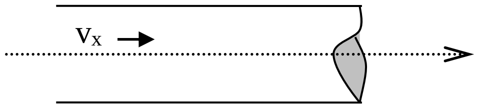
Série n°02 **Équations Hydrodynamiques (suite)**

Exercice n°1

Déterminer

1. l'expression de la vitesse Vx
2. les vitesses maximale et moyenne : Vmax et Vmoy
3. le débit Q

d'un écoulement laminaire uniforme dans une conduite à section circulaire de diamètre D = $2r_0$.



CORRECTION

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{f} + \nu\nabla^2\vec{v}$$

Par rapport aux axes x, y et z :

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}=f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2})$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}=f_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2})$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=fz-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2})$$

Ecoulement stationnaire $\frac{\partial}{\partial t}=0$

Ecoulement unidirectionnel : $v_y = v_z=0$, $v_x = v$

Les équations de Naviers – Stokes se réduisent à :

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}) \quad (1)$$

Équation uniforme :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}=0$$

Série n°02 **Équations Hydrodynamiques (suite)**

1- Section Circulaire

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \upsilon(\frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial y} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial z})$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu(\frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial y} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial z})$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = Const = \frac{\Delta p}{L} = -a$$

Δp est la chute de pression sur la longueur L.

L'équation (1) se réduit à l'équation de dérivées partielles linéaire de 2ème ordre dans la surface oyz.

$$\nabla^2 v = \frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial z^2} = \frac{\Delta p}{\mu L} = -\frac{a}{\mu} \quad (2)$$

Cette équation peut être résolue avec les conditions aux limites :

V = 0 sur la paroi du tube ou bien le débit ou la vitesse dans l'axe du tube est donné.

Section circulaire : y = z = r (rayon du cercle)

L'équation (2) devient : $$\frac{-a}{2\mu} = \frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial r} \quad (3)$$

L'intégration de l'équation (3) donne : $$\frac{\partial V_x}{\partial r} = -\frac{a}{2\mu} r + c_1 \quad (4)$$

Puis : $$V_x = -\frac{a}{4\mu} r^2 + c_1 r + c_2 \quad (5)$$

Pour r=0 $\Rightarrow$ v = v_{max} (régime laminaire) d'où (4) devient : $\frac{\partial V_{max}}{\partial r} = -\frac{a}{2\mu}(0) + c_1 = 0$

D'où : $C_1 = 0$

Série n°02 **Équations Hydrodynamiques (suite)**

Pour r=r$_0$ $\Rightarrow$ v=0 d'où (5) devient : $V_x = -\frac{a}{4\mu} r_0{}^2 + c_2 = 0$, d'où $c_2 = \frac{a}{4\mu} r_0{}^2$

L'équation (5) devient alors $V_x = \frac{a}{4\mu}(r_0^2 - r^2)$

2. Vmax : régime laminaire uniforme, alors pour r=0 $\Rightarrow$ v = v_{max} :

$$V_{\max} = \frac{a}{4\mu} r_0{}^2$$

3. Le débit Q et la vitesse moyenne V_m

$$Q = \int_{-h}^{h} v_x ds$$

S=πr^2 , dS= 2πrdr

Donc : $$Q = \int v_x ds = 2\pi \int_0^{ro} v_x r dr$$

$$= \frac{2\pi a r_0}{4\mu} \int_0^{ro} r dr = \frac{a\pi}{2\mu} \int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2) r dr$$

$$Q = \frac{a\pi r_0^4}{8\mu}$$

V_{moy}=Q_{moy}/S d'où $V = \frac{a r_0^2}{8\mu}$

$V_{moy} < v_{max}$ puisque $v_{moy} = \frac{1}{2} v_{\max}$

Série n°02 **Équations Hydrodynamiques (suite)**

Exercice n°2

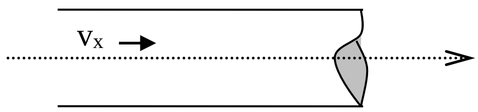
Soit un écoulement d'huile (d_h=0,9 ; μ=0,046 kgf.s/m^2) dans une conduite de section circulaire de rayon r_0=10cm. g = 9,81m/s^2 ; γ = 1000kgf/m^3.

Sachant que, $v_x = 4{,}5\left(1-\dfrac{r^2}{r_0^2}\right)$ et $\dfrac{dp}{dx} = -a = \dfrac{8\mu v_m}{r_0^2}$

Trouver :

1. le débit Q
2. la vitesse moyenne v_m
3. le régime d'écoulement (laminaire ou turbulent)
4. la perte de charge par unité de longueur

CORRECTION



1. Q = ?

S=πr^2 , $Q = \int v_x ds = 2\pi \int_0^{ro} v_x r dr$

$$Q = 2.\pi.4{,}5\int_0^{ro}\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right)rdr = 2.\pi.4{,}5\left(\frac{r_0^2}{2}-\frac{r_0^4}{4r_o^2}\right) \text{ d'où } \quad Q = 0{,}07065 \ \text{m}^3/s$$

2. v_m= ?

$$v_m = \frac{Q}{S} = \frac{0{,}07065}{\pi(0{,}1)^2} = 2{,}25 m/s$$

3. Le régime d'écoulement

$$\text{Re} = \frac{V_m.D}{\nu_h} = \frac{V_m 2r_0\rho_h}{\mu_h}$$ / sachant que $d_h = \dfrac{\gamma_h}{\gamma_{eau}}$ et $\gamma_h = \rho_h g$ on aura $\rho_h = \dfrac{\gamma_{eau} d_h}{g}$

d'où $$\text{Re} = \frac{2\times 2{,}25\times 0{,}1\times \dfrac{1000}{9{,}81}\times 0{,}9}{0{,}046} = 897{,}487$$

Re < (Rec = 2320) le régime est donc laminaire.

4. la perte de charge par unité de longueur

$$\frac{dp}{dx} = -a = \frac{\gamma dh}{dx}$$, donc $$\frac{-a}{\gamma_h} = \frac{dh}{dx} = \frac{8\mu_h v_m}{r_0^2\gamma_h} = \frac{8\mu_h v_m}{r_0^2\gamma_{eau} d_h}$$

d'où $$\frac{dh}{dx} = \frac{8\times 0{,}046\times 2{,}25}{(0{,}1)^2\times 10^3\times 0{,}9} = 0{,}092\, me/ml$$