**1.4.2. Méthode de Runge-Kutta d’ordre 4**

En reprenant le développement de Taylor de la fonction *f*, mais cette fois jusqu'à l'ordre 5, un raisonnement similaire à celui qui a mené aux méthodes de Runge-Kutta d'ordre 2 aboutit à un système de 8 équations non linéaires comprenant 10 inconnues. Le résultat final est la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, qui représente un outil d'une grande utilité.

***Algorithme de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4***

 1. Étant donné un pas de temps h, une condition initiale (t0 , y0) et un nombre maximal d'itérations N;

2. Pour 0 ≤ n ≤ N

$$k\_{1}=hf(t\_{n}, y\_{n})$$

$$k\_{2}=hf(t\_{n}+\frac{h}{2}, y\_{n}+\frac{k\_{1}}{2})$$

$$k\_{3}=hf(t\_{n}+\frac{h}{2}, y\_{n}+\frac{k\_{2}}{2})$$

$$k\_{4}=hf(t\_{n}+h, y\_{n}+k\_{3})$$

$$y\_{n+1}=y\_{n}+\frac{1}{6}(k\_{1}+2k\_{2}+2k\_{3}+k\_{4})$$

$$t\_{n+1}=t\_{n}+h$$

Ecrire $t\_{n+1}$, $y\_{n+1}$

3. Arrêt

***Exemple 1 :***

Soit l'équation différentielle : $y^{'}\left(t\right)=f\left(t,y\left(t\right)\right)=t^{3}+y^{2}\left(t\right) ;t\in \left[0,2\right] $et la condition initiale *y(0) = 0*. On a donc *t0 = 0* et *y0 = 0*, et on prend un pas de temps *h = 0.2*. En utilisant la méthode de Runge-Kutta d’ordre 4, calculer *y1 = y(0.2)* et *y2 = y(0.4)*approximations de la solution exacte *y(t)* du problème aux points *t1 = 0.2* et *t2 = 0.4*.

L’algorithme devient :





***Exemple 2 :***

Soit l'équation différentielle : *y'(t) = - y(t) + t* ; et la condition initiale *y(0) = 1*. On a donc

*t0 = 0 et y0 = 1*, et on prend un pas de temps *h = 0.1*. L’algorithme devient :



**1.5. Systèmes d’équations différentielles**

La forme générale d'un système de *m* équations différentielles avec conditions initiales s'écrit :

$$y\_{1}^{'}\left(t\right)=f\_{1}\left(t,y\_{1}\left(t\right), y\_{2}\left(t\right),…., y\_{m}\left(t\right)\right) ; y\_{1}\left(t\_{0}\right)=y\_{1,0}$$

$$y\_{2}^{'}\left(t\right)=f\_{2}\left(t,y\_{1}\left(t\right), y\_{2}\left(t\right),…., y\_{m}\left(t\right)\right) ; y\_{2}\left(t\_{0}\right)=y\_{2,0}$$

$$y\_{m}^{'}\left(t\right)=f\_{m}\left(t,y\_{1}\left(t\right), y\_{2}\left(t\right),…., y\_{m}\left(t\right)\right) ; y\_{m}\left(t\_{0}\right)=y\_{m,0}$$

Parmi les méthodes de résolution des systèmes d'équations différentielles, nous ne présentons que la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

***Algorithme de la méthode de R-K4 pour résoudre les systèmes d'équations différentielles***

1. Étant donné un pas de temps *h*, une condition initiale (*t0 , y1,0 , y2,0 , …, ym,0)* et un nombre maximal d'itérations N;

2. Pour 0 ≤ n ≤ N

Pour *i = 1, 2, …, m*

$$k\_{i,1}=hf\_{i}(t\_{n}, y\_{1,n},y\_{2,n},…, y\_{m,n})$$

Pour *i = 1, 2, …, m*

$$k\_{i,2}=hf\_{i}(t\_{n}+\frac{h}{2}, y\_{1,n}+\frac{k\_{1,1}}{2},y\_{2,n}+\frac{k\_{2,1}}{2},…, y\_{m,n}+\frac{k\_{m,1}}{2})$$

Pour *i = 1, 2, …, m*

$$k\_{i,3}=hf\_{i}(t\_{n}+\frac{h}{2}, y\_{1,n}+\frac{k\_{1,2}}{2},y\_{2,n}+\frac{k\_{2,2}}{2},…, y\_{m,n}+\frac{k\_{m,2}}{2})$$

Pour *i = 1, 2, …, m*

$$k\_{i,4}=hf\_{i}(t\_{n}, y\_{1,n}+k\_{1,3},y\_{2,n}+k\_{2,3},…, y\_{m,n}+k\_{m,3})$$

Pour *i = 1, 2, …, m*

$$y\_{i,n+1}=y\_{i,n}+\frac{1}{6}(k\_{i,1}+2k\_{i,2}+2k\_{i,3}+k\_{i,4})$$

*tn+1 = tn + h*

*Pour i = 1, 2, …, m*

Écrire *tn+1* et *yi,n+1*

3. Arrêt.

***Exemple 1 :***

Considérons le système de deux équations différentielles d’ordre 1 suivant :



Appliquons la méthode de Runge-Kutta d’ordre 4 à ce système.

On a :



On aura donc :



***Exemple 2 :***

Soit le système de deux équations différentielles d’ordre 1 suivant :



On a alors :



**1.6. Equations d’ordre supérieur**

Une équation différentielle d'ordre m avec conditions initiales est parfaitement équivalente à un système de *m* équations différentielles d'ordre 1. La forme générale d'une équation différentielle d'ordre *m* avec conditions initiales est :

$$y\_{1}^{m}\left(t\right)=f\left(t,y\left(t\right), y^{(1)}\left(t\right),y^{(2)}\left(t\right)…., y^{(m-1)}\left(t\right)\right) $$

avec m conditions initiales :

 *y(t0) = c1, y'(t0) = c2, …, y(m-2)(t0) = cm-1, y(m-1)(t0) = cm*

L'équation différentielle d'ordre *m* avec les *m* conditions initiales est équivalente au système de m équations d'ordre 1 suivant :



avec



Une fois l'équation d'ordre m transformée en un système de *m* équations différentielles d'ordre 1, on peut recourir à l'algorithme de la méthode de R-K d'ordre 4.

***Exemple 1 :***

Soit l'équation différentielle *: y(2)(t) = - y(1)(t) + (y (t))2 + t2 - 5*; et la condition initiale

*y(0) = 1 ; y(1)(0) = 2*.

On pose :



On obtient le système de 2 équations différentielles du premier ordre suivant :



***Exemple 2 :***

Soit l'équation différentielle du 3ième ordre :



On obtient le système de 3 équations différentielles du premier ordre suivant :

