

Cours 3 : vibrations libres non-amorties (suite)**الدرس 3 : الاهتزازات الحرة الغير متخامدة (تكملة)****5- Rappel sur la résolution des équations différentielles du second ordre sans second membre**

L'écriture générale d'une équation différentielle du second ordre sans second membre s'écrit comme suit :

$$a.\ddot{x}(t) + b.\dot{x}(t) + c.x(t) = 0 \quad (36.1)$$

Où :

- $x(t)$: est l'équation de la trajectoire qui décrit le déplacement du corps en vibration a chaque instant (t),
- $\dot{x}(t)$: est l'équation de la vitesse qui est la première dérivée de l'équation de la trajectoire $x(t)$,
- $\ddot{x}(t)$: est l'équation de l'accélération qui est la dérivée seconde de l'équation de la trajectoire $x(t)$.

Pour résoudre une équation différentielle du second ordre sans second membre on procède comme suit :

- a) On écrit l'équation caractéristique

$$a.r^2 + b.r + c = 0 \quad (37.1)$$

Où :

- a , b et c sont les coefficients des fonctions $\ddot{x}(t)$, $\dot{x}(t)$ et $x(t)$ respectivement

- b) On étudie le signe du discriminant Δ de l'équation caractéristique (37.1)

$$\Delta = b^2 - 4.a.c \quad (38.1)$$

b-1) Si $\Delta > 0$ (Delta positif), la fonction $x(t)$ est donnée par la relation suivante :

$$x(t) = Ae^{r_1.t} + Be^{r_2.t} \quad (39.1)$$

Dans l'équation (39.1) :

- A et B sont des constants calculés à partir des conditions initiales
- r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique (37.1) données comme suit

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

$$r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

b-2) Si $\Delta = 0$ (Delta nul), la fonction $x(t)$ est donnée par la relation suivante :

$$x(t) = (At + B)e^{r \cdot t} \quad (40.1)$$

Dans l'équation (40.1) :

- A et B sont des constants calculés à partir des conditions initiales
- r est la racine double de l'équation caractéristique (37.1) donnée comme suit :

$$r = \frac{-b}{2.a}$$

b-3) Si $\Delta < 0$ (Delta négatif), la fonction $x(t)$ est donnée par la relation suivante :

$$x(t) = [A \cos(\beta.t) + B \sin(\beta.t)].e^{\alpha.t} \quad (41.1)$$

Dans l'équation (41.1) :

- A et B sont des constants calculés à partir des conditions initiales,
- α et β sont des coefficients calculés à partir des racines de l'équation (37.1) et sont donnés comme suit :

$$\alpha = \frac{-b}{2.a} \text{ (La partie réelle de la racine)} \quad \beta = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2.a} \text{ (La partie imaginaire de la racine en valeur absolue)}$$