المحور الثالث:

اختبـــــــارات

الفـــــــروض

1 . مقدمة:

بالرغم من أهمية موضوع تقدير المعالم الذي تناولنا دراسته في المحور السابق إلا أنه غالب ما يكون الاهتمام منصبا ليس على مجرد تقدير المعالم ولكن على عملية وضع القواعـــد التي تسمح بالتوصل إلى قرار بقبول أو رفض فرض عن معالم مجتمع أو أكثر وهذا ما يسمى **باختبارات الفروض.**

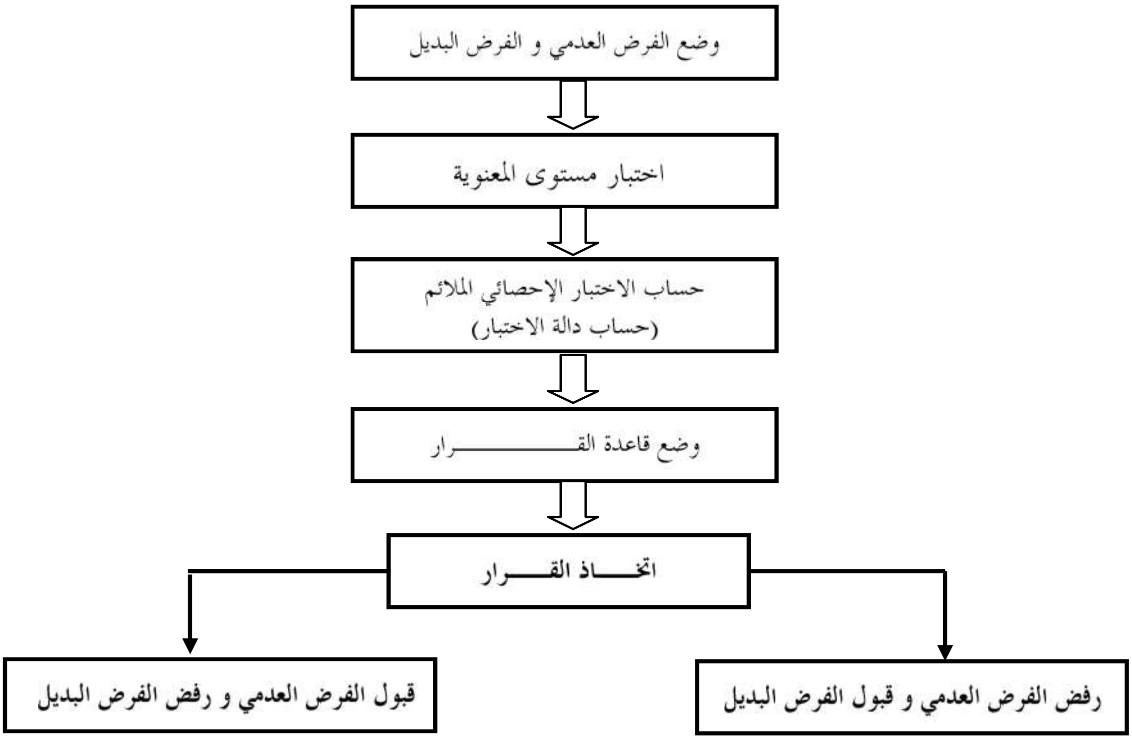
فمثلا يمكن للمسؤول عن الرقابة الإحصائية على جودة المنتجات أن يقرر ما إذا كانت الوحدات المنتجة من صنف معين تحقق الموصفات المطلوبة أم لا، فإذا كانت الموصفات المطلوبة تـــحدد أن وزن الوحدة المنتجة من صنف معين تساوي 1كلغ ، وبالتالي فان المسؤول عن الرقابة الإحصائية في هـــذه الحالة يرغب في اختبار الفرض التالي : $\mu = 1$ ، حيث μ يرمز لمتوسط مجتمع الوحدات المنتجة مـــن هذا الصنف.

وعلى العموم فان الفرض الإحصائي هو ادعاء أو اعتقاد يتعلق بقيمة غير معلومة للمؤشر(أي للمعلمة) ويراد اختبار مدى صحتها.كذلك فان الفرض الإحصائي هو كل عبارة صحتها أو عـــدم صحتها بحاجة إلى قرار.

2 . خطوات اختبارات الفروض:

عادة لإجراء اختبار الفروض هناك خمس خطوات يجب القيام بها، و يمكن توضيحها في الشكل التالي:

الشكل (1) خطوات اختبارات الفروض



و من أجل فهم و استيعاب الخطوات السابقة، يجب دراسة و تحليل المفاهيم التالية:

- ❖ الفرض العدمي و الفرض البديل.
- ❖ الخطأ من النوع الأول و الخطأ من النوع الثاني.
- ❖ مستوى المعنوية
- ❖ إحصاء الاختبار.

وفيما يلي سوف نتناول تحليلا موجزا لهذه المفاهيم.

2-1.الفرض العدمي والفرض البديل " Null and Alternative Hypothesis ":

الفرض العدمي يرمز له بالرمز H_0 . و هو صفة مميزة لا تحتاج إلى إثبات ، فنحن نفترض أنه صحيحا ما لم يظهر بوضوح أنه غير صحيح ، فمثلا عادة ما تكون عملية تعبئة المنظف في الأكياس بمتوسط 500غ . في أي وقت من عملية التعبئة ، نفترض أن هذا هو المتوسط ما لم يكن دليل العينة يشير بشكل واضح إلى أن المتوسط قد انحرف عن ما هو محدد . وبالتالي يوضع الفرض العدمي على النحو التالي :

$$H_0 : \mu = 500$$

وعلى العموم ، الفرض العدمي يتصف بحقيقة أننا نعامله و كأنه صحيح ما لم يكن ادعائه يتناقض بوضوح مع بيانات العينة، لذا إذا كان الفرض العدمي غير مناقض بوضوح ، فانه لا يوجد سببا كافيا لرفضه.وغالبا ما ننظر إلى الفرض العدمي على أنه نقطة البداية في عملية التحليل.

أما **الفرض البديل** فيرمز له بالرمز H_1 ، و هو بديل لحالة الفرض العدمي ، أي هو الفرض الذي يمكن قبوله عند رفض الفرض العدمي ، ففي مثال عملية التعبئة ،يكون الفرض البديل هو أن متوسط العملية الحالي ليس 500 غ .و بالتالي يوضع الفرض البديل على النحو التالي:

$$H_1 : \mu \neq 500$$

والفرض البديل يأخذ ثلاثة أشكال وهي:

- الفرض البديل **ذو الذيلين (الطرفيين)** : و فيه تكون معلمة المجتمع θ لا تساوي قيمة معينة θ_0 ففي مثال عملية التعبئة دائما يكون $H_1 : \mu \neq 500$ هذا من جهة. ومن جهة أخرى نضع نصف قيمة α في كل من طرفي توزيع دالة الاختبار، أي تكون $\frac{\alpha}{2}$ على كل طرف ،كما هو موضح في الشكل التالي .

الشكل (02) اختبار ذو طرفين عند مستوى معنوية 0.05

كتاب الاحصاء الاحتمالي ص 160

فنقبل الفرض H_0 إذا وقعت قيمة دالة الاختبار في منطقة قبول H_0 ، و نرفض H_0 إذا وقعت قيمة دالة الاختبار في منطقة رفض H_0 ، وهي المنطقة المظللة في الشكل (02) السابق .

- الفرض البديل ذو **الطرف الأعلى (الطرف الأيمن)**: و فيه تكون معلمة لمجتمع θ أكبر من قيمة معينة θ_0 ، ففي المثال السابق يكون الفرض البديل $H_1 : \mu > 500$ هذا من جهة. ومن جهة أخرى نضع قيمة α في الطرف الأيمن (الأعلى) من توزيع دالة (اقتران) الاختبار كما هو موضح في الشكل التالي :

الشكل (03) اختبار ذو طرف أيمن عند مستوى معنوية 0.05

كتاب الاحصاء الاحتمالي ص 159

فنقبل H_0 إذا وقعت قيمة دالة الاختبار في منطقة قبول H_0 ، ونرفض H_0 إذا وقعت قيمة دالة الاختبار في منطقة رفض H_0 ، وهي المنطقة المظللة في الشكل (03) السابق.

- الفرض البديل **ذو الطرف الأدنى (الطرف الأيسر)**: وفيه تكون معلمة المجتمع θ أصغر من قيمة معينة θ_0 ، ففي المثال السابق يكون الفرض البديل : $H_1 : \mu < 500$ ، ونضع قيمة α في الطرف الأيسر من توزيع دالة الاختبار و ذلك كما هو موضح في الشكل التالي .

الشكل (04) اختبار ذو طرف أيسر عند مستوى معنوية 0.05

كتاب الاحصاء الاحتمالي ص 159

بنفس الطريقة السابقة ، نقبل H_0 إذا وقعت قيمة دالة الاختبار في منطقة قبول H_0 ، ونرفض H_0 إذا وقعت قيمة دالة الاختبار في منطقة رفض H_0 ، وهي المنطقة المظللة في الشكل (04) السابق.

2-2 . الخطأ من النوع الأول و الخطأ من النوع الثاني:

من المعلوم أنه عند اتخاذ أي قرار إحصائي فان ذلك ينطوي على أخطاء بنسب معينة ، حيث أنه من المحتمل أن نرفض فرضية معينة في حين أنها صحيحة ، والعكس صحيح. لهذا فان هناك نوعان من الأخطاء الإحصائية وهي:

- **الخطأ من النوع الأول (α):** هو الخطأ الذي نقع فيه عندما نرفض الفرضية الصفرية H_0 بالرغم من صحتها ، ويرمز لاحتمال وقوع هذا الخطأ بالرمز **α**، ونسميه "**مستوى دلالة الاختبار**" أو" **مستوى معنوية الاختبار**".

- **الخطأ من النوع الثاني (β)**: هو الخطأ الذي نقع فيه عندما نقبل الفرضية الصفرية بالرغم من عدم صحتها ، ويرمز إلى احتمال هذا الخطأ بالرمز **β**.

وعلى العموم يمكن توضيح نوعي الخطأ من خلال الجدول التالي :

الجدول (01) جدول توضيحي لنوعي الخطأ

القرار / الفرض العدمي	قبول الفرض العدمي H_0	رفض الفرض العدمي H_0
الفرض العدمي H_0 صحيح	قـــرار صحيح	خطأ من النوع الأول (α)
الفرض العدمي H_0 خاطئ	خطأ من النوع الثاني (β)	قـــرار صحيح

استنادا إلى هذا الجدول فان الفرض العدمـــي إما أن يكون صحيحا أو غير صحيحا وهو الظاهر في العمود الأول ، و فيما يتعلق بالقرار، فإننا إما نقبل الفرض العدمي أو نرفضه ، و بالتالي هناك أربعة احتمالات في هذا الشأن و هي :

- قبول H_0 وهو صحيح, و هذا يمثل بالطبع قرارا صحيحا.
- رفض H_0 وهو صحيح، و لاشك أن هذا القرار خطأ، و يطلق عليه خطأ من النوع الأول.
- قبول H_0 وهو غير صحيح، هذا بدوره قرار خاطئ ، و يسمى الخطأ من النوع الثاني.
- رفض H_0 وهو غير صحيح، و هذا يمثل قرار صحيحا.

بصفة عامة يمكن توضيح الخصائص التالية للعلاقـــة بين الخطأيـــن:

- يرتبط الخطأ من النوع الأول (α) ارتباطا عكسيا مع الخطأ من النوع الثاني (β) ،أي أن انخفاض احتمال أحدهما يؤدي إلى زيادة احتمال الأخر.
- زيادة حجم العينة يؤدي إلى تناقص كلا النوعين من الخطأ.
- إذا كان الفرض العدمي H_0 غير صحيح ، فان قيمة الخطأ من النوع الثاني (β) تكون أكبر ما يمكن عندما تكون القيمة الحقيقية للمعلمة تكاد تتطابق مع القيمة الافتراضية لها ، و العكس صحيح عندما يكون الفرق بين القيمتين الحقيقية و الافتراضية ، فان قيمة الخطأ من النوع الثاني (β) تقل.

2-3 . مستوى المعنوية أو مستوى الدلالة:

في اختبار فرضية معينة ، فان أقصى احتمال و الذي يمكن أن نتحمل بـــه خطأ من النـــوع الأول يسمى **مستوى المعنوية للاختبـــار** ، هذا الاحتمال يرمز له بالرمز α ويحدد بشكل عام قبل سحـــب أي عينة ، لكـــي لا تتؤثر النتائج التي حصلنا عليها في اختبارنا . و من الناحية العملية فإننا نستخـــدم عادة مستوى المعنوية 0.05 أو 0.01 ، و إذا كان هناك قيم أخرى يتم استخدامها.

إن استخدامنا لمستوى المعنوية 0.05 أو 5 % في اختبار فرضية معينة ، فهذا يعني أن هناك حوالي 5 فرص من 100 أننا سوف نرفض الفروض و هي صحيحة ؛ بمعنى أننا سنكون واثقين بنسبة95 % في أننا سنتخذ القرار الصحيح ، و بالمقابل فانه من الممكن أن نكون على خطأ باحتمال قدره 0.05.

2-4. إحصاء الاختبار Test Statistic :

إحصاء الاختبار هو اقتران إحصائي يساعدنا على اتخاذ قرار حول فرضية إحصائية معينة ، و يتم حساب قيمته من بيانات العينة ، و بالتالي فهو عبارة عن متغير عشوائي تتغير قيمته بتغير بيانات العينـــة الإحصائية التي نأخذها من المجتمع الإحصائي.

ومن القيمة التي نحصل عليها لإحصاء الاختبار نقرر ما إذا كان هناك سببا قويا لرفض H_0 وقبول H_1 أم لا.

3. اختبار الفروض حول وسط المجتمع μ :

3-1.اختبار الفروض حول وسط المجتمع μ ، عندما يكون هذا المجتمع طبيعي ذو تباين معلوم:

نظرية (1): إذا كانت $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا وسطه μ وتباينه σ^2 **معلوم** ، فان إحصاء الاختبار المناسب هو: $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

وأردنا اختبار الفرضية الصفرية: $H_0 : \mu = \mu_0$ مقابل الفرضية البديلة :

1. $H_1 : \mu \neq \mu_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت :

$$Z < -z_{\alpha/2} \quad \text{أو} \quad Z > z_{\alpha/2}$$

2. $H_1 : \mu > \mu_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت :

$$Z > z_{\alpha}$$

3. $H_1 : \mu < \mu_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت :

$$Z < -z_{\alpha}$$

مثال (01): تخضع أوزان عبوات أحد مساحيق الغسيل لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 7 غ ومعدله μ عند مستوى الدلالة 0.05 اختبر الفرضية الصفرية $H_0 : \mu = 200$ مقابل الفرضية البديلة $H_1 : \mu \neq 200$ ، إذا كان الوسط الحسابي لعينة حجمها 25 هو 208 .

الحل:

$$H_0 : \mu = 200$$

$$H_1 : \mu \neq 200$$

$$\alpha = 0.05$$

بما أن الفرضية البديلة لا تحدد اتجاها واحدا ، فان الاختبار المناسب هو ذو طرفين ، والقيم الحرجة تكون: $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$ ، $-z_{\alpha/2} = -z_{0.025} = -1.96$

نرفض H_0 عند مستوى الدلالة 0.05 إذا كان :

$$Z < -1.96 \quad \text{أو} \quad Z > 1.96$$

والآن نقوم بحساب Z من خلال المعادلة التالية : $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

أي : $$Z = \frac{208-200}{7/\sqrt{25}} = 5.5$$

نلاحظ أن $5.5 > 1.96$ أي أن قيمة Z تقع في منطقة الرفض (المنطقة الحرجة) ، لذلك نرفض H_0 ونقبل H_1 عند مستوى المعنوية 0.05، أي $\mu > 200$ ، لأن Z وقعت في منطقة الرفض اليمنى ، أي على يمين $z_{\alpha/2}$.

2-3.اختبار الفروض حول وسط المجتمع ، عندما يكون هذا المجتمع طبيعي ذو تباين مجهول، وحجم العينة كبير:

نظرية (2): إذا تم أخذ عينة عشوائية كبيرة الحجم من مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا وسطه μ وتباينه σ^2 **مجهول** ، فان إحصاء الاختبار المناسب هو: $$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

وأردنا اختبار الفرضية الصفرية: $H_0 : \mu = \mu_0$ مقابل الفرضية البديلة :

1. $H_1 : \mu \neq \mu_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت :

$$Z > z_{\alpha/2} \quad \text{أو} \quad Z < -z_{\alpha/2}$$

2. $H_1 : \mu > \mu_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت :

$$Z > z_{\alpha}$$

3. $H_1 : \mu < \mu_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت :

$$Z < -z_{\alpha}$$

مثال (02): تخضع أعداد حبات التفاح على شجرة التفاح في بستان كبير لتوزيع طبيعي وسطه 150 حبة ، بدأ مالك البستان استعمال نوع جديد من السماد ، وأراد أن يختبر ما إذا زاد الإنتاج، تبعا لذلك أخذ عينة مكونة من 64 شجرة، فوجد أن الوسط الحسابي لأعداد الحبات في العينة 156 بانحراف معياري 12 حبة .

المطلوب: هل تشير هذه البيانات إلى زيادة في الإنتاج عند مستوى الدلالة 0.05 .

الحل:

إذا لم يكن هناك زيادة في إنتاج الأشجار التي تم تسميدها فهذا يعني أن معدل عدد الحبات يكون $\mu = 150$ ، أما إذا كان هناك زيادة في الإنتاج فهذا يعني أن المعدل سيكون أكثر من 150 .

وبالتالي المطلوب اختبار ما يلي: $H_0 : \mu = 150$

$$H_1 : \mu > 150$$

$$\alpha = 0.05$$

نلاحظ أن الفرضية البديلة ذات طرف واحد ، إذن القيمة الحرجة هي : $z_{0.05} = 1.645$

نرفض H_0 عند مستوى الدلالة 0.05 إذا كان : $Z > 1.645$

والآن نقوم بحساب Z من خلال المعادلة التالية : $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$

فنجد: $Z = \dfrac{156-150}{12/\sqrt{64}} = 4$

نلاحظ أن $4 > 1.645$ أي أن قيمة Z تقع في منطقة الرفض (المنطقة الحرجة) ، لذلك نرفض H_0 ونقبل H_1 عند مستوى المعنوية 0.05 ؛ أي أن هناك زيادة في الإنتاج ، ومن ثم فان المعدل سيكون أكثر من 150 .

3– 3.اختبار الفروض حول وسط المجتمع ، عندما يكون هذا المجتمع طبيعي ذو تباين مجهول، وحجم العينة صغير:

نظرية (3): إذا تم أخذ عينة عشوائية صغيرة الحجم من مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا وسطه μ وتباينه σ^2 **مجهول** ، فان إحصاء الاختبـــار المناسب هو: $T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ ، وهو توزيـــع t بدرجات حريـــة $(\upsilon = n - 1)$.

وأردنا اختبار الفرضية الصفرية: $H_0 : \mu = \mu_0$ مقابل الفرضية البديلة :

1. $H_1 : \mu \neq \mu_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت :

$$T > t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)} \quad \text{أو} \quad T < -t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)}$$

2. $H_1 : \mu > \mu_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت :

$$T > t_{(\alpha,\upsilon)}$$

3. $H_1 : \mu < \mu_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت :

$$T < -t_{(\alpha,\upsilon)}$$

مع الإشارة إلى أن القيمة الحرجة $t_{(\frac{\alpha}{2})}$ هي قيمة على المحور الأفقـــي لتوزيع t ذي درجـــات حرية $(n - 1)$ ويقع إلى يمينها مساحة قدرها $\frac{\alpha}{2}$. أما القيمة الحرجة $t_{(\alpha)}$ فهي قيمة على المحور الأفقي لتوزيع t ذي درجات حريـــة $(n - 1)$ ويقع إلى يمينها مساحة قدرها α .

مثال (03): استنتج أحد الباحثين أن معـــدل عدد الساعات التي يقضيـــها طلبة إحدى الجامعات في الدراسة أثناء أسبوع الامتحانات هو 50 ساعة ، والمطلوب هو اختبار هذه الفرضية مقابل فرضية أن معدل عدد الساعات يختلف عن 50 ساعة ، إذا كان الوسط الحسابي لعدد الساعات التي قضاها 10 طلاب أثناء ذلك الأسبوع هو 51.7 ساعة بانحراف معياري 6.3 ساعة .مع العلم أن مستوى الدلالة هو 0.05 ، وتوزيع عدد الساعات الدراسية يقترب من التوزيع الطبيعي .

الحل:

$$H_0 : \mu = 50$$

$$H_1 : \mu \neq 50$$

$$\alpha = 0.05$$

بما أن الفرضية البديلة لا تحدد اتجاها واحدا ، فان الاختبار المناسب هو ذو طرفين ، وبما أن توزيـــع المجتمع طبيعي ، وتباينه غـــر معلوم ، وحجم العينة صغيـــر، نستعمل توزيع t بدرجـــات حريـــة (n − 1) ، ولذلك فالقيم الحرجة هي:

$$-t_{(0.025,9)} = -2.262 \quad ، \quad t_{(0.025,9)} = 2.262$$

نرفض H_0 عند مستوى الدلالة 0.05 إذا كان :

$$T < -2.262 \quad \text{أو} \quad T > 2.262$$

والآن نقوم بحساب T من خلال المعادلة التالية : $T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$

أي : $T = \dfrac{51.7-50}{6.3/\sqrt{10}} = 0.85$

نلاحظ أن $-2.262 < 0.85 < 2.262$ ؛ أي أن قيمة T تقع في منطقة القبول ، لذلك نقبل H_0 ونرفض H_1 عند مستوى المعنوية 0.05، أي أن استنتاج الباحث صحيح ($\mu = 50$).

4.اختبار الفروض حول الفرق بين وسطي مجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$:

4-1.عندما يكون تبايني المجتمعين معلومين :

نظرية (4): إذا كان $\overline{X}_1$ هو الوسط الحسابي لعينة عشوائية حجمها n_1 تم سحبها من مجتمع له توزيع طبيعي متوسطه μ_1 وتباينه σ_1^2 **معلوم** ، وكان $\overline{X}_2$ هو الوسط الحسابي لعينــــة عشوائية حجمها n_2 مستقلة عن الأولى تم سحبها من مجتمع له توزيع طبيعي متوسطه μ_2 وتباينه σ_2^2 **معـــلوم** أيضا .

وأردنا اختبار الفرضية الصفرية: $H_0 : (\mu_1\text{-}\mu_2) = d_0$ مقابل الفرضية البديلة :

1. $H_1 : (\mu_1\text{-}\mu_2) \neq d_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت :

$$Z < -z_{\alpha/2} \quad \text{أو} \quad Z > z_{\alpha/2}$$

2. $H_1 : (\mu_1\text{-}\mu_2) > d_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت :

$$Z > z_\alpha$$

3. $H_1 : (\mu_1\text{-}\mu_2) < d_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت :

$$Z < -z_\alpha$$

مع العلم أن قيمة Z يتم حسابها وفقا للصيغة التالية :

$$Z = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

في معظم الحالات تكون الفرضـــية الصفـــرية في هذا النوع من الاختبار على الشكـــل:

$H_0 : (\mu_1\text{-}\mu_2) = 0$ أي أن وسطي المجتمعين متساويين.

مثال (04): أخذت عينة عشوائية حجمها 16 من مجتمع طبيعي تباينه 9 فوجد أن وسطها الحسابي 69 ،ثم أخذت عينة عشوائية أخرى حجمها 20 من مجتمع طبيعي آخر مستقل عن الأول تباينه 25 فوجد أن وسطها الحسابي 71.

المطلوب : أختبر الفرضية $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ مقابل الفرضية $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ عند مستوى المعنوية 0.05.

الحل:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \Rightarrow H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = 0$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \Rightarrow H_1 : (\mu_1 - \mu_2) \neq 0$$

$$\alpha = 0.05$$

بما أن الفرضية البديلة لا تحدد اتجاها واحدا ، فان الاختبار المناسب هو ذو طرفين ، والقيم الحرجة تكون: $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$ ، $-z_{\alpha/2} = -z_{0.025} = -1.96$

نرفض H_0 عند مستوى الدلالة 0.05 إذا كان :

$$Z < -1.96 \quad \text{أو} \quad Z > 1.96$$

والآن نقوم بحساب Z من خلال المعادلة التالية :

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

أي :

$$Z = \frac{(69 - 71) - 0}{\sqrt{\frac{9}{16} + \frac{25}{20}}} = -1.486$$

نلاحظ أن : $-1.486 > -1.96$ ؛ أي أن قيمة Z تقع في منطقة قبول الفرضية الصفرية، لذلك نقبل H_0 ونرفض H_1 عند مستوى المعنوية 0.05، أي أن وسطي المجتمعين متساويين عند نفس مستوى المعنوية.

2-4.عندما يكون تبايني المجتمعين مجهولين وحجمي العينتين كبير بدرجة كافية :

نظرية (5): إذا كان $\overline{X}_1$ هو الوسط الحسابي لعينة عشوائية حجمها n_1 **كبيــر** تم سحبها من مجتمع متوسطه μ_1 وتباينه σ_1^2 **مجهول** ، وكان $\overline{X}_2$ هو الوسط الحسابي لعينــة عشوائية أخرى حجمها n_2 **كبير** أيضا مستقلة عن الأولى تم سحبها من مجتمع متوسطه μ_2 وتباينه σ_2^2 **مجهول** أيضا .فان إحصاء الاختبار المناسب هو Z .

وأردنا اختبار الفرضية الصفرية: $H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = d_0$ مقابل الفرضية البديلة :

1. $H_1 : (\mu_1 - \mu_2) \neq d_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت :

$$Z < -z_{\alpha/2} \quad \text{أو} \quad Z > z_{\alpha/2}$$

2. $H_1:(\mu_1-\mu_2) > d_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت :

$$Z > z_\alpha$$

3. $H_1:(\mu_1-\mu_2) < d_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت :

$$Z < -z_\alpha$$

مع العلم أن قيمة Z يتم حسابها وفقا للصيغة التالية :

$$Z = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - d_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

مثال (05): أخذت عينة عشوائية من مجتمع معين، وكان حجمها 50 ، ووسطها الحسابي 57.5 وانحرافها المعياري 6.2 ، ثم أخذت عينة عشوائية أخرى مستقلة عن الأولى من مجتمع آخر، وكان حجمها 60 ، ووسطها الحسابي 54.4 وانحرافها المعياري 10.6 .

المطلوب: هل نستطيع أن نستنتج أن متوسط المجتمع الأول أكبر من متوسط المجتمع الثاني عند مستوى الدلالة 0.05 .

الحل: نريد اختبار ما يلي :

$$H_0 : (\mu_1-\mu_2) = 0$$
$$H_1 : (\mu_1-\mu_2) > 0$$
$$\alpha = 0.05$$

نلاحظ أن الفرضية البديلة ذات طرف واحد ، إذن القيمة الحرجة هي : $z_{0.05} = 1.645$

نرفض H_0 عند مستوى الدلالة 0.05 إذا كان : $Z > 1.645$

والآن نقوم بحساب Z من خلال المعادلة التالية : $Z = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - d_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$

فنجد: $$Z = \frac{(57.5 - 54.4) - 0}{\sqrt{\frac{(6.2)^2}{50} + \frac{(10.6)^2}{60}}} = 1.908$$

نلاحظ أن $1.908 > 1.645$ أي أن قيمة Z تقع في منطقة رفض H_0 (المنطقة الحرجة) ، لذلك نرفض H_0 ونقبل H_1 ؛ وعليه نستنتج أن هناك دليلا كافيا على أن متوسط المجتمع الأول أكبر من متوسط المجتمع الثاني عند مستوى المعنوية 0.05.

3-4.عندما يكون تبايني المجتمعين مجهولين والعينتان مستقلتان وصغيرتا الحجم :

وفي هذا العنصر لدينا حالتين:

- حالة تبايني المجتمعين مجهولين ومتساويين.
- حالة تبايني المجتمعين مجهولين وغير متساويين.

ويمكن توضيح كل هذا في النظريتين **السادسة** و**السابعة** التاليتين.

نظرية (6): إذا كان $\overline{X}_1$ هو الوسط الحسابي لعينة عشوائية حجمها n_1 **صغير** سحبت من **مجتمع طبيعي** وسطه μ_1 وتباينه σ_1^2 ، وكان $\overline{X}_2$ هو الوسط الحسابي لعينة عشوائية أخرى مستقلة عن الأولى حجمها n_2 **صغير** سحبت من **مجتمع طبيعي** آخر مستقل عن المجتمع الأول وسطه μ_2 وتباينه σ_2^2 ، وكان **تبايني المجتمعين مجهولين ومتساويين** ، فان إحصاء الاختبار المناسب هو:

$$T = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - d_0}{\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$$

وتوزيعه الاحتمالي هو توزيع t بدرجة حرية $\upsilon = n_1 + n_2 - 2$

وأردنا اختبار الفرضية الصفرية: $H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = d_0$ مقابل الفرضية البديلة :

1. $H_1 : (\mu_1 - \mu_2) \neq d_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت :

$$T < -t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)} \quad \text{أو} \quad T > t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)}$$

2. $H_1 : (\mu_1 - \mu_2) > d_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت :

$$T > t_{(\alpha,\upsilon)}$$

3. $H_1 : (\mu_1 - \mu_2) < d_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت :

$$T < -t_{(\alpha,\upsilon)}$$

مثال (06): قدمت مؤسستين من المؤسسات المنتجة للآلات عرضين ، يتضمن كل عرض طريقة معينة للإنتاج ، وانعكس ذلك في الزمن اللازم لإنتاج الوحدة من المنتج ، ولقياس متوسط هذا الزمن للآلتين تم قياس الزمن لعدد 5 وحدات من الآلة الأولى ، و6 وحدات من الآلة الثانية وكانت كما يلي :

الطريقة الأولى (الزمن بالدقيقة)	2	4	9	3	2	
الطريقة الثانية (الزمن بالدقيقة)	3	7	5	8	4	3

المطلوب : اختبار الفرض القائل بعدم وجود فروق معنوية بين متوسطي الزمن للآلتين عند مستوى معنوية 0.01 ، مع العلم أن تبايني المجتمعين مجهولين ومتساويين.

الحل:

قبل اختبار الفرضية السابقة يجب أولا حساب ما يلي : $\overline{X}_1$ ، $\overline{X}_2$ ، s_1^2 ، s_2^2 ، s_p^2

وبعد القيام بجميع العمليات الحسابية نجد أن :

$$\overline{X}_1 = 4 \quad , \quad \overline{X}_2 = 5 \quad , \quad s_1^2 = 8.5 \quad , \quad s_2^2 = 4.4 \quad , \quad s_p^2 = 6.22$$

وعليه فان اختبار الفرضية السابقة يتم وفقا للخطوات التالية :

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \Rightarrow H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = 0$$
$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \Rightarrow H_1 : (\mu_1 - \mu_2) \neq 0$$
$$\alpha = 0.01$$

بما أن الفرضية البديلة لا تحدد اتجاها واحدا ، فان الاختبار المناسب هو ذو طرفين ، والقيم الحرجة تكون: $t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)} = t_{(0.005,9)} = 3.250$ ، $-t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)} = -t_{(0.005,9)} = -3.250$

نرفض H_0 عند مستوى الدلالة 0.01 إذا كان :

$$T > 3.250 \quad \text{أو} \quad T < -3.250$$

والآن نقوم بحساب T من خلال المعادلة التالية : $T = \dfrac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - d_0}{\sqrt{s_p^2(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}}$

أي :

$$T = \frac{(4-5)-0}{\sqrt{6.22(\frac{1}{5}+\frac{1}{6})}} = -0.662$$

نلاحـــظ أن : $-0.662 > -3.250$ ؛ أي أن قيمة T تقع في منطقة قبول الفرضية الصفرية، لذلك نقبل H_0 ونرفض H_1 ، ومنه لا توجد فروق معنوية بين متوسطي الزمن للآلتين عند مستوى معنوية 0.01 .

نظرية (7): إذا كان $\overline{X}_1$ هو الوسط الحسابي لعينة عشوائية حجمها n_1 **صغيـــر** سحبت من **مجتمع طبيعي** وسطه μ_1 وتباينه σ_1^2 ، وكان $\overline{X}_2$ هو الوسط الحسابي لعينة عشوائية أخرى مستقلة عــن الأولى حجمها n_2 **صغـــير** سحبت مـــن **مجتمع طبيعي** آخر مستقل عـــن المجتمع الأول وسطه μ_2 وتباينه σ_2^2 ، وكان **تبايـــني المجتمعين مجهولين وغير متساويين** ، فان إحصاء الاختبار المناسب هو:

$$T = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - d_0}{\sqrt{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)}}$$

وتوزيعه الاحتمالي هو توزيع t بدرجة حرية لها الصيغـــة المركبة التالية:

$$\upsilon = \left(\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{(n_1-1)} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{(n_2-1)}} \right)$$

وأردنا اختبار الفرضية الصفرية: $H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = d_0$ مقابل الفرضية البديلة :

1. $H_1 : (\mu_1 - \mu_2) \neq d_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت :

$$T < -t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)} \quad \text{أو} \quad T > t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)}$$

2. $H_1 : (\mu_1 - \mu_2) > d_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت :

$$T > t_{(\alpha,\upsilon)}$$

3. $H_1 : (\mu_1 - \mu_2) < d_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت :

$$T < -t_{(\alpha,\upsilon)}$$

مثال (07) : لنفرض أننا سحبنا عينتين عشوائيتين مستقلتين من مجتمعين لكل منهما توزيع طبيعي فوجدنا النتائج الآتية:

$$\overline{X}_1 = 32 \quad , \quad \overline{X}_2 = 30.2$$

$$n_1 = 7 \; , \; n_2 = 6 \quad , \; s_1^2 = 4.470 \quad , \quad s_2^2 = 0.652$$

المطلوب: أختبر الفرضية $H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = 0$ مقابل الفرضية $H_1 : (\mu_1 - \mu_2) \neq 0$ عند مستوى المعنوية 0.05 ، وكان تبايني المجتمعين مجهولين وغير متساويين.

الحل:

$$H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = 0$$
$$H_1 : (\mu_1 - \mu_2) \neq 0$$
$$\alpha = 0.05$$

نلاحظ أن الفرضية البديلة لا تحدد اتجاها واحدا، ومنه فان الاختبار المناسب هو ذو طرفين ، ومن أجل إيجاد القيم الحرجة ، يجب أولا تحديد قيمة درجة الحرية ، حيث :

$$\upsilon = \left(\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{(n_1-1)} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{(n_2-1)}} \right) = \left(\frac{\left(\frac{4.470}{7} + \frac{0.652}{6}\right)^2}{\frac{\left(\frac{4.470}{7}\right)^2}{(6)} + \frac{\left(\frac{0.652}{6}\right)^2}{(5)}} \right) = 8$$

ومنه تكون القيم الحرجة كما يلي:

$$-t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)} = -t_{(0.025,8)} = -2.306 \quad ، \quad t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)} = t_{(0.025,8)} = 2.306$$

نرفض H_0 عند مستوى الدلالة 0.05 إذا كان :

$$T < -2.306 \quad \text{أو} \quad T > 2.306$$

والآن نقوم بحساب T من خلال المعادلة التالية :

$$T = \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - d_0}{\sqrt{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)}}$$

أي :

$$T = \frac{(32 - 30.2) - 0}{\sqrt{\left(\frac{4.470}{7} + \frac{0.652}{6}\right)}} = 2.08$$

نلاحـــظ أن : $2.08 < 2.306$؛ أي أن قيمة T تقع في منطقة قبول الفرضية الصفرية، لذلك نقبل H_0 ونرفض H_1 ، ومنه لا توجد فروق معنوية بين متوسطـــي المجتمعين عند مستوى معنوية 0.05 .

5 .اختبار الفروض في حالة العينات المزدوجة أو غير المستقلة:

نظرية (8):إذا قمنا بسحب عينة عشوائية من الفـــروق $(d_1, d_2 \ldots\ldots, d_n)$ من مجتمع الفروق وسطه μ_d وتباينـــه σ_d^2 مجهـــول ، وكان هذا المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي ، فان إحصاء الاختبار المناسب هـــو : $T = \frac{\bar{d}-d_0}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}}$ ، وهذا الإحصاء له توزيع t بدرجات حرية $\upsilon = n - 1$

وأردنا اختبار الفرضية الصفرية: $H_0{:}\mu_d = d_0$ أي : $H_0{:}(\mu_1\text{-}\mu_2) = d_0$

مقابل الفرضية البديلة :

1. $H_1{:}\mu_d \neq d_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت :

$$T > t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)} \quad \text{أو} \quad T < -t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)}$$

2. $H_1{:}\ \mu_d > d_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت :

$$T > t_{(\alpha,\upsilon)}$$

3. $H_1{:}\mu_d < d_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت :

$$T < -t_{(\alpha,\upsilon)}$$

مثال (08): تمثل البيانات التالية تقييم شركتين للتأمين لعشرة مساكن بالألف دج .

المسكن	الشركة الأولى	الشركة الثانية
1	135	128
2	110	105
3	131	119
4	142	140
5	105	98
6	130	123
7	131	127
8	110	115
9	125	122
10	149	145

المطلوب: عند مستوى المعنوية 0.05 هل يمكن القول بوجود فرق بين متوسط هذين التقييمين ؟

الحل:

المطلوب هو إجراء اختبار للفرق بين القيمتين (سواء بالزيادة أو بالنقصان) ؛ بمعنى آخر أيهما أكبر من الأخر، ويكون السؤال على الصورة التالية: هل يكون متوسط الفروق يساوي الصفر ؟.

وإذا كان ذلك صحيحا فان الفرضيتان تكونان على الشكل التالي:

$$H_0 : \mu_d = d_0$$

$$H_1 : \mu_d \neq d_0$$

$$\alpha = 0.05$$

بما أن الفرضية البديلة لا تحدد اتجاها واحدا ، فان الاختبار المناسب هو ذو طرفين ، والقيم الحرجة تكون: $t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)} = t_{(0.025,9)} = 2.262$ ، $-t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)} = -t_{(0.025,9)} = -2.262$

نرفض H_0 عند مستوى الدلالة 0.05 إذا كان:

$$T > 2.262 \quad \text{أو} \quad T < -2.262$$

وبعد القيام بجميع العمليات الحسابية بالطريقة المعروفة نجد:

$$\bar{d} = 4.6 \quad , \quad S_d = 4.402$$

$$T = \frac{\bar{d} - d_0}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}} = \frac{4.6 - 0}{\frac{4.402}{\sqrt{10}}} = 3.305$$

نلاحظ أن: $3.305 > 2.262$؛ أي أن قيمة T تقع في منطقة رفض الفرضية الصفرية، لذلك نرفض H_0 ونقبل H_1 عند مستوى المعنوية 0.05 ؛ ومنه هناك فرق بين تقييم الشركتين ، وأكبر فرق هو 12 ألف دج بالنسبة للمسكن رقم 3 .

6.اختبار الفرضيات حول تباين المجتمع:

في الكثير من الأحيان يكون من الأهمية بما كان معرفة تباين مجتمع من المجتمعات.ففي عملية التصنيع يلزمنا معرفة التباين في أوزان المنتجات أو في أحجامها، لأن هذا التباين يعكس مستوى الدقة ومستوى الجودة في عملية التصنيع.

ولهذا كثيرا ما يقوم مهندسوا الإنتاج بقياس التباين في المنتجات من حين لآخر ويحاولون أن يبقوا ذلك التباين ضمن حدود معينة .

نظرية (9): إذا كان لدينا مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا تباينهσ^2 ، وأردنا إجراء اختبارات حول المعلمة σ^2 ، فان إحصاء الاختبار المناسب في هذه الحالة هو الإحصاء الذي يعتمد على أفضل مقدر للمعلمة σ^2 ، وهو تباين العينة S^2 ، وهذا الإحصاء هو المتغير العشوائيχ^2 ، حيث:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

والتوزيع الاحتمالي لهذا المتغير يسمى **توزيع كاي تربيع** بدرجة حرية**:** $\upsilon = n-1$

وبالتالي أردنا اختبار الفرضية الصفرية $H_0:\sigma^2 = \sigma_0^2$ مقابل الفرضية البديلة :

1. $H_1:\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت :

$$\chi^2 < \chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon)} \quad \text{أو} \quad \chi^2 > \chi^2_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)}$$

2. $H_1:\sigma^2 > \sigma_0^2$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت :

$$\chi^2 > \chi^2_{(\alpha,\upsilon)}$$

3. $H_1:\sigma^2 < \sigma_0^2$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت :

$$\chi^2 < \chi^2_{(1-\alpha,\upsilon)}$$

مثال (09): يدعى مدير أحد المصانع أن منتجاته لا يزيد الانحراف المعياري لأطوالها عن 0.2 سم . أراد أحد الزبائن أن يتأكد من هذا الإدعاء ، فأخذ عينة عشوائية مكونة من 10 منتجات فوجـــد أن الانحراف المعياري فيها كان 0.4 سم .

المطلوب: هل تعطينا هذه النتيجة مبررا قويا لرفض إدعاء البائع مستخدما في ذلك مستوى الدلالــة 0.05

الحل:

$$H_0:\sigma^2 = 0.04$$

$$H_1:\sigma^2 > 0.04$$

$$\alpha = 0.05$$

نلاحظ أن الفرضية البديلة ذات طرف واحد ، إذن القيمة الحرجة يتم إيجادها كما يلي:

$$\chi^2_{(\alpha,\upsilon)} = \chi^2_{(0.05,9)} = 16.919$$

نرفض H_0 عند مستوى الدلالة 0.05 إذا كان : $\chi^2 > 16.919$

والآن نقوم بحساب إحصاء الاختبار:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(10-1)0.16}{0.04} = 36$$

بما أن: $36 > 16.919$ فإننا نرفض الفرض العدمي H_0 ونقبل الفرض البديل عند مستوى الدلالة 0.05 ؛ أي أن هذه النتيجة تعطينا مبررا قويا لرفض إدعاء البائع وبالتالي فإن الانحراف المعياري يزيد عن 0.2 سم .

7 . اختبار الفروض حول النسبة بين تبايـــني مجتمعيـــن $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$:

نظرية (10): إذا كان لدينا مجتمعان يتوزعان طبيعيا، وسحبنا من المجتمع الأول الذي تباينه σ_1^2 عينة عشوائية حجمها n_1 ، وكان تباينها s_1^2 ، ثم سحبنا من المجتمع الثاني الذي تباينه σ_2^2 عينة عشوائية أخرى مستقلة عن الأولى حجمها n_2 ، وكان تباينها s_2^2 ، وأردنا إجراء اختبار خاص بمقارنة σ_1^2 و σ_2^2 ، فان إحصاء الاختبار المناسب هو المتغير العشوائي F ، حيث :

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$$

والتوزيع الاحتمالي لهذا المتغير يسمى **توزيع فيشـــر** بدرجتي حرية: $\upsilon_1 = n_1 - 1$ (درجة حرية البسط) و $\upsilon_2 = n_2 - 1$ (درجة حرية المقام).

وعليه أردنا اختبار الفرضية الصفرية: $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ أو $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

مقابل الفرضية البديلة:

1. $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت :

$$F > F_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon_1,\upsilon_2)} \quad \text{أو} \quad F < F_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon_1,\upsilon_2)}$$

2. $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت :

$$F > F_{(\alpha,\upsilon_1,\upsilon_2)}$$

3. $H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت :

$$F < F_{(1-\alpha,\upsilon_1,\upsilon_2)}$$

وما يجب الإشارة إليه هو أن:

$F_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon_1,\upsilon_2)}$: هي نقطة على المحور الأفقي لتوزيع فيشر ذي درجتي حرية: $(\upsilon_1 = n_1 - 1)$ و$(\upsilon_2 = n_2 - 1)$ ، والتي يقع إلى يمينـــها مساحة $(\frac{\alpha}{2})$.

$F_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon_1,\upsilon_2)}$: هي نقطة على المحور الأفقي لتوزيع فيشر ذي درجتي حرية: $(\upsilon_1 = n_1 - 1)$ و $(\upsilon_2 = n_2 - 1)$ ، والتي يقع إلى يمينـــها مساحة $(1 - \frac{\alpha}{2})$.

$F_{(\alpha,\upsilon_1,\upsilon_2)}$: هي نقطة على المحور الأفقي لتوزيع فيشر ذي درجتي حرية: $(\upsilon_1 = n_1 - 1)$ و$(\upsilon_2 = n_2 - 1)$ ، والتي يقع إلى يمينـــها مساحة (α)

$F_{(1-\alpha,\upsilon_1,\upsilon_2)}$: هي نقطة على المحور الأفقي لتوزيع فيشر ذي درجتي حرية: $(\upsilon_1 = n_1 - 1)$ و $(\upsilon_2 = n_2 - 1)$، والتي يقع إلى يمينـــها مساحة $(1 - \alpha)$

مثال (10): إذا علمت أن مجتمع طول الطالبات ، ومجتمع طول الطلبة في جامعة محمد خيضر ، يتوزع توزيعا طبيعيا ، وسحبنا من المجتمع الأول عينة عشوائية حجمها 25 طالبة ، ومن المجتمع الثاني عينة عشوائية حجمها 21 طالبا ، وكانت العينتان مستقلتان ، ووجدنا أن تباين الطول لعينة الطالبات يساوي 64 ، وتباين الطول لعينة الطلبة يساوي 36 .

المطلوب: اختبر ما إذا كان هناك فرق بين تباين مجتمع طول الطالبات وتباين مجتمع طول الطلبة ، وذلك باستخدام مستوى معنوية 0.05 .

الحل:

نريد اختبار ما يلي:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$
$$\alpha = 0.05$$

بما أن الفرضية البديلة لا تحدد اتجاها واحدا ، فان الاختبار المناسب هو ذو طرفين ، والقيم الحرجة تكون:

$$F_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon_1,\upsilon_2)} = F_{(0.025,24,20)} = 2.40$$

$$F_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon_1,\upsilon_2)} = F_{(0.975,24,20)} = 0.43$$

نرفض H_0 عند مستوى الدلالة 0.05 إذا كانت :

$$F > 2.40 \quad \text{أو} \quad F < 0.43$$

ومن ثم فان منطقة قبول H_0 تقع بين القيمتين 0.43 و 2.40

والآن نقوم بحساب إحصاء الاختبار: $F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = \frac{64}{36} = 1.78$

نلاحظ أن قيمة إحصاء الاختبار F تقع في منطقة قبول الفرضية الصفرية ،إذن القرار هو قبول H_0 ورفض الفرضية البديلة عند مستوى الدلالة 0.05 ؛ ومنه الاختبار ليس له معنوية إحصائية؛ أي أن تباين مجتمع طول الطالبات يساوي تباين مجتمع طول الطلبة ولا يوجد فرق حقيقي بينهما، والفرق الظاهر بين تبايني العينتين هو فرق ليس ذو أهمية ، وسببه خطأ الصدفة.

مثال (11):بفرض أنه لدينا البيانات التالية:

$$n_1 = 16\ ,\ n_2 = 20\ \ ,\ s_1^2 = 20.25\ \ ,\ s_2^2 = 11.56$$

المطلوب : أختبر الفرضية $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ مقابل الفرضية $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ مستخدما في ذلك مستوى الدلالة $\alpha = 0.10$

الحل:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$
$$\alpha = 0.10$$

بما أن الفرضية البديلة لا تحدد اتجاها واحدا ، فان الاختبار المناسب هو ذو طرفين ، والقيم الحرجة تكون:

$$F_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon_1,\upsilon_2)} = F_{(0.05,15,19)} = 2.23$$

$$F_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon_1,\upsilon_2)} = F_{(0.95,15,19)} = 0.43$$

نرفض H_0 عند مستوى الدلالة 0.10 إذا كانت :

$$F < 0.43 \quad \text{أو} \quad F > 2.23$$

ومن ثم فان منطقة قبول H_0 تقع بين القيمتين 0.43 و 2.23

والآن نقوم بحساب إحصاء الاختبار: $F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = \frac{20.25}{11.56} = 1.75$

نلاحظ أن قيمة إحصاء الاختبار F تقع في منطقة قبول الفرضية الصفرية ،إذن القرار هو قبول H_0 ورفض الفرضية البديلة ؛ أي أن تبايني المجتمعين متساويين عند مستوى الدلالة 0.10 .

8. اختبار الفرضيات حول النسبة P في المجتمع :

نظرية (11): إذا كانت $(x_1,x_2......,x_n)$ عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع يخضع لتوزيع ذي الحدين ، وكان حجم هذه العينة **كبـــير** ، وأردنا اختبار الفرضـــية الصفريـــة: $H_0: P = P_0$ مقابل الفرضية البديلة :

1. $H_1:P \neq P_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت :

$$Z < -z_{\alpha/2} \quad \text{أو} \quad Z > z_{\alpha/2}$$

2. $H_1:P > P_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت :

$$Z > z_\alpha$$

3. $H_1:P < P_0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت :

$$Z < -z_\alpha$$

مع العلم أن إحصاء الاختبار Z في هذه الحالة نجده يساوي :

$$Z = \frac{\bar{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0 q_0}{n}}}$$

مثال (12): مصنع للأدوية المسجلة يدعي أن دواء من إنتاجه له فعالية بنسبة 90 % في التخفيف من الحساسية لفترة 8 ساعات . في عينة مكونة من 200 شخص مصابين بالحساسية ، أدى الدواء إلى تخفيف آلام 160 منهم .

المطلوب: قرر ما إذا كان إدعاء المصنع صحيحا مستخدما في ذلك مستوى معنوية 0.01.

الحل :

بفرض أن P هو احتمال أن يـــؤدي الدواء إلى التخفـــيف من آلام الحساسية وبهـــذا نريـــد اختبار الفرضيتين:

$$H_0:P = 0.9 \qquad \text{الادعاء صحيح}$$

$$H_1:P < 0.9 \qquad \text{الادعاء باطـــل}$$

$$\alpha = 0.01$$

نلاحظ أن الفرضية البديلة ذات طرف واحد أيسر، إذن القيمة الحرجة هي :

$$-z_{0.01} = -2.33$$

نرفض H_0 عند مستوى الدلالة 0.01 إذا كان : $Z < -2.33$

والآن نقوم بحساب Z من خلال المعادلة التالية : $Z = \dfrac{\bar{P} - P_0}{\sqrt{\dfrac{P_0 q_0}{n}}}$

فنجد: $Z = \dfrac{0.8 - 0.9}{\sqrt{\dfrac{(0.9)(0.1)}{200}}} = -4.71$

نلاحظ أن $-4.71 < -2.33$ أي أن قيمة Z تقع في منطقة الرفض (المنطقة الحرجة) ، لذلك نرفض H_0 ونقبل H_1 عند مستوى المعنوية 0.01 ، بعبارة أخرى نجد أن ادعاء المصنع غير صحيح وأن نتائج العينة مرتفعة المعنوية.

مثال (13): قامت إحدى الشركات المختصة في صناعة أقلام الحبر الجاف بدعاية لترويج أقلامها وادعت أن واحدا من بين 10 أشخاص ممن يجيدون الكتابة يستخدمون أقلامها . وللحكم على صحة أو عدم صحة إدعاء الشركة ، أخذت عينة عشوائية مكونة من 100 شخص فوجد أنه من بينهم 13 شخصا يفضلون هذا النوع من الأقلام .

المطلوب : هل إدعاء الشركة صحيح ؟ مستخدما في ذلك الفرضية: $H_0{:}P = 0.1$ مقابل الفرضية $H_1{:}P > 0.1$ ، مع العلم أن مستوى الدلالة هو 0.05 .

الحل:

$$H_0{:}P = 0.1$$
$$H_1{:}P > 0.1$$
$$\alpha = 0.05$$

نلاحظ أن الفرضية البديلة ذات طرف واحد أيمن، إذن القيمة الحرجة هي : $z_{0.05} = 1.65$

نرفض H_0 عند مستوى الدلالة 0.05 إذا كان: $Z > 1.65$

والآن نقوم بحساب Z من خلال المعادلة التالية : $Z = \dfrac{\bar{P} - P_0}{\sqrt{\dfrac{P_0 q_0}{n}}}$

فنجد: $Z = \dfrac{0.13 - 0.1}{\sqrt{\dfrac{(0.1)(0.9)}{100}}} = 1$

نلاحظ أن $1 < 1.65$ أي أن قيمة Z تقع في منطقة قبول الفرضية H_0 ، لذلك نقبل H_0 ونرفض H_1 عند مستوى المعنوية 0.05 ، ومنه نجد أن ادعاء الشركة صحيح .

9. اختبار الفرضيات حول الفرق بين نسبتي المجتمعين :

نظرية (11): إذا أخذت عينتين عشوائيتين مستقلتين من توزيع ذي الحدين وكان حجمهما n_1 و n_2 كبير بدرجة كافية . فتكون الفرضية الصفرية التالية: $H_0 : (P_1\text{-}P_2) = d_0$

وبالتالي فان إحصاء الاختبار المناسب هو :

$$Z = [(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - d_0\ ] / \sqrt{\frac{\bar{p}_1\,\bar{q}_1}{n_1} + \frac{\bar{p}_2\,\bar{q}_2}{n_2}}$$

وما يجب الإشارة إليه هو أنه إذا كانت $d_0 = 0$ في الفرضية الصفرية السابقة ، فهذا يعني أن $P_1 = P_2$. فعندئذ يكون إحصاء الاختبار كما يلي:

$$Z = [(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)\ ] / \sqrt{\frac{\bar{P}\,\bar{q}}{n_1} + \frac{\bar{P}\,\bar{q}}{n_2}}$$

حيث :

$$\bar{P} = \frac{n_1\bar{p}_1 + n_2\bar{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{n_1\frac{x_1}{n_1} + n_2\frac{x_2}{n_2}}{n_1 + n_2} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$$

وتشير $\bar{P}$ الى **المتوسط المرجح** لنسبتي العينتين $\bar{p}_1$ و $\bar{p}_2$ ، ويطلق عليها أيضا **بالنسبة التجميعية.**

ومنه أردنا اختبار الفرضية الصفرية: $H_0 : (P_1\text{-}P_2) = 0$ مقابل الفرضية البديلة :

1. $H_1 : (P_1\text{-}P_2) \neq 0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت :

$$Z < -z_{\alpha/2} \quad \text{أو} \quad Z > z_{\alpha/2}$$

2. $H_1 : (P_1\text{-}P_2) > 0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت :

$$Z > z_\alpha$$

3. $H_1 : (P_1\text{-}P_2) < 0$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت :

$$Z < -z_\alpha$$

مثال (14): من أجل المقارنة بين نسبة المدخنين في الفئة العمرية (18-25) سنة مع الفئة العمرية (26-30) سنة ، أخذت عينة عشوائية حجمها 200 من الفئة الأولى فوجد أن 80 منهم يدخنون وأخذت عينة عشوائية مستقلة عن الأولى من الفئة العمرية الثانية وحجمها 100 فوجد أن 52 منهم يدخنون .

المطلوب : اختبر الفرضية: $H_0 : P_1 = P_2$ مقابل الفرضية $H_1 : P_1 < P_2$ عند مستوى الدلالة 0.05.

الحل:

$$H_0 : P_1 = P_2$$
$$H_1 : P_1 < P_2$$
$$\alpha = 0.05$$

نلاحظ أن الفرضية البديلة ذات طرف واحد أيسر، إذن القيمة الحرجة هي:

$$-z_{0.05} = -1.65$$

نرفض H_0 عند مستوى الدلالة 0.05 إذا كان: $Z < -1.65$

والآن نقوم بحساب إحصاء الاختبار Z من خلال المعادلة التالية :

$$Z = [(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)]/\sqrt{\frac{\bar{P}\,\bar{q}}{n_1} + \frac{\bar{P}\,\bar{q}}{n_2}}$$

يجب أولا إيجاد ما يلي: $\bar{p}_1$ و $\bar{p}_2$ و $\bar{P}$

$$\bar{p}_1 = \frac{x_1}{n_1} = \frac{80}{200} = 0.4$$

$$\bar{p}_2 = \frac{x_2}{n_2} = \frac{52}{100} = 0.52$$

$$\bar{P} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{80+52}{200+100} = 0.44$$

ومن هنا نجد إحصاء الاختبار يساوي:

$$Z = [(0.4 - 0.52)]/\sqrt{\frac{(0.44)(0.56)}{200} + \frac{(0.44)(0.56)}{100}}$$
$$= -1.97$$

نلاحظ أن $-1.97 < -1.65$ أي أن قيمة Z تقع في منطقة رفض الفرضية H_0 ، لذلك نرفض H_0 ونقبل H_1 عند مستوى المعنوية 0.05 ، ومنه نجد أن نسبـــة المدخنين في الفئة العمرية الأولى اقل من نسبـــة المدخنين في الفئة العمرية الثانية.

مثال (15): مجموعتان A,B تتكون كل منهما من 100 شخص مصابين بمرض معين ، أعطي مصل للمجموعة A و لم يعطى للمجموعة B (والتي تسمى بالمجموعة الضابطة) ، بخلاف ذلك فإن المجموعتين يعاملان معاملة متماثلة . وقد وجد أنه في المجموعة A قد شفي75 شخصا من المرض بينما في المجموعة B شفي 65 شخصا.

المطلوب: اختبر الفرض القائل أن المصل يساعد على الشفاء من المرض باستخدام مستوى المعنوية 0.01 .

الحل: بفرض أن:

P_1 تمثل النسبة في المجتمع للأشخاص الذين شفوا من المرض باستخدام المصل.

P_2 تمثل النسبة في المجتمع للأشخاص الذين شفوا من المرض بدون استخدام المصل.

وبالتالي نريد اختبار الفرضيتين :

$$H_0 : P_1 = P_2$$
$$H_1 : P_1 > P_2$$
$$\alpha = 0.01$$

نلاحظ أن الفرضية البديلة ذات طرف واحد أيمن، إذن القيمة الحرجة هي:

$$z_{0.01} = 2.33$$

نرفض H_0 عند مستوى الدلالة 0.01 إذا كان: $Z > 2.33$

والآن نقوم بحساب إحصاء الاختبار Z من خلال المعادلة التالية :

$$Z = [(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)\ ]/\ \sqrt{\frac{\bar{P}\,\bar{q}}{n_1} + \frac{\bar{P}\,\bar{q}}{n_2}}$$

يجب أولا إيجاد ما يلي: $\bar{p}_1$ و $\bar{p}_2$ و $\bar{P}$

$$\bar{p}_1 = \frac{x_1}{n_1} = \frac{75}{100} = 0.75$$

$$\bar{p}_2 = \frac{x_2}{n_2} = \frac{65}{100} = 0.65$$

$$\bar{P} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{75+65}{100+100} = 0.7$$

ومن هنا نجد إحصاء الاختبار يساوي:

$$Z = [(0.75 - 0.65)\ ]/\ \sqrt{\frac{(0.7)(0.3)}{100} + \frac{(0.7)(0.3)}{100}}$$
$$= 1.54$$

نلاحظ أن $1.54 < 2.33$ أي أن قيمة Z تقع في منطقة قبول الفرضية H_0 ، لذلك نقبل H_0 ونرفض H_1 عند مستوى المعنوية 0.01 ، ومنه نجد أن المصل غير فعال والفروق المشاهدة ترجع إلى الصدفة.

تمـــــــارين المحــــور الثالث :

التمرين 01: إذا كان متـــوسط قوة الحبال للقطع من إنتاج أحد المصانع هو 1800N وانحرافهـــا المعياري هو 100N ، وباستخدام طريقـــة جديدة للتصنيع ادعى صاحب المصـــنع أن قوة الحبال للقطع سوف تـــزداد ، لاختبار هـــذا الادعاء أخذت عينة من 50 حبلا وتـــم اختبارها ووجد أن متوسط مقاومتها للقطـــع هو 1850N.

المطلوب: هل يمكنك تأييد هذا الادعاء عند مستوى المعنوية 0.01.

التمرين 02: في أحد المصانع المنتجة لنوع معيـــن من المكاتب، تبين أن الإنتاج الأسبوعي يتوزع توزيعا طبيعيا بمتوسط قدره 200 وحدة وبانحراف معياري قدره 16 وحدة. وعند أخذ عينة قدرها إنتاج 50 أسبوع ، اتضح أن متوسط الإنتاج الأسبوعي هو 203.5 مكتب.

المطلوب: عند مستوى معنوية 0.01 اختبر الفرض القائل بأن متوسط المجتمع يساوي 200 وحدة .

التمرين 03 : يعتقد أحد الباحثين أن الوسط الحسابي في مجتمع ما يـــزيد عن 300. ومن أجل اختـــبار ذلك قام بسحب عينة عشوائية مكونة من 100عنصر من المجتمع السابق فوجد أن الوسط الحسابي للعينة هو 316 والانحراف المعياري 44.

المطلوب: اختبر ما إذا كان اعتقاد الباحث صحيحا وهذا عند مستوى الدلالة 0.05 .

التمرين 04 : يعتقد أحد الباحثين أن الوسط الحسابي في مجتمع ما والذي كان يساوي 180 قد تغير الآن ومن أجل اختبار ذلك قام بسحب عينة عشوائية مكونة من 81 عنصرا فوجد أن وسطها الحسابي 170 وانحرافها المعياري 25.

المطلوب: اختبر مدى صحة اعتقاد الباحث وهذا عند مستوى الدلالة 0.01 .

التمرين 05: في دراسة قام بها أحد البنوك وجد أن عملاءه يستخدمون البطاقات التي يصدرها 10 مرات في الشهر وسطيا. ورغبة من البنك في زيادة استعمال عملائه لتلك البطاقات ، طرح في شهر لاحق جوائز يمكن أن يربحـــها مستعملو البطاقات . أخذت عينة عشوائية من الزبائن مكونـــة من 25 شخصا حاملا للبطاقات فوجد أنهم استخدموا البطاقات في ذلك الشهر 12 مرة في المتـــوسط وذلك بانحراف معيـــاري قدره 3 .

المطلوب: هل تعطينا هذه البـــيانات مبررا للقـــول بأن استعمال البطاقات قـــد ازداد خلال ذلك الشهـــر مستخدما في ذلك مستوى الدلالة 0.05 .