_r = C/r \\ v_\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \frac{C}{r} \vec{e}_r$$

La vitesse est donc radiale et inversement proportionnelle à la distance à l'origine.



Si $C > 0$, alors l'écoulement est dirigé vers l'extérieur \Rightarrow écoulement *divergent* \Rightarrow *source* à l'origine.

Si $C < 0$, alors l'écoulement est dirigé vers l'origine \Rightarrow écoulement *convergent* \Rightarrow *puits* à l'origine.

Signification physique de la constante C :

Calculons le débit volumique de cet écoulement radial (source ou puits) :

$$q_v = \oiint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS$$

où S est une surface fermée entourant l'origine.

L'écoulement ayant lieu dans un plan \perp à l'axe z , on peut considérer comme surface d'intégration un cylindre de hauteur $\Delta z = 1$, et donc :

$$\oiint_S \dots dS = \int_{\ell} \dots \Delta z d\ell$$

Il reste alors à intégrer sur un cercle de rayon r quelconque, centré sur l'origine.

$$q_v = \Delta z \oint_{\ell} \vec{v} \cdot \vec{n} \, r d\theta = \Delta z r \int_0^{2\pi} \vec{v} \cdot \vec{n} d\theta \quad \text{où} \quad \begin{cases} \vec{v} = C/r \vec{e}_r \\ \vec{n} = \vec{e}_r \end{cases}$$

$$\Rightarrow q_v = \Delta z r \int_0^{2\pi} \frac{C}{r} d\theta = \Delta z r \frac{C}{r} \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi C \Delta z \quad (\text{Débit volumique par unité de hauteur})$$

$$\Rightarrow C = \frac{q_v}{2\pi} \quad q_v > 0 : \text{débit de la source}, \quad q_v < 0 : \text{débit du puits}$$

Vortex ou tourbillon libre

Considérons l'écoulement plan modélisé par la fonction de courant et le potentiel des vitesses:

$$\begin{cases} \varphi(r, \theta) = C\theta \\ \Psi(r, \theta) = -C \ln r \end{cases} \quad \text{où } C \text{ une constante réelle.}$$

Les lignes de courant sont telles que : $\Psi(r, \theta) = -C \ln r = C^{\text{te}}$

$\Rightarrow r = C^{\text{te}} \forall \theta$ ce sont des cercles concentriques centrés sur l'origine.

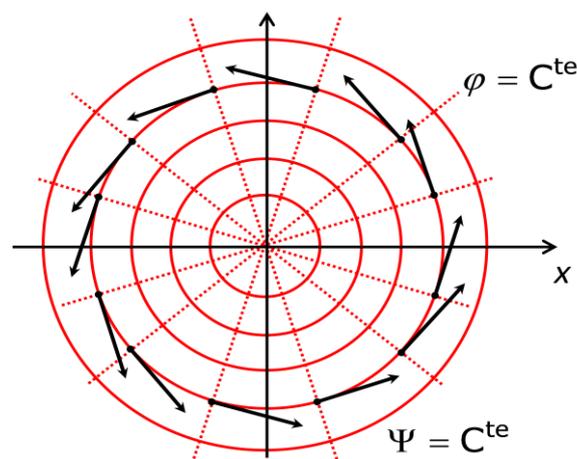
Les équipotentiels sont telles que : $\varphi(r, \theta) = C\theta = C^{\text{te}} \Rightarrow \theta = C^{\text{te}} \forall r$ ce sont des droites passant par l'origine.

Détermination du champ de vitesses :

$$\vec{v} = \begin{cases} v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\ v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \end{cases}$$

$$\text{Soit : } \vec{v} = \begin{cases} v_r = 0 \\ v_\theta = \frac{C}{r} \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \frac{C}{r} \vec{e}_\theta$$

La vitesse est donc ortho radiale et inversement proportionnelle à la distance à l'origine.



Si $C > 0$, alors l'écoulement s'effectue autour de l'origine dans le *sens trigonométrique*.

Si $C < 0$, alors l'écoulement s'effectue autour de l'origine dans le *sens horaire*.

Signification physique de la constante C :

Calculons la « circulation » de la vitesse autour de l'origine :

$$\Gamma = \oint_{\ell} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} \quad \text{où } d\vec{\ell} \text{ est parcouru une ligne de courant quelconque, } i.e. \text{ une cercle de rayon } r.$$

$$\text{avec } \vec{v} = \frac{C}{r} \vec{e}_{\theta} \quad \text{et } d\vec{\ell} = r d\theta \vec{e}_{\theta} \Rightarrow \Gamma = \int_0^{2\pi} \frac{C}{r} r d\theta = 2\pi C$$

$$\text{avec } C = \frac{\Gamma}{2\pi} \quad \text{où } \Gamma \text{ est la circulation du vortex (tourbillon)}$$

Si $\Gamma > 0$, le vortex tourne dans le sens trigonométrique.

Si $\Gamma < 0$, le vortex tourne dans le sens horaire.

Chapitre IV : Dynamique des fluides parfaits

On s'intéresse, Dans ce chapitre, à établir les équations fondamentales qui régissent la dynamique des fluides incompressibles parfaits.

1. Equation fondamentale pour un fluide parfait - théorème d'Euler

Théorème de transport de Reynolds

Considérons une grandeur scalaire $f(\vec{r}, t)$ fonction des coordonnées de l'espace et du temps :

Sur le volume V_s d'un système de particules fluides, l'intégrale de $f(\vec{r}, t)$ s'écrit :

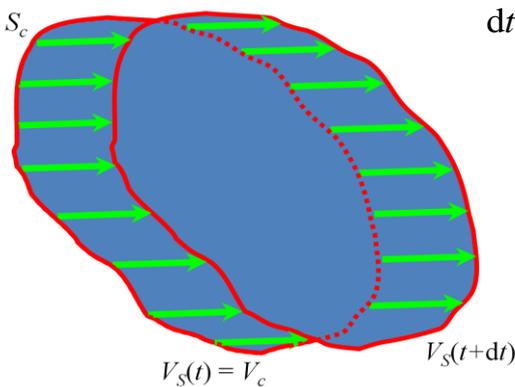
$$F = \iiint_{V_s} f(\vec{r}, t) dV$$

Si l'on souhaite évaluer les variations de F dans le temps, il nous faut calculer :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{V_s(t)} f(\vec{r}, t) dV$$

Le problème est qu'ici V_s est une fonction du temps : en effet le système de particules fluides est en mouvement. Le théorème de transport consiste à utiliser un volume fixe V_c (volume de contrôle), délimité par une surface S_c (surface de contrôle) à travers laquelle on pourra comptabiliser le flux de f :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{V_s(t)} f(\vec{r}, t) dV$$



$$\frac{dF}{dt} = \underbrace{\iiint_{V_c} \frac{\partial f}{\partial t} dV}_{\text{Dérivée locale}} + \underbrace{\iint_{S_c} f \vec{v} \cdot \vec{n} dS}_{\text{Dérivée convective}}$$

Variations instantanées de f dans le volume de contrôle

Flux de f à travers la surface de contrôle

Théorème de transport appliqué à la quantité de mouvement

La quantité de mouvement d'un système fluide de volume V_S s'écrit :

$$\iiint_{V_S} \rho \vec{v} dV$$

Or, le principe fondamental de la dynamique nous dit que la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement doit être égale à la somme des forces agissant sur le système :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_S} \rho \vec{v} dV = \vec{R} + \vec{P}$$

\swarrow forces de surface \searrow forces de volume (poids)

$$\vec{P} = \iiint_{V_S} \rho \vec{g} dV \quad \longrightarrow \quad \text{calcul trivial}$$

$$\vec{R} = \iint_{S_s} \vec{T} \vec{n} dS \quad \longrightarrow \quad \text{calcul d'accès difficile} \quad \longrightarrow \quad \text{il est généralement plus simple de calculer la variation de quantité de mouvement}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \vec{R} + \vec{P} &= \frac{d}{dt} \iiint_{V_S} \rho \vec{v} dV = \sum_i \left[\frac{d}{dt} \iiint_{V_c} \rho v_i dV \right] \vec{e}_i \\ &= \sum_i \left[\iiint_{V_c} \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} dV + \iint_{S_c} (\rho v_i) \vec{v} \vec{n} dS \right] \vec{e}_i \\ &= \iiint_{V_c} \left[\sum_i \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} \vec{e}_i \right] dV + \iint_{S_c} \left[\sum_i (\rho v_i) \vec{e}_i \right] \vec{v} \vec{n} dS \\ &= \underbrace{\iiint_{V_c} \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} dV}_{\text{Dérivée instantanée de la quantité de mouvement}} + \underbrace{\iint_{S_c} (\rho \vec{v}) \vec{v} \vec{n} dS}_{\text{Débit de quantité de mouvement à travers la surface de contrôle}} \end{aligned}$$

Dérivée instantanée de la quantité de mouvement

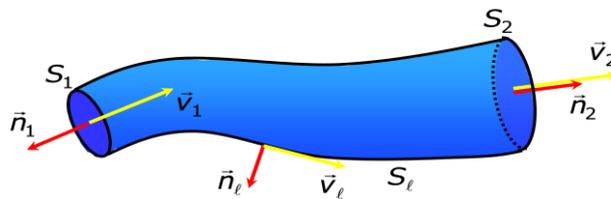
Débit de quantité de mouvement à travers la surface de contrôle

Pour un écoulement stationnaire, la dérivée instantanée est nulle, on aura donc :

$$\vec{R} + \vec{P} = \iint_{S_c} (\rho \vec{v}) \vec{v} \vec{n} dS$$

Théorème d'Euler

Appliquons le résultat précédent au cas d'un tube de courant :



On supposera la vitesse constante en tout point d'une même section (la vitesse moyenne) ; l'écoulement sera supposé stationnaire.

$$\vec{R} + \vec{P} = \iint_{S_1+S_2+S_\ell} (\rho \vec{v}) \vec{v} \vec{n} dS$$

$$\vec{R} + \vec{P} = \underbrace{\iint_{S_1} (\rho \vec{v}_1) \underbrace{\vec{v}_1 \vec{n}_1}_{-v_1} dS}_{-\rho v_1 \vec{v}_1 S_1} + \underbrace{\iint_{S_2} (\rho \vec{v}_2) \underbrace{\vec{v}_2 \vec{n}_2}_{-v_2} dS}_{\rho v_2 \vec{v}_2 S_2} + \iint_{S_\ell} (\rho \vec{v}_\ell) \vec{v}_\ell \vec{n}_\ell dS \quad 0$$

Il reste :
$$\vec{R} + \vec{P} = -\rho v_1 \vec{v}_1 S_1 + \rho v_2 \vec{v}_2 S_2$$

Or, on sait que dans un tube de courant le débit massique est conservé :

$$q_m = \rho v_1 S_1 = \rho v_2 S_2$$

D'où le résultat simple suivant :

$$\vec{R} + \vec{P} = q_m (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \quad \text{Théorème d'Euler}$$

Enoncé du théorème :

La résultante (ΣF_{ext}) des actions mécaniques extérieures exercées sur un fluide isolé (fluide contenu dans l'enveloppe limitée par S_1 et S_2) est égale à la variation de la quantité de mouvement du fluide qui entre en S_1 à une vitesse V_1 et sort par S_2 à une vitesse V_2 .

Remarque :

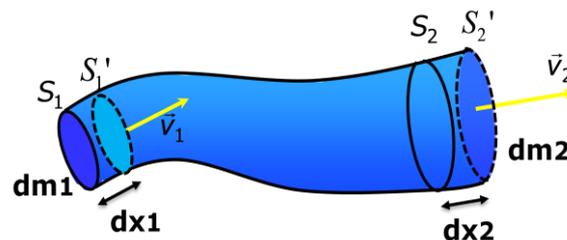
Ce théorème permet de déterminer les efforts exercés par le fluide en mouvement sur les objets qui les environnent. Une application directe du théorème d'Euler est l'évaluation des forces exercées par les jets d'eau. Celles-ci sont exploitées dans divers domaines : production de l'énergie électrique à partir de l'énergie hydraulique grâce aux turbines. D'autre part, il permet d'obtenir simplement la résultante des forces de surface (notamment les forces de frottement) sans avoir à recourir au tenseur des contraintes

2. Equation de Bernoulli

Dans ce paragraphe on va déterminer l'équation fondamentale de l'écoulement d'un fluide qui vérifie les hypothèses suivantes:

- Le fluide est parfait et incompressible.
- L'écoulement est permanent.
- L'écoulement est dans une conduite parfaitement lisse.

Considérons un tube de courant d'un fluide incompressible de masse volumique ρ animée d'un écoulement permanent



On désigne par :

- S_1 et S_2 respectivement la section d'entrée et la section de sortie du fluide à l'instant t .
- S'_1 et S'_2 respectivement les sections d'entrée et de sortie du fluide à l'instant $t'=(t+dt)$.

- V_1 et V_2 les vecteurs vitesse d'écoulement respectivement à travers les sections S_1 et S_2 de tube.
- dx_1 et dx_2 respectivement les déplacements des sections S_1 et S_2 pendant l'intervalle de temps dt ,
- dm_1 : masse élémentaire entrante comprise entre les sections S_1 et S'_1 ,
- dm_2 : masse élémentaire sortante comprise entre les sections S_2 et S'_2 ,
- dV_1 : volume élémentaire entrant compris entre les sections S_1 et S'_1 ,
- dV_2 : volume élémentaire sortant compris entre les sections S_2 et S'_2 ,

Par conservation de la masse:

$$dm_1 = dm_2$$

Donc $\rho_1 \cdot dV_1 = \rho_2 \cdot dV_2$

ou encore $\rho_1 \cdot S_1 \cdot dx_1 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot dx_2$

En divisant par dt on abouti à :

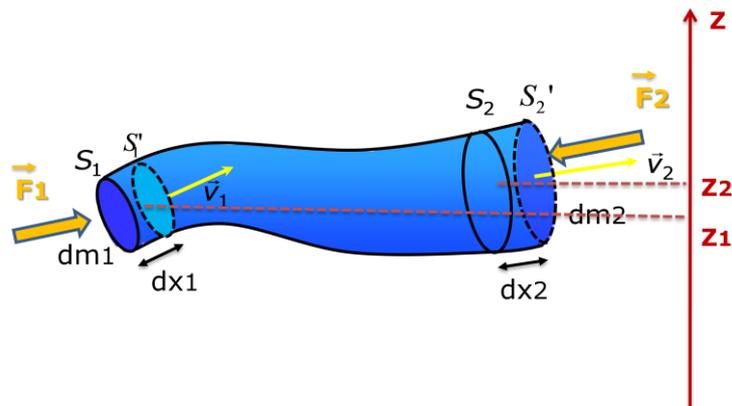
$$\rho_1 S_1 \frac{dx_1}{dt} = \rho_2 S_2 \frac{dx_2}{dt}$$

$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2$$

Puisque le fluide est incompressible : $\rho = \rho_1 = \rho_2$ On peut simplifier et aboutir à l'équation de continuité suivante :

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

On considère un axe OZ vertical dirigé vers le haut.



On note Z_1, Z_2 respectivement les altitudes des centres de gravité des masses dm_1, dm_2

On désigne par F_1 et F_2 respectivement les normes des forces de pression du fluide agissant au niveau des sections S_1 et S_2 .

A l'instant t le fluide de masse dm_1 est compris entre S_1 et S'_1 . Son énergie mécanique est :

$$E_m = E_{pot} + E_{cin} = dm_1 g z_1 + \frac{1}{2} dm_1 v_1^2$$

A l'instant $t+dt$ le fluide de masse dm_1 est compris entre S_2 et S'_2 . Son énergie mécanique est :

$$E'_m = E'_{pot} + E'_{cin} = dm_2 g z_2 + \frac{1}{2} dm_2 v_2^2$$

On applique le théorème de l'énergie mécanique (La variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces extérieures) au fluide entre t et t' :

$$\begin{aligned} E'_m - E_m &= w_{forces\ de\ pression} = F_1 dx_1 - F_2 dx_2 = P_1 S_1 dx_1 - P_2 S_2 dx_2 \\ &= P_1 dV_1 - P_2 dV_2 = \frac{P_1}{\rho_1} dm_1 - \frac{P_2}{\rho_2} dm_2 \end{aligned}$$

Par conservation de la masse : $dm_1 = dm_2$ et puisque le fluide est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$,
On aboutie à l'équation de Bernoulli :

$$\frac{P_2 - P_1}{\rho} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(Z_2 - Z_1) = 0$$

↓

$$P_1 + \rho g Z_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 = P_2 + \rho g Z_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2$$

L'équation de Bernoulli le long d'une même ligne de courant :

$$P + \rho g Z + \frac{1}{2} \rho V^2 = \text{cont}$$

3. Interpretation de l'équation de Bernoulli

Interprétation en termes d'énergie

Multiplions tous les termes de l'équation de Bernoulli par un volume V :

$$p.V + \rho g z.V + \frac{1}{2} \rho v^2.V = C^{\text{te}} \times V$$

$p.V$: Travail des forces de pression : *énergie potentielle* due aux forces de pression.

$\rho g z.V = mgz$: *Energie potentielle* due aux forces de pesanteur.

$\frac{1}{2} \rho v^2.V = \frac{1}{2} m v^2$: *Energie cinétique*

$C^{\text{te}} \times V = E_m$: *Energie totale : énergie mécanique.*

- Par conséquent : $p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 = \frac{E_m}{V}$ correspond à une énergie mécanique par unité de volume (si $V=1$).
- L'énergie mécanique reste alors constante le long d'une ligne de courant (il n'y a pas de dissipation d'énergie).

Interprétation en termes de pression

$$p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 = C^{\text{te}}$$

P : Pression statique (elle existe même s'il n'y a pas de mouvement)

$p + \rho gz = p^*$: Pression motrice (elle génère le mouvement)

$\frac{1}{2} \rho v^2$: Pression cinétique (elle résulte du mouvement)

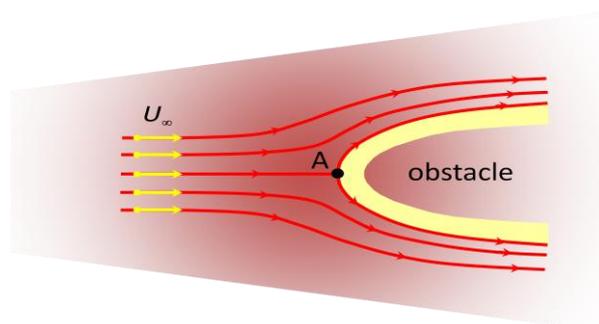
$p + \rho gz + \frac{1}{2} \rho v^2 = P_t$: Pression totale (ou charge)

L'équation de *Bernoulli* montre alors que la charge reste constante le long d'une même ligne de courant (pas de perte de charge dans l'écoulement d'un fluide parfait).

4. Applications

La pression en amont d'un obstacle

On peut calculer la pression en amont d'un obstacle (avion) en utilisant le théorème de Bernoulli. Le point A sur le front d'attaque de l'objet est un point d'arrêt.



Considérons la ligne de courant passant par le point d'arrêt et appliquons *Bernoulli* entre le point A et un point situé loin en amont, Le long d'une même ligne de courant on vérifie :

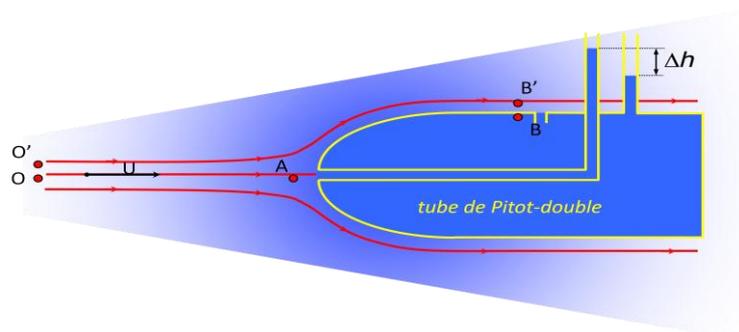
$$p + \rho gz + \frac{1}{2} \rho v^2 = C^{\text{te}}$$

$$p_{\infty} + \rho gz_{\infty} + \frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 = p_A + \rho gz_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 \Rightarrow p_{\infty} + \rho gz_{\infty} + \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 = p_A + \rho gz_A$$

Si l'écoulement a lieu dans un plan tel que $z = C^{\text{te}}$, alors :

$$p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 = p_A$$

La pression p_A est appelée *pression de stagnation*.

Tube de *Pitot*Différents types de sondes de *Prandtl*
(tubes de Pitot-double)

En O et O', l'écoulement est supposé uniforme, de vitesse U . Les lignes de courant étant supposées rectilignes et parallèles, la pression est la même en O et O' $\Rightarrow p_O = p_{O'}$

Pour les mêmes raisons, la pression est la même en B et B' $\Rightarrow p_B = p_{B'}$

Le fluide étant immobile à l'intérieur de la sonde, la pression y est uniforme et égale à la pression en B.

- le premier manomètre donne la pression en A
 - le second manomètre donne la pression en B
- $$\left. \begin{array}{l} \text{le premier manomètre donne la pression en A} \\ \text{le second manomètre donne la pression en B} \end{array} \right\} p_A - p_B = \rho g \Delta h$$

En appliquant l'équation de *Bernoulli* entre O et A, on a :

$$p_O + \frac{1}{2} \rho U^2 = p_A$$

Puis entre O' et B' :

$$p_{O'} + \frac{1}{2} \rho U^2 = p_{B'} + \frac{1}{2} \rho v_{B'}^2$$

On peut alors faire l'hypothèse que l'écoulement est redevenu uniforme loin après le front de

l'objet : $v_{B'} = U$

D'où : $p_{O'} = p_{B'}$ Or, on a vu que : $p_{O'} = p_O$, $p_{B'} = p_B \Rightarrow p_O = p_B$

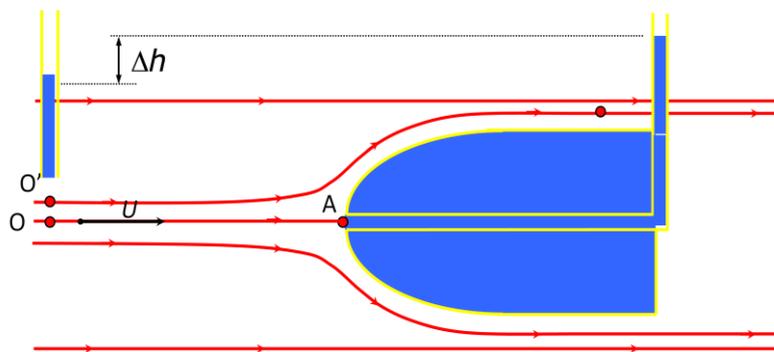
Par consequent:

$$p_B + \frac{1}{2} \rho U^2 = p_A$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \rho U^2 = p_A - p_B = \rho g \Delta h$$

$$\Rightarrow U = \sqrt{2g\Delta h}$$

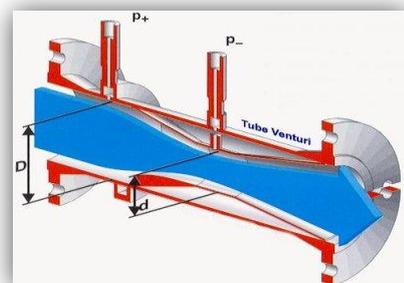
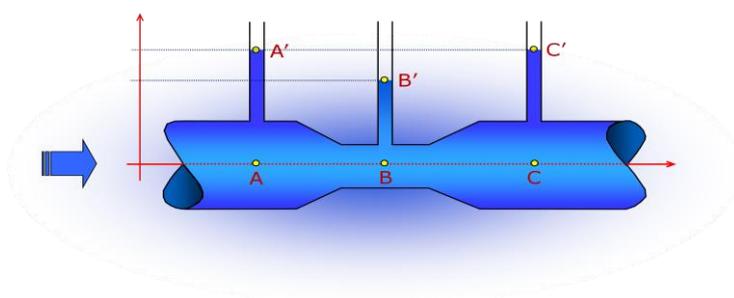
Tube de Pitot Simple utilisé dans le tp



$$\left. \begin{array}{l} p_O + \frac{1}{2} \rho U^2 = p_A \\ p_A - p_O = \rho g \Delta h \end{array} \right\} \Rightarrow U = \sqrt{2g\Delta h}$$

Tube de Venturi - Mesure de débit

Considérons une conduite le long de laquelle a été placé un rétrécissement :



On dispose de 3 sondes de pression (manomètres) placées :

- En amont du rétrécissement $\Rightarrow p_A$
- Au niveau du rétrécissement $\Rightarrow p_B$
- En aval du rétrécissement $\Rightarrow p_C$ (*sonde facultative*)

En dessous chaque prises de pression, les lignes de courant peuvent être considérées rectilignes et parallèles : dans la direction perpendiculaire (suivant z) les lois de l'hydrostatique s'appliquent à la pression :

$$\begin{cases} p_A = p_{A'} + \rho g z_{A'} \\ p_B = p_{B'} + \rho g z_{B'} \\ p_C = p_{C'} + \rho g z_{C'} \end{cases} \quad \text{où } p_{A'} = p_{B'} = p_{C'} = p_{\text{atm}}$$

Appliquons *Bernoulli* sur la ligne de courant passant par A, B et C :

$$p_A + \cancel{\rho g z_A} + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = p_B + \cancel{\rho g z_B} + \frac{1}{2} \rho v_B^2 = p_C + \cancel{\rho g z_C} + \frac{1}{2} \rho v_C^2$$

$z_A = z_B = z_C = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{p_{\text{atm}} + \rho g z_{A'}}_{\substack{\swarrow \\ \text{à } z_{A'}=0}} + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = \cancel{p_{\text{atm}}} + \rho g z_{B'} + \frac{1}{2} \rho v_B^2 = \cancel{p_{\text{atm}}} + \rho g z_{C'} + \frac{1}{2} \rho v_C^2$$

$$\Rightarrow z_{A'} + \frac{1}{2} \frac{v_A^2}{g} = z_{B'} + \frac{1}{2} \frac{v_B^2}{g} = z_{C'} + \frac{1}{2} \frac{v_C^2}{g}$$

On sait par ailleurs que le débit volumique est conservé (en supposant la vitesse uniforme sur une même section) :

$$q_v = S_A v_A = S_B v_B = S_C v_C$$

Remarquons que : $S_A > S_B \Rightarrow v_A < v_B \Rightarrow z_{A'} > z_{B'}$
 (*rétrécissement*) (*accélération*) (*dépression*)

et que si $S_A = S_C$ alors $v_A = v_C$ et $z_{A'} = z_{C'}$: la 3^{ème} sonde ne servira que pour une étude des pertes de charge

$$z_{A'} + \frac{1}{2} \frac{v_A^2}{g} = z_{B'} + \frac{1}{2} \frac{v_B^2}{g} \Rightarrow \Delta z = z_{A'} - z_{B'} = \frac{1}{2g} (v_B^2 - v_A^2)$$

$$S_A v_A = S_B v_B \Rightarrow v_B = v_A \frac{S_A}{S_B}$$

Donc : $\Delta z = \frac{1}{2g} v_A^2 (S_A^2/S_B^2 - 1)$ soit : $v_A = \sqrt{\frac{2g\Delta z}{(S_A/S_B)^2 - 1}}$

Le débit dans la conduite s'obtient par :

$$q_v = S_A \sqrt{\frac{2g\Delta z}{(S_A/S_B)^2 - 1}}$$

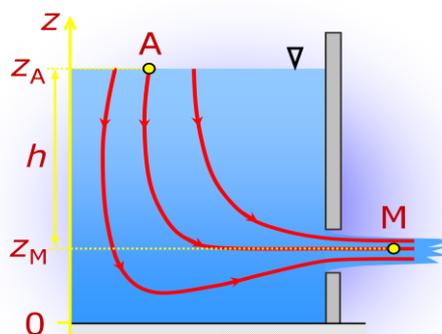
Exprimé en fonction du diamètre D de la conduite et du diamètre d du rétrécissement, le débit s'exprime :

$$q_v = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{\frac{2g\Delta z}{(D/d)^4 - 1}}$$

Ecoulement par orifice (vidange d'un réservoir)

Formule de *Toricelli*

Considérons la vidange d'un réservoir par un orifice placé sous la surface libre :



Appliquons *Bernoulli* entre un point A de la surface libre et un point M du jet :

$$p_A + \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = p_M + \rho g z_M + \frac{1}{2} \rho v_M^2$$

Hypothèse 1 : dans le jet, les lignes de courant sont rectilignes parallèles, les variations d'altitude étant négligeables, la pression statique peut alors être considérée uniforme dans tout le jet.

Comme il n'y a pas de discontinuité de pression à l'interface jet-atmosphère, la pression statique dans le jet est égale à la pression atmosphérique.

Par conséquent : $p_A = p_M = p_{\text{atm}}$

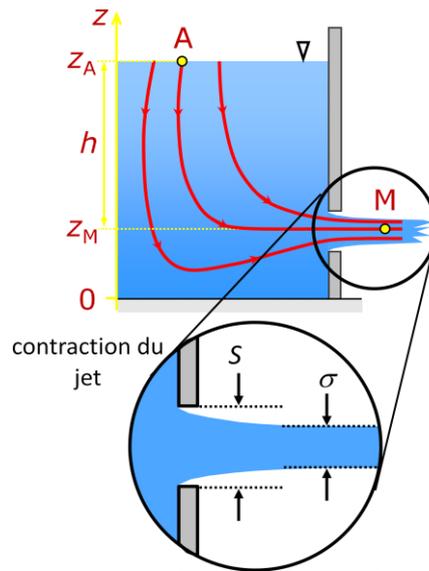
$$\begin{array}{ccc} \cancel{p_A} + \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = \cancel{p_M} + \rho g z_M + \frac{1}{2} \rho v_M^2 & & \\ \downarrow \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \downarrow & & \\ P_{\text{atm}} & \Downarrow & P_{\text{atm}} \\ \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = \rho g z_M + \frac{1}{2} \rho v_M^2 & & \end{array}$$

Hypothèse 2 : la vitesse de descente du niveau de la surface libre peut être considérée négligeable devant celle du fluide s'écoulant dans le jet.

$$v_A \ll v_M$$

Par conséquent on obtient la vitesse de Torricelli :

$$\rho g (z_A - z_M) = \underbrace{\frac{1}{2} \rho (v_M^2 - v_A^2)}_h \approx \frac{1}{2} \rho v_M^2 \Rightarrow v_M = \sqrt{2gh}$$

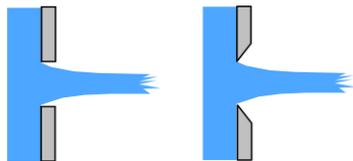


Calcul du débit :

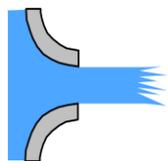
$$q_v = \sigma v_M = \sigma \sqrt{2gh} \quad \text{où} \quad \sigma = C_c S$$

C_c est coefficient de contraction.

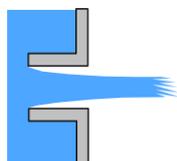
Le coefficient de contraction dépend de la géométrie de l'orifice. De manière générale, C_c est déterminé expérimentalement :



Parois minces $C_c = 0,61$



Orifice à bords profilés $C_c = 1,00$



Orifice à bords rentrants $C_c = 0,50$

Phénomène de cavitation

Le phénomène de cavitation correspond à la formation de bulles de vapeur au sein d'un liquide en mouvement.

En conséquence de l'équation de Bernoulli, quand la vitesse augmente la pression diminue. Si la pression tombe en dessous de la pression de vapeur saturante, alors le liquide s'évapore ce qui implique la formation de bulles. En pratique, et dans la plupart des cas, ce phénomène est gênant. Par exemple :

- La cavitation est consommatrice d'énergie : l'énergie consommée pour la formation des bulles (transition de phase) + contraintes
- La cavitation est à l'origine de la détérioration prématurée des hélices de navires ;



Les bulles créées par cavitation migrent spontanément vers les zones où la pression du fluide est plus élevée : elles éclatent et le choc mécanique engendre des détériorations.

Chapitre V : Dynamique des fluides réels

Il s'agira ici de tenir compte des différentes forces agissant sur les particules fluides en mouvement. Une description quantitative de l'écoulement pourra ainsi être déduite d'équations fondamentales locales.

1. Application du Principe Fondamental de la Dynamique

Pour établir l'équation fondamentale de la Dynamique on applique le principe fondamental de la dynamique à un élément de volume fluide en mouvement. Il nous faut donc faire le bilan des forces s'exerçant en surface et en volume.

$$d\vec{F} = \boxed{d\vec{F}_S} + \boxed{d\vec{F}_V} = \rho dV \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Forces de surface Forces de volume (forces de poids)

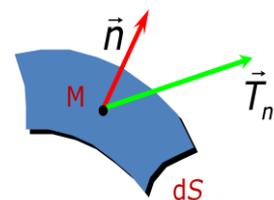
$$d\vec{F}_V = \rho dV \vec{g}$$

Forces de surface - Tenseur des contraintes

Pour un fluide réel (visqueux) en mouvement, les forces de surface ne sont plus seulement normales à la surface : il existe des contraintes tangentielles dues à la viscosité (frottements).

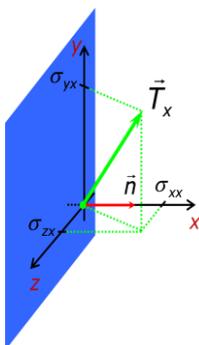
En un point M d'une surface dS , la force de surface s'exprime comme :

$$d\vec{F} = \vec{T}_n dS$$



où \vec{T}_n est la contrainte qui s'exerce sur la surface de normale \vec{n} .

Considérons une surface \perp à l'axe x . La normale à cette surface est : $\vec{n} = \vec{e}_x$



La contrainte exercée sur cette surface est alors notée \vec{T}_x et peut se décomposer comme : $\vec{T}_x = \sigma_{xx} \vec{e}_x + \sigma_{yx} \vec{e}_y + \sigma_{zx} \vec{e}_z$

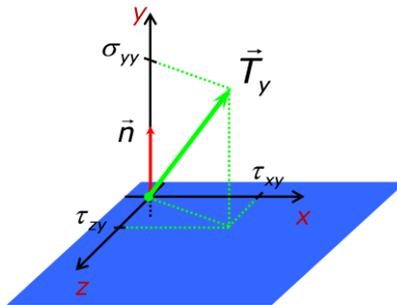
On remarque que les composantes σ_{yx} et σ_{zx} sont des composantes tangentielles : on les notera plutôt τ_{yx} et τ_{zx} pour les distinguer de la composante normale τ_{zx} .

On peut de même considérer la surface \perp à l'axe y . On a ainsi la contrainte :

$$\vec{T}_y = \tau_{xy} \vec{e}_x + \sigma_{yy} \vec{e}_y + \tau_{zy} \vec{e}_z$$

Et pour la surface \perp à l'axe z la contrainte s'exprime :

$$\vec{T}_z = \tau_{xz} \vec{e}_x + \tau_{yz} \vec{e}_y + \sigma_{zz} \vec{e}_z$$

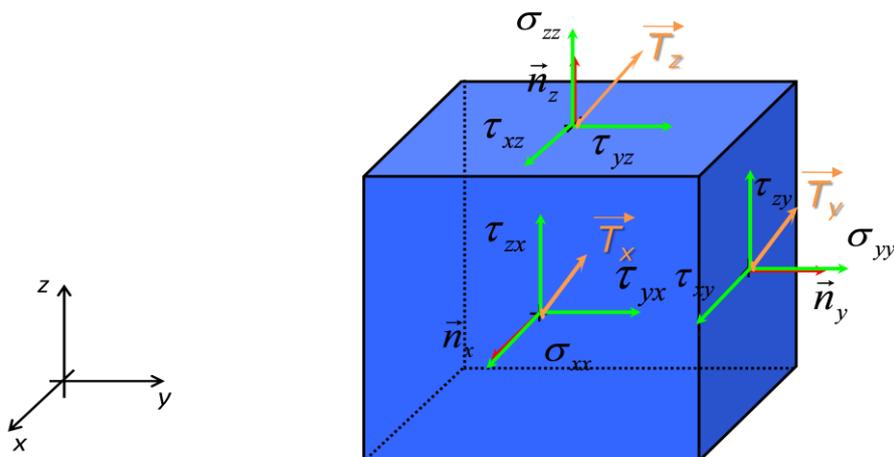


Considérons maintenant une surface dont l'orientation est quelconque. Dans le repère cartésien, sa normale peut se décomposer en :

$$\vec{n} = n_x \vec{e}_x + n_y \vec{e}_y + n_z \vec{e}_z$$

Dans ce cas, la contrainte s'exerçant sur cette surface s'exprime comme :

$$\vec{T}_n = n_x \vec{T}_x + n_y \vec{T}_y + n_z \vec{T}_z$$



En développant, on obtient :

$$\vec{T}_n = \begin{cases} n_x(\sigma_{xx}\vec{e}_x + \tau_{yx}\vec{e}_y + \tau_{zx}\vec{e}_z) \\ + n_y(\tau_{xy}\vec{e}_x + \sigma_{yy}\vec{e}_y + \tau_{zy}\vec{e}_z) \\ + n_z(\tau_{xz}\vec{e}_x + \tau_{yz}\vec{e}_y + \sigma_{zz}\vec{e}_z) \end{cases} = \begin{cases} (n_x\sigma_{xx} + n_y\tau_{xy} + n_z\tau_{xz})\vec{e}_x \\ (n_x\tau_{yx} + n_y\sigma_{yy} + n_z\tau_{yz})\vec{e}_y \\ (n_x\tau_{zx} + n_y\tau_{zy} + n_z\sigma_{zz})\vec{e}_z \end{cases}$$

Ce qui revient à effectuer le produit d'une matrice par la normale :

$$\vec{T}_n = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{T}_n = \overset{\equiv}{T} \vec{n}$$

Tenseur des Contraintes

Donc les forces de surface dF s'écrivent

$$d\vec{F} = \vec{T}_n dS \quad \Longrightarrow \quad d\vec{F} = \overset{\equiv}{T} \vec{n} dS \quad \Longrightarrow \quad d\vec{F} = \vec{\nabla} \overset{\equiv}{T} dV$$

Remplaçant dans le bilan de forces, par conséquent :

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= d\vec{F}_S + d\vec{F}_V = \rho dV \frac{d\vec{v}}{dt} \\ \Rightarrow \vec{\nabla} \overset{\equiv}{T} d\mathcal{V} + \rho \vec{g} d\mathcal{V} &= \rho d\mathcal{V} \frac{d\vec{v}}{dt} \\ \Rightarrow \vec{\nabla} \overset{\equiv}{T} + \rho \vec{g} &= \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \end{aligned}$$

On peut alors faire apparaître les deux parties du tenseur des contraintes :

$$\overset{\equiv}{T} = -p\overset{\equiv}{I} + \overset{\equiv}{T}'$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \overline{\overline{T}} &= -\vec{\nabla} \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} + \vec{\nabla} \overline{\overline{T}} \\ &= -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \overline{\overline{T}}\end{aligned}$$

Soit finalement l'équation fondamentale de la dynamique (équation locale):

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \overline{\overline{T}} + \rho \vec{g}$$

2. Fluide newtonien et équation de Navier-Stokes

Par définition, les fluides « newtoniens » sont ceux pour lesquels les composantes du tenseur des contraintes de viscosité $\overline{\overline{T}}$ dépendent *linéairement* des composantes du tenseur des taux de déformation pure $\overline{\overline{e}}$.

Remarque

- Une rotation pure n'engendre aucune déformation : par conséquent il n'y a pas de contrainte. C'est pourquoi $\overline{\overline{T}}$ et $\overline{\overline{\omega}}$ ne sont pas liés.
- *Tous les fluides que l'on étudiera pourront être considérés newtoniens.*

Considérons les éléments tensoriels de $\overline{\overline{e}}$:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

ce tenseur est symétrique, car $e_{ij} = e_{ji}$

On admettra alors que pour un fluide isotrope, les éléments tensoriels de $\overline{\overline{T}}$ et $\overline{\overline{e}}$ sont liés par la relation suivante :

$$\sigma'_{ij} = 2\mu e_{ij} + \mu'(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz})\delta_{ij}$$

viscosité
Viscosité de dilatation
symbole de Kronecker

On remarque que : $e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$

Donc, si le fluide est incompressible, on a $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ et dans ce cas :

$$\sigma'_{ij} = 2\mu e_{ij} \Rightarrow \overline{\overline{T}} = 2\mu \overline{\overline{e}}$$

Reprenons l'équation fondamentale de la dynamique :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{T}} + \rho \vec{g}$$

Cas d'un fluide incompressible newtonien

Pour un fluide incompressible newtonien, cette équation devient donc :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p + 2\mu \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{e}} + \rho \vec{g}$$

Explicitons le terme $\vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{e}}$

$$\vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{e}} = \sum_i \left(\sum_j \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j} \right) \vec{e}_i \quad \text{où} \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{e}} = \sum_i \sum_j \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_i} \right) \vec{e}_i$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i \left(\sum_j \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \right) \vec{e}_i}_{\Delta \vec{v}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) \vec{e}_i}_{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \vec{v})} = \frac{1}{2} \Delta \vec{v} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \vec{v})$$

↓
 Fluide incompressible

Il reste alors : $\vec{\nabla} \cdot \vec{e} = \frac{1}{2} \Delta \vec{v}$ Ce qui conduit à :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p + 2\mu \vec{\nabla} \cdot \vec{e} + \rho \vec{g} \Rightarrow \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{v} + \rho \vec{g}$$

↑

Equation fondamentale de la dynamique pour un fluide newtonien incompressible

↑

Equation de Navier-Stokes (équation locale)

La dérivée particulaire de la vitesse est comme suit :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$$

↓

La dérivée instantanée

↓

La dérivée convective

$$\Rightarrow \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{v} + \rho \vec{g}$$

En posant $\vec{g} = -g\vec{e}_z$, la projection de l'équation de *Navier-Stokes* sur les 3 axes du repère cartésien donne :

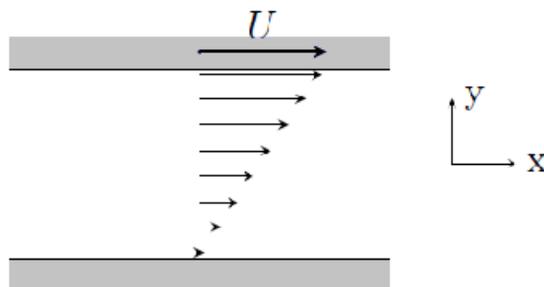
$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) - \rho g \end{array} \right.$$

3. Application sur des écoulements réels particuliers

La résolution des équations complexes de Navier-Stokes est difficile et nécessite la plupart du temps d'adopter des hypothèses simplificatrices. Dans les écoulements réel suivant, on va présenter quelques hypothèses qui nous permettrons de simplifier les équations de Navier-Stokes et déterminer le champ de vitesse.

1. Ecoulement de couette

Écoulement stationnaire d'un fluide incompressible se fait entre 2 plaques horizontales séparées d'une distance h l'une immobile, et l'autre se déplaçant à vitesse constante U . La plaque du haut est une source de quantité de mouvement, Le fluide s'écoule suivant la direction x sans gradient de pression. Les effets du champ de pesanteur sont négligés.



Écoulement bidimensionnel $\implies \vec{v} = v(x, y)\vec{e}_x$

Écoulement incompressible $\implies \text{div}\vec{v} = 0$, dans le cas présent $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$

v ne dépend pas de x donc $\vec{v} = v(y)\vec{e}_x$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left(\underbrace{\frac{\partial v_x}{\partial t}}_0 + v_x \underbrace{\frac{\partial v_x}{\partial x}}_0 + \underbrace{v_y}_0 \frac{\partial v_x}{\partial y} + \underbrace{v_z}_0 \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_0 + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left(\underbrace{\frac{\partial v_y}{\partial t}}_0 + v_x \underbrace{\frac{\partial v_y}{\partial x}}_0 + \underbrace{v_y}_0 \frac{\partial v_y}{\partial y} + \underbrace{v_z}_0 \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial y}}_0 + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left(\underbrace{\frac{\partial v_z}{\partial t}}_0 + v_x \underbrace{\frac{\partial v_z}{\partial x}}_0 + \underbrace{v_y}_0 \frac{\partial v_z}{\partial y} + \underbrace{v_z}_0 \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial z}}_0 + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \end{array} \right.$$

Les équations de Navier Stokes se réduisent en :

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) = 0$$

Après intégration on obtient le champ de vitesse :

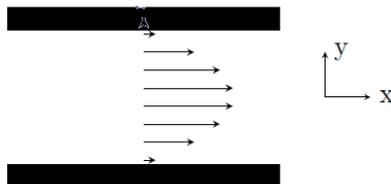
$$\vec{v} = (Ay + B)\vec{e}_x$$

En utilisant les conditions de limites $v(0) = 0$ et $v(h) = U$, on obtient le profil linéaire de vitesse suivant :

$$v(y) = \frac{U}{h} y$$

2. Ecoulement de Poiseuille plan

Écoulement stationnaire d'un fluide incompressible entre deux plaques fixes de longueur L , écartées d'une largeur h , et orientées suivant la direction x . L'écoulement se fait par un gradient de pression selon la direction x



Les équations de Navier-Stokes se réduisent en

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx} = \mu \left(\frac{d^2 v_x}{dy^2} \right) \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad p = p(x)$$

Après intégration on aura:

$$\frac{dv}{dy} = y \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} + A \quad \Rightarrow \quad v(y) = \frac{y^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} + Ay + B$$

Les conditions de non-glissement aux parois, $v(0) = v(h) = 0$, fixent les constantes d'intégration pour donner :

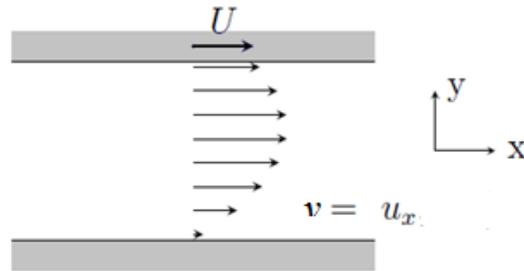
$$\left\{ \begin{array}{l} v(0) = 0 = B \\ v(h) = 0 = \frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} + Ah \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} B = 0 \\ A = -\frac{h}{2\mu} \frac{dp}{dx} \end{array} \right.$$

Le champ de vitesse de l'écoulement de Poiseuille plan est :

$$v(y) = \frac{y^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y - h)$$

3. Écoulement de cisaillement de Couette-Poiseuille plan

On considère un écoulement stationnaire entre deux plaques infinies, dont l'une est immobile tandis que l'autre est animée d'une vitesse constante U . L'écoulement subit un gradient de pression suivant la direction x



Même équation de mouvement que celle de l'écoulement Poiseuille plan est obtenue après simplification des équations de Navier-Stokes :

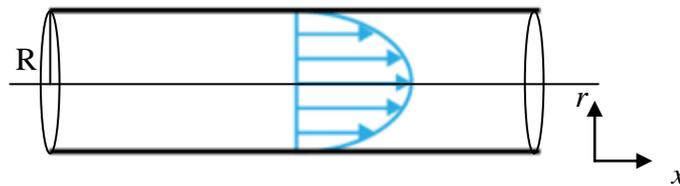
$$\frac{dv}{dy} = y \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} + A \Rightarrow v(y) = \frac{y^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} + Ay + B$$

Les conditions de non-glissement aux parois, $u_x(y = 0) = 0$ et $u_x(y = h) = U$, fixent les constantes d'intégration pour donner le profil de vitesse :

$$v(y) = \frac{dp}{2\mu dx} y(y - h) + U \frac{y}{h}$$

4. Écoulement laminaire en conduit cylindrique : loi de Poiseuille

La résolution des équations de Navier-Stokes dans le cas de l'écoulement d'un fluide Newtonien incompressible en régime laminaire aboutit à la loi ou l'équation de Poiseuille.



Les équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques (x, r, θ) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + u \frac{\partial v_r}{\partial x} - \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + u \frac{\partial v_\theta}{\partial x} + \frac{v_r v_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\Delta v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right)$$

L'équation de continuité en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial(ru_r)}{r\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{r\partial \theta} + \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$$

Simplification des équations de Navier-Stokes selon les hypothèses de cet écoulement :

- L'écoulement stationnaire $\longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0$
- Les lignes de courant parallèle aux parois $\longrightarrow v_r = 0$
- Il n'y a pas de rotation autour de l'axe $\longrightarrow v_\theta = 0$
- Ecoulement symétrique $\longrightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0$
- Ecoulement incompressible $\longrightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 0$

On obtient :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right) = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow P(x, r, \theta) = p(x)$$

Sachant que:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

Transformant l'équation obtenue :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}$$

Après intégration il vient:

$$v(r) = \frac{r^2}{4\mu} \frac{dp}{dx} + Ay + B$$

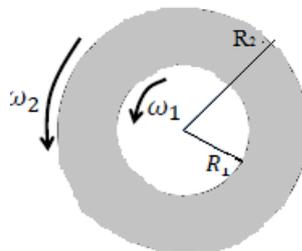
Sachant que la vitesse a une valeur finie en $r = 0$, donc $A = 0$ et l'application de condition de non-glissement $v(r = R) = 0$ donne $B = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{dp}{dx}$:

Le profil parabolique de la vitesse s'écrit :

$$v(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (r^2 - R^2)$$

5. Écoulement de Couette cylindrique

Il s'agit de la version axisymétrique de l'écoulement de Couette plan; le fluide visqueux est contenu entre deux cylindres concentriques de rayon R_1 et R_2 et de vitesse angulaire ω_1 et ω_2



Les équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques, en négligeant les effets de la gravité s'écrivent :

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} - \frac{u_r u_\theta}{r} = \\ - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left[\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right] \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{u_r u_\theta}{r} = \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right] \end{aligned}$$

D'après les hypothèses de l'écoulement il vient :

Le mouvement est permanent $\longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0$

Écoulement symétrique $\longrightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} = 0$

La direction suivant z est supposée infinie et sans vitesse $\longrightarrow v_z = 0$

L'écoulement est incompressible $\longrightarrow v_r = 0$

Remarque :

Le champ de vitesse étant indépendant de θ pour une raison de symétrie, l'équation conduit à : $u_r(r, z) = C(z)/r$. Sur les parois solides en $r = R_1$ et $r = R_2$ la vitesse radiale est nulle (le fluide ne peut traverser ces parois), $C(z)$ est donc nécessairement nulle dans tout l'écoulement ainsi que la composante u_r .

Les équations de Navier-Stokes donnent selon les trois projections :

$$\begin{aligned} -\rho \frac{u_\theta^2}{r} &= -\frac{\partial p}{\partial r} \\ 0 &= \mu \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right) \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$p(r, \theta, z) = p(r)$$

$$u_\theta^2 = \frac{r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \Rightarrow u_\theta(r, \theta, z) = u_\theta(r)$$

L'intégration de La deuxième équation donne :

$$\frac{d^2 u_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_\theta}{dr} - \frac{u_\theta}{r^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dr} \left(\frac{du_\theta}{dr} + \frac{u_\theta}{r} \right) = 0, \text{ soit } \frac{du_\theta}{dr} + \frac{u_\theta}{r} = A$$

soit : $u_\theta(r) = \frac{A}{2} r + \frac{B}{r}$ avec $u_\theta(R_1) = \omega_1 R_1$ et $u_\theta(R_2) = \omega_2 R_2$

Le profil de vitesse de ce type d'écoulement s'écrit comme suit :

$$u_\theta(r) = \frac{(\omega_1 - \omega_2) R_2^2 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r} + \frac{\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r, \text{ avec } B = \frac{(\omega_1 - \omega_2) R_2^2 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \text{ et } A = 2 \frac{\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

Et l'expression du champ de pression est :

$$P(r) = \rho \left(\frac{A^2}{8} r^2 + AB \ln(r) - \frac{B^2}{2r^2} \right) + p_0$$

Références

1. *Mécanique des fluides. S. Chaussedent*
2. *Mécanique des fluides. J. Roussel - E.N.S.C.R*
3. *Mécanique des fluides incompressibles. R.Younes*
4. *Mécanique des fluides. P. Chassaing.*
5. *Mécanique des fluides. S. Amiroudine. J. L. Battaglia*
6. *Cours de: thermique, Thermodynamique, Mécanique des fluides. F. Charvet*
7. *Mécanique des fluides. Ph. Fichou.*
8. *Mécanique des fluides . P. Huerre*
9. *Ecoulement de Couette cylindrique. D. Huilier*
10. *Mécanique des fluides .M. Marcoux*
11. *Eléments de Mécanique des Fluides. HACH*