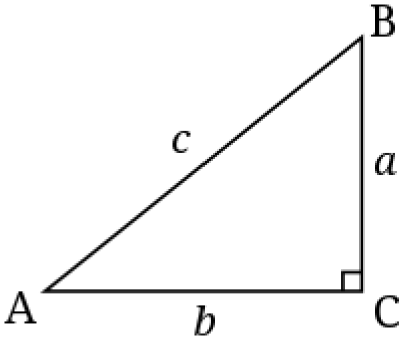
Chapitre 2 :Trigonométrie

Les fonctions trigonométriques se définissent dans un triangle rectangle par



$\sin \hat{A} = \frac{a}{c}$; $\cos \hat{A} = \frac{b}{c}$; $\tan \hat{A} = \frac{a}{b}$. ($\hat{A}$ est l'angle $B\hat{A}C$)

Formules de trigonométrie:

Propriétés :

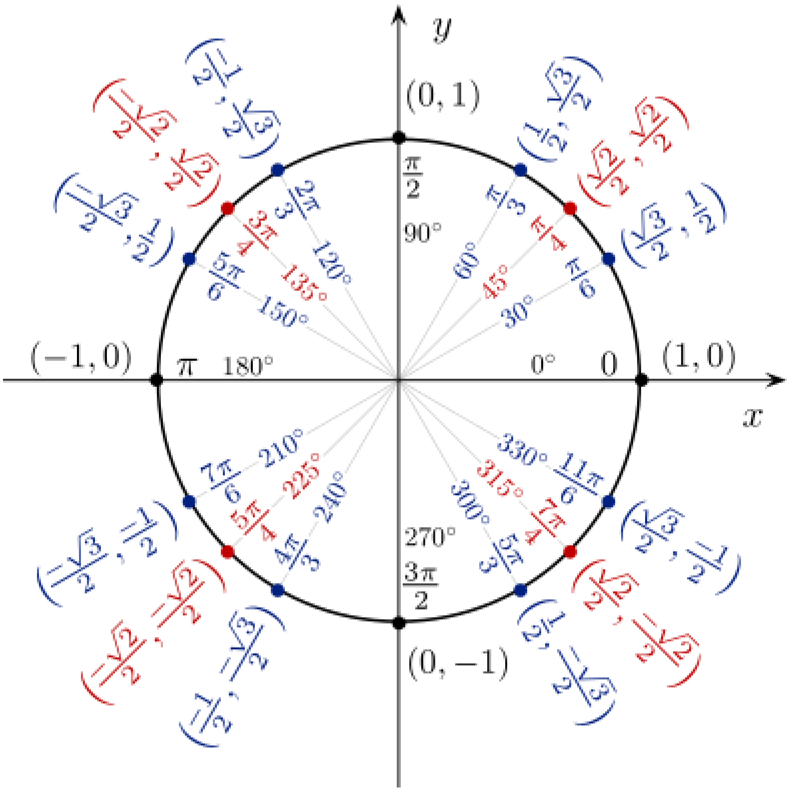
Quel que soit le réel a, on a (d'après le théorème de Pythagore): $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$.

$\cos(-a) = \cos(a)$; $\sin(-a) = -\sin a$; $\tan(-a) = -\tan a$.

$$\begin{cases} \cos(\pi - a) = -\cos a \\ \sin(\pi - a) = \sin a \\ \tan(\pi - a) = -\tan a \end{cases} ; \begin{cases} \cos(\pi + a) = -\cos a \\ \sin(\pi + a) = -\sin a \\ \tan(\pi + a) = \tan a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \text{cotan}\, a \end{cases} ; \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\text{cotan}\, a \end{cases}$$

Cercle trigonométrique et angles remarquable



Formules d’addition et de différences des arcs :

Les deux formules principales sont les formules d'addition pour le cosinus et le sinus :

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$;

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

On en déduit celle pour la tangente :

$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$;

ainsi que les formules de différence (en remplaçant *B* par -*B*, sachant que la fonction cosinus est paire et les fonctions sinus et tangente sont impaires).

Formules de multiplication des arcs :

$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 \quad = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$

$\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$

$\cos(3a) = -3\cos a + 4\cos^3 a$

$\sin(3a) = 3\sin a - 4\sin^3 a$

$\tan(3a) = \frac{3\tan a - \tan^3 a}{1-3\tan^2 a}$

Formules des développement et de factorisation (formules de Simpson)

Des formules d'addition et de différence ; on déduit :

Développement

$\cos a \cos b = \frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$ en particulier $\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$

$\sin a \sin b = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$ en particulier

$$\sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

$$\sin a \cos b = \frac{\sin(a-b)+\sin(a+b)}{2}$$

factorisation

$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

Formules de l'arc moitié :

Ces formules interviennent dans de très nombreux problèmes. En posant :

$t = \tan\frac{a}{2}$.

On a :

$\sin a = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $\tan a = \frac{2t}{1-t^2}$.

Equations trigonométriques

$$\cos a = \cos b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b\ (2\pi) \\ a = -b\ (2\pi) \end{cases}$$

$\sin a = \sin b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \ (2\pi) \\ a = \pi - b \ (2\pi) \end{cases}$

$\tan a = \tan b \Leftrightarrow a = b \ (\pi).$

Théorème d'Al-Kashi ou des loi des cosinus

Pour un triangle ABC de cotés $a = CB;\ b = AC\ \ et\ c = AB$ on a (loi des cosinus)

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$

Remarque lorsque $A = 90^\circ\ ou\ \frac{\pi}{2}\ on\ a$

$a^2 = b^2 + c^2$

C'est- à-dire le théorème de Pythagore.

loi des sinus

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}.$$

Résoudre un triangle

Résoudre un triangle, c'est-à- dire calculer les cotés et les angles qui ne sont pas donnés.

Aire du triangle

L'aire A du triangle se détermine à l'aide de la longueur de deux côtés et du $sinus$ de l'angle qu'ils forment :

$S = \frac{1}{2}$a$\times\ b \times \sin \hat{C}$