Exercices corrigés

Exercice 1

Soit un système régi par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3}+7.\frac{d^2y(t)}{dt^2}+11.\frac{dy(t)}{dt}+5.y(t)=\frac{du(t)}{dt}+2.u(t)$$

1. Déterminer la fonction de transfert du système : $W(p)=\dfrac{Y(p)}{U(p)}$

2. Calculer les pôles et les zéros de ce système.

Exercice 2

Un processus physique est modélisé par une fonction de transfert du 2ème ordre :

$$G(S)=\frac{G_0}{(1+\tau_1.p)(1+\tau_2.p)},\quad G_0=1,\quad \tau_1=10\,,\tau_2=2\,s$$

Ce processus est inséré dans une boucle d'asservissement contenant un régulateur proportionnel : $C(p)=K$.

1. a. Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée : $W(p)=S(p)/E(p)$ et la mettre sous la forme canonique :

En déduire les expressions des paramètres de $W(p)$:

W_0 gain statique, m coefficient d'amortissement, ω_0 pulsation propre non amortie, en fonction de G_0 et K.

b. Calculer la valeur de K pour obtenir $m=0.7$

Exercice 3

Trouver la fonction de transfert équivalente pour le système asservi suivant :

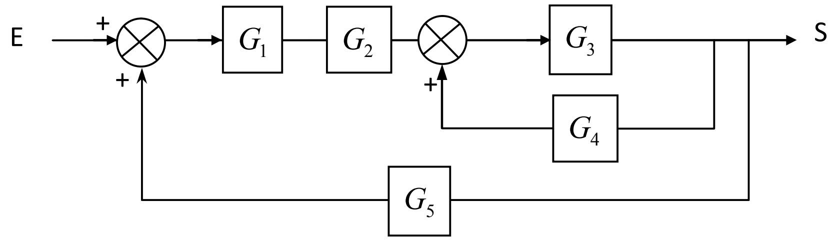


Figure 1

Exercice supplémentaire :

Simplifier le schéma fonctionnel illustré sur la figure (2) sous forme canonique.

- Ramener le système représenté par le schéma fonctionnel (Figure 3) à un système à retour unitaire.

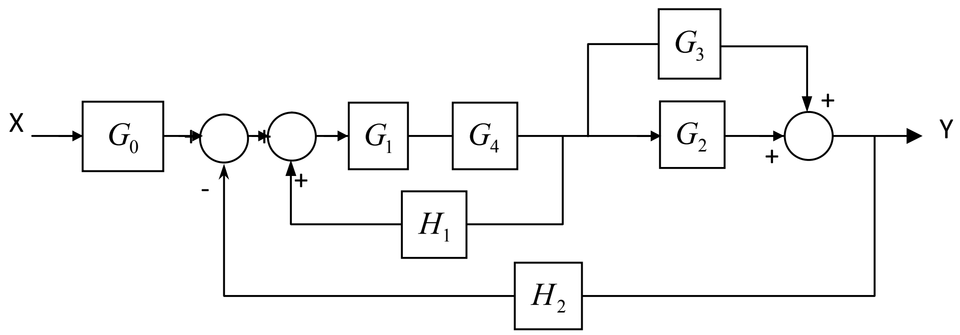


Figure 2

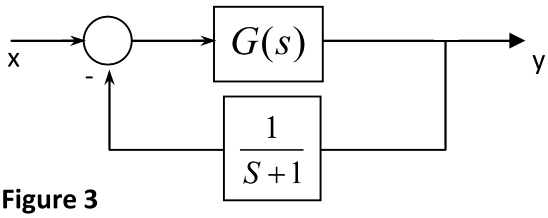


Figure 3

Exercice 1 :

1) La fonction de transfert :

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^3y}{dt^3} + 7\frac{d^2y}{dt^2} + 11\frac{dy}{dt} + 5y\right] = \mathcal{L}\left[\frac{du}{dt} + 2u(t)\right].$$

On a : $\mathcal{L}\left[\frac{d^ny}{dt^n}\right] = p^n Y(p) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{(n-1)-i}\, y^{(i)}(0)$

Alors :

$$p^3 Y(p) - p^2 y(0) - p y'(0) - y''(0) + 7\left(p^2 Y(p) - p y(0) - y'(0)\right)$$
$$+ 11\left(pY(p) - y(0)\right) + 5Y(p) = pU(p) - u(0) + 2U(p)$$

on prend des conditions initiales toutes nulles.

$$Y(p)\left(p^3 + 7p^2 + 11p + 5\right) = U(p)(p+2).$$

Alors : $F(p) = \dfrac{Y(p)}{U(p)} = \dfrac{p+2}{p^3 + 7p^2 + 11p + 5}$

2) Les zeros $\Rightarrow$ numérateur nul.

donc $p + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{p = -2}$

Les pôles $\Rightarrow$ dénominateur nul

donc $p^3 + 7p^2 + 11p + 5 = 0$

on remarque que $p_1 = -1$ est une solution

Alors $(p+1)(ap^2 + bp + c) = p^3 + 7p^2 + 11p + 5$

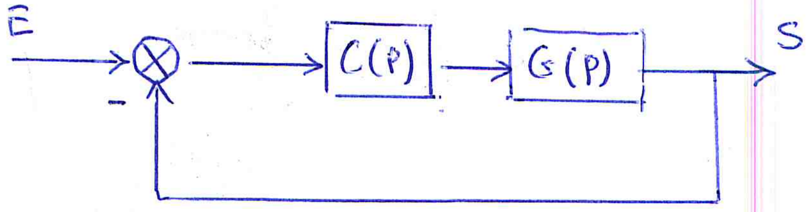
$a = 1$; $b = 6$; $c = 5$

$p^2 + 6p + 5 = 0 \Rightarrow p_2 = -1$; $p_3 = -5$

les pôles sont : $p_1 = p_2 = -1$ (double)

$p_3 = -5$

Exercice 2 :



$$H(p) = \frac{C(p)\ G(p)}{1 + C(p)\,G(p)}$$

$$H(p) = \frac{K \dfrac{G_0}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}}{1 + K \dfrac{G_0}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}}$$

$$H(p) = \frac{K . G_0}{(K G_0 + 1) + (\tau_1 + \tau_2) . p + \tau_1 \tau_2\, p^2}$$

A.N : $$H(p) = \frac{K}{(K+1) + 12 . p + 20 . p^2}$$

b) Forme Canonique :

$$H(p) = \frac{\dfrac{K}{K+1} G_0}{1 + \dfrac{\tau_1 + \tau_2}{K+1} p + \left(\dfrac{\tau_1 \tau_2}{K+1}\right) p^2}$$

Alors : $H_0 = \dfrac{K}{K+1} G_0 = \dfrac{K}{K+1}$ (Gain statique).

$$\frac{2m}{\omega_0} = \frac{\tau_1 + \tau_2}{K+1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{\tau_1 \tau_2}{K+1}$$

Alors : $$\omega_0 = \sqrt{\frac{K+1}{\tau_1 \tau_2}} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K+1}{20}}$$

$$m = \frac{1}{2} \frac{\tau_1 + \tau_2}{(K+1)} \sqrt{\frac{K+1}{\tau_1 \tau_2}} \Rightarrow m = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2\sqrt{(K+1)\,\tau_1 \tau_2}}$$

$$m = \frac{6}{\sqrt{20(K+1)}}$$

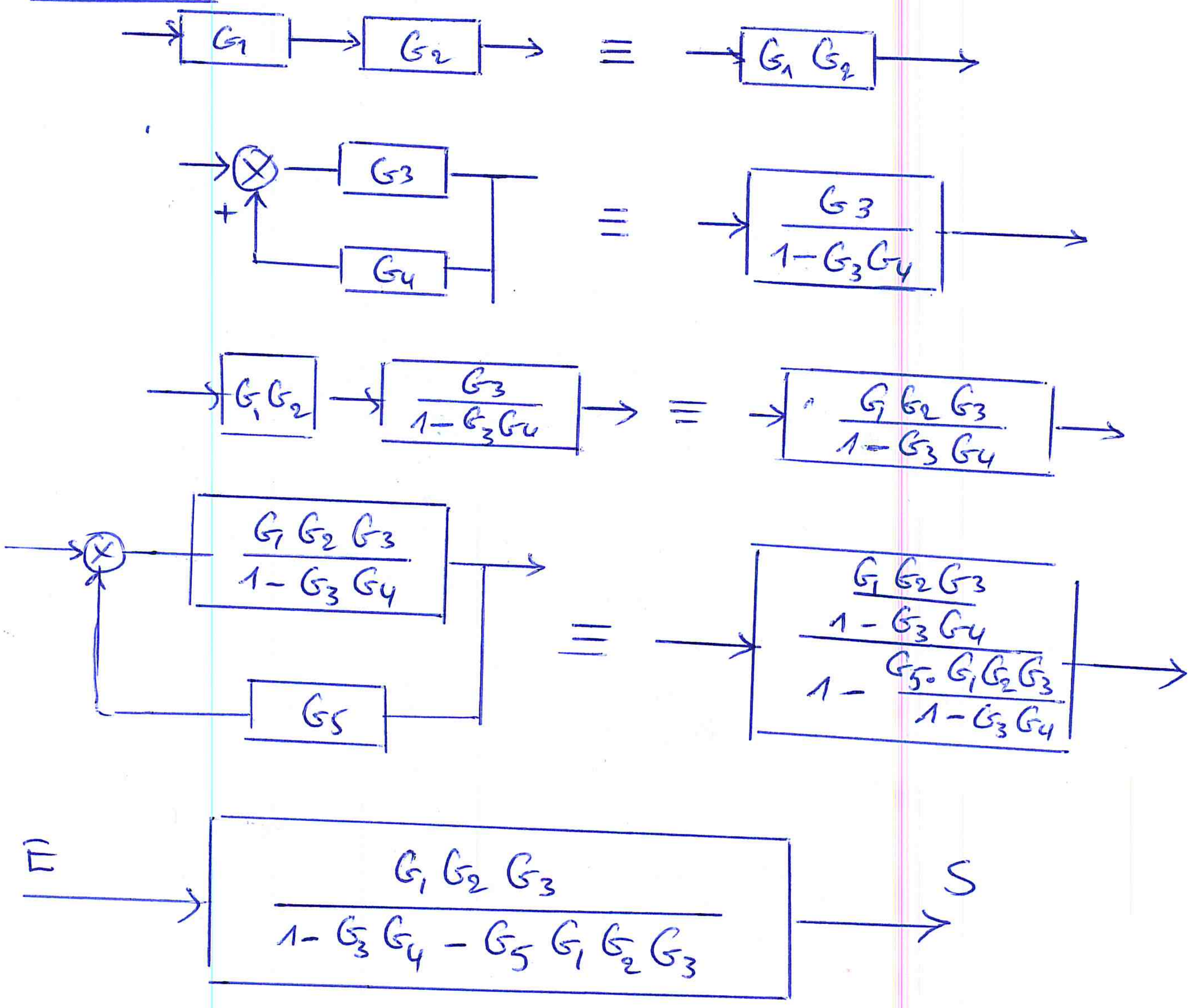
La forme canonique : $$H(p) = \frac{\dfrac{K}{K+1} G_0}{1 + 2\left(\dfrac{\dfrac{6}{\sqrt{20(K+1)}}}{\sqrt{\dfrac{K+1}{\tau_1 \tau_2}}}\right) p + \left(\dfrac{p}{\sqrt{\dfrac{K+1}{\tau_1 \tau_2}}}\right)^2}$$

A.N :

$$H(p) = \frac{\dfrac{K}{K+1}}{1 + 2\times \dfrac{\left(\dfrac{6}{\sqrt{20(K+1)}}\right)}{\sqrt{\dfrac{K+1}{20}}}\, p + \left(\dfrac{p}{\sqrt{\dfrac{K+1}{20}}}\right)^2}$$

b) $m = 0{,}7 \Rightarrow 0{,}7 = \dfrac{6}{\sqrt{20(K+1)}} \Rightarrow \boxed{K = 2{,}673469}$

Exercice 3 :



La fonction de transfert est :

$$H(s) = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 - G_3 G_4 - G_5 G_1 G_2 G_3}$$