# الفصل الثالث:

## الدوال الحقيقية

### I- الدوال الحقيقية بمتغير حقيقي:

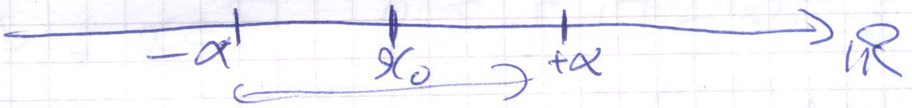
1) تعريف: الدالة الحقيقية بمتغير حقيقي هو كل تطبيق f معرف على IR ويأخذ قيمه في IR (أو معرف على جزء من IR ويأخذ قيمه في جزء من IR).

$$f: A\subseteq \mathbb{R} \to B\subseteq \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y=f(x)$$

مع $x\in\mathbb{R}$ و $f(x)\in\mathbb{R}$.

2) الدالة المعرفة في جوار نقطة $x_0$ ($x_0\in\mathbb{R}$):

نسمي جوار الـ $x_0$ في IR كل مجال مفتوح مركزه $x_0$، أي المجال $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ حيث $\alpha>0$




ونقول أن الدالة f معرفة على جوار لـ $x_0$ و عند $x_0$ نفسها إذا (⟺) إذا أمكن إيجاد عدد حقيقي $\alpha$ موجب بحيث يكون $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[\subseteq D_f$ حيث $D_f$ هي مجموعة تعريف f.

ونقول أن f معرف في جوار $x_0$ باستثناء $x_0$ إذا (⟺) إذا كان:

$$]x_0-\alpha, x_0+\alpha[\setminus\{x_0\} = ]x_0-\alpha, x_0[\cup]x_0, x_0+\alpha[\subseteq D_f$$

مثال: $f(x)=\frac{x}{x-1}$ معرفة في جوار $x_0=1$ باستثناء $x_0=1$، لأن: $\forall\alpha>0 : ]1-\alpha, 1[\cup]1, 1+\alpha[\subseteq D_f$

$g(x)=x+2$ معرفة في جوار $x_0=1$ لأن: $\forall\alpha>0, ]1-\alpha, 1+\alpha[\subseteq D_f$

3) نهاية دالة:

لتكن $f: I=[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$، ولتكن $x\in I$ و $x_0$ نقطة داخلية في I ($a<x_0<b$) و f معرفة على I باستثناء $x_0$ على الأكثر.

... نهاية ل على يمين $x_0$ إذا (⟺) كانت:

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = l_1$ موجودة وهو وحيدة،

ونقول أن $f$ تقبل نهاية على يسار $x_0$ إذا كانت: $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = l_2$

موجودة وهو وحيدة (قد يكون $l_1 = l_2$)،

ونقول أن $f$ تقبل نهاية $x_0$ إذا ($\Longleftrightarrow$) كانت:

$$\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = l \quad \text{—— (1)}$$

($l$ هي القيمة المشتركة عند ذلك $l_1$ و $l_2$)

وحيث تعني $x \overset{>}{\to} x_0$ أن $x$ يقترب من $x_0$ وهو أكبر من $x_0$،

وتعني $x \overset{<}{\to} x_0$ أن $x$ يقترب من $x_0$ وهو أقل من $x_0$،

وحيث وجود نهاية $l$ للدالة $f$ نرمز لذلك اختصارا بالرمز

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$،

~~أمثلة~~

**(1) تعريف:**

ليكن $f: I = [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $x \in I$ و $a < x_0 < b$ (أي $x_0$ نقطة داخلية من $[a, b]$) و $f$ معرف على $I$ باستثناء $x_0$ على الأكثر،

(f) نقول أن $f$ تقبل نهاية $l$ عندما تقترب $x$ من $x_0$ ونرمز لذلك بالرمز $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ إذا ($\Longleftrightarrow$) تحقق الاستلزام التالي:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon),\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

أي كلما تقترب $x$ من $x_0$ فإن ($\Leftarrow$) $f(x)$ تكون قريبة من $l$.

**مثال:** برهن أنه: $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 1) = 2$.

**الحل:** حسب التعريف:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}: |x - 1| < \delta \Rightarrow |(x^2+1) - 2| < \varepsilon$

$$|x - 1| < \delta \Rightarrow |x^2 - 1| < \varepsilon$$

أي يجب أن يكون:

$$|x - 1| < \delta \Rightarrow |(x-1)(x+1)| < \varepsilon$$

$|x - 1| < \delta$ (فرضا) $\Rightarrow |x + 1| = |(x-1) + 2| \leq |x - 1| + 2 \leq 2 + \delta$

ومنه $|x-1|<\delta \Rightarrow |(x-1)(x+1)| = |x-1||x+1| < \delta(2+\delta)$

ونريد أن يكون:

$$\delta(\delta+2)<\varepsilon \Leftrightarrow \delta^2+2\delta<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \delta^2+2\delta-\varepsilon<0$$

وبحل هذه المتراجحة ذي $\delta$ كمجهول نجد أن:

$$\Delta'=1+\varepsilon>0 \Rightarrow \delta_1=-1-\sqrt{1+\varepsilon}$$

$$\delta_2=-1+\sqrt{1+\varepsilon}$$

و $\delta_1<0$ مرفوض لأننا نبحث $\delta(\varepsilon)>0$ الذي يحقق التعريف

ولذا فإن $\delta_2=-1+\sqrt{1+\varepsilon}>0$، ومنه $\exists\,\delta(\varepsilon)=-1+\sqrt{1+\varepsilon}>0$،

يحقق التعريف.

لأنه إذا كان $|x-1|<\delta=1+\sqrt{1+\varepsilon}$ فإن $2-\sqrt{1+\varepsilon}<x<\sqrt{1+\varepsilon}$

ومنه نجد $1-\varepsilon<x^2<1+\varepsilon$ وبالتالي $|x^2-1|<\varepsilon$.

أي أن:

$$|x-1|<\delta=-1+\sqrt{1+\varepsilon} \Rightarrow (\forall x\in) \; |x^2-1|<\varepsilon$$

ملاحظة: في حالة النهاية من اليمين أو اليسار يصبح التعريف

كما يلي:

$$\forall \varepsilon>0, \exists\,\delta(\varepsilon)>0, \forall x\in I;\; x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \xrightarrow{>} x_0} f(x)=l$$

$$\forall \varepsilon>0, \exists\,\delta(\varepsilon)>0, \forall x\in I;\; x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \xrightarrow{<} x_0} f(x)=l.$$

## 8 النهايات غير المنتهية:

1 نقول أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$ إذا ($\Leftrightarrow$) تحقق التعريف التالي:

$$\forall \varepsilon>0, \exists K(\varepsilon)>0 \;/\; x\geq K \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$$

ونقول أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=l$ إذا ($\Leftrightarrow$) تحقق

$$\forall \varepsilon>0, \exists K(\varepsilon)<0 \;/\; x\leq K \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$$

② ونقول أن $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ إذا (⟺) تحقق،
$\forall A > 0, \exists \delta(A) > 0, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \geq A$

ونقول أن $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ إذا (⟺) تحقق

$\forall B < 0, \exists \delta(B) > 0, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \leq B$

③ نقول أن، $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ إذا (⟺) تحقق،

$\forall L > 0, \exists H(L) > 0, x \geq H \Rightarrow f(x) \geq L$

ونقول أن، $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ إذا (⟺) تحقق

$\forall L > 0, \exists H(L) < 0, x \leq H \Rightarrow f(x) \geq L$

ونقول أن، $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ إذا (⟺) تحقق،

$\forall L < 0, \exists H(L) > 0, x \geq H \Rightarrow f(x) \leq L$

ونقول أن، $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ إذا (⟺) تحقق،

$\forall L < 0, \exists H(L) < 0, x \leq H \Rightarrow f(x) \leq L$

مثال، برهن أن، $\lim_{x \to +\infty} (1 - x^2) = -\infty$

الحل،

$\forall K < 0, \exists M(K) > 0 ?, x \geq M \Rightarrow (1 - x^2) \leq K$

$x \geq M > 0 \Rightarrow x^2 \geq M^2 \Rightarrow 1 - x^2 \leq 1 - M^2$

فنضع إذن $K = 1 - M^2$ ومنه $M^2 = 1 - K$

إذن، $K < 0$، ومنه $\exists M(K) = \sqrt{1-K} > 0$ يحقق المطلوب.

ملاحظة، إذا كانت $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ و $g(x)$ محدودة في جوار $\infty$ ($g(x) \geq K$) فإن $\lim_{x \to \infty} (f+g)(x) = \infty$

لأن $f(x) + g(x) \geq f(x) + K$

$\lim_{x \to \infty} (f+g)(x) \geq \lim_{x \to \infty} f(x) + K = \infty$

مثال، $\lim_{x \to \infty} (x + \sin x) = \infty$ لأن $\lim_{x \to \infty} x = \infty$ و $\sin x \geq -1$

محدود من الأدنى (رغم أن $\lim_{x \to \infty} \sin x$ غير موجودة)