

## Chapitre 2 : Déplacements des poutres symétriques en flexion plane

### 2.1 Déplacements des poutres fléchies de section constante

#### 2.1.1 Equation différentielle de l'axe élastique

La détermination des déplacements des poutres fléchies est nécessaire pour deux raisons :

- le constructeur doit connaître les déplacements, des différents points de l'axe de la poutre ou au moins de quelques points caractéristiques, sous l'effet de la charge extérieure s'y exerçant, pour évaluer sa rigidité, en comparant ses déplacements avec les déplacements admissibles.
- la détermination des déplacements est requise dans les calculs des systèmes hyperstatiques largement utilisés dans les différentes constructions.

D'un point de vue géométrique, les déplacements sont de deux natures : les translations et les rotations.

- déplacement de translation ou linéique  $y$ - déplacement des points de l'axe de la poutre dans la direction perpendiculaire à l'axe. Comme  $y$  varie le long de l'axe, on écrit :  $y = y(x)$ . Le déplacement maximal  $y_{max} = f$  est appelé flèche.
- angle de rotation ou rotation  $\varphi = \varphi(x)$  : angle entre les plans de la section droite de la poutre avant et après déformation, ou angle entre les directions de l'axe avant et après déformation.

Au chapitre I, nous avons établi une relation entre la courbure et le moment fléchissant (équation 3). Nous pouvons ainsi réécrire

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (1)$$

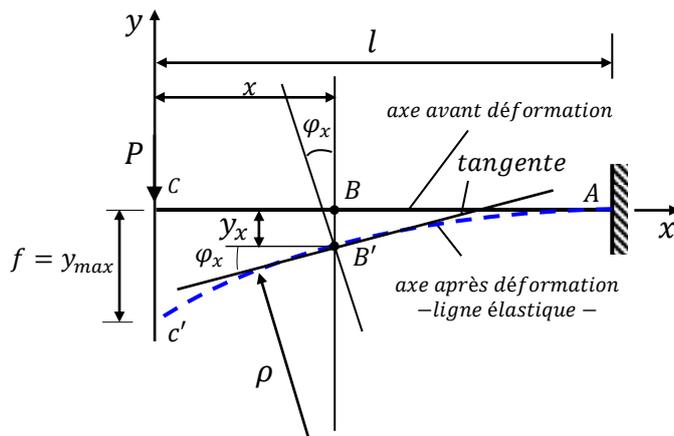


fig. 2.1

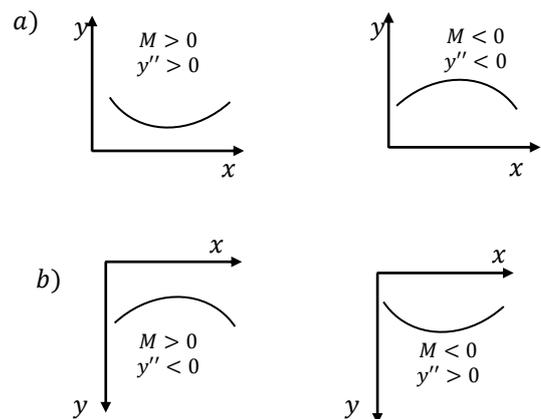


fig. 2.2

C'est l'équation qui associe la courbure de l'axe au moment fléchissant et à la rigidité de la section EI.

Le cours de l'analyse mathématique donne la formule suivante pour la courbure d'une ligne :

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \quad (2)$$

$$\text{où } y'' = \frac{d^2y}{dx^2}; y' = \frac{dy}{dx}.$$

En combinant les équations (1) et (2), on peut calculer la courbure de la poutre fig.2.1, soit

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{y''}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}} = \frac{M}{EI} \quad (3)$$

L'intégration de cette équation non linéaire présente de grandes difficultés ; pourtant pour la plupart des problèmes pratiques la quantité  $y'^2 = \text{tg}^2 \varphi = \varphi^2$ , peut être négligée, par suite de la petitesse des déformations, devant l'unité. En rejetant la quantité  $y'^2$  du dénominateur de l'équation (3) et en optant pour le système de coordonnées fig.2.2, a, on obtient l'équation approchée de la ligne élastique :

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M}{EI} \quad (4)$$

En intégrant une fois, on aboutit à l'équation de l'angle de rotation

$$EIy'(x) = EI\varphi(x) = \int M(x)dx + C \quad (5)$$

En intégrant une deuxième fois, on aboutit à l'équation des déplacements

$$EIy(x) = \int \left[ \int M(x)dx \right] dx + Cx + D \quad (6)$$

où C et D sont des constantes d'intégration qui sont déterminées par les conditions aux rives.

Le nombre des conditions ne doit pas être inférieur à deux, fig.2.3.

Exemple :

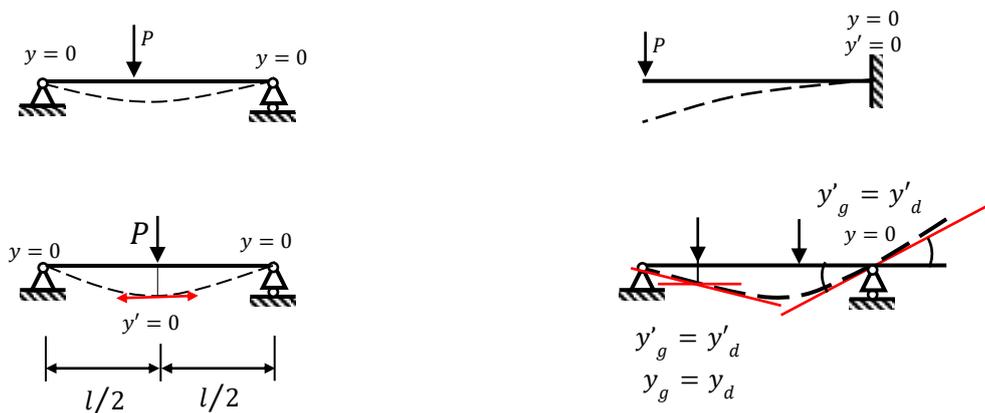


fig.2.3

### Exemple 2.1

En négligeant l'influence de l'effort tranchant, chercher la ligne élastique de la poutre sur deux appuis simples supportant une charge concentrée P présentée à la figure 2.4. Calculer ensuite la flèche et le déplacement au milieu de la travée de la poutre. Comparer les résultats.

Solution

tronçon AC:  $0 \leq x \leq a$

L'introduction, dans l'expression (4), du moment fléchissant

$$M(x) = \frac{Pb}{l} x;$$

entraîne l'équation différentielle du second ordre suivante

$$y_1'' = \frac{Pb}{EI} x;$$

en intégrant successivement cette équation, on obtient

$$y_1' = \frac{Pb}{2EI} x^2 + C_1;$$

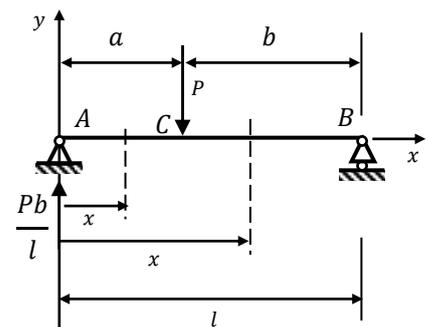


fig.2.4

$$y_1 = \frac{Pb}{6EI}x^3 + C_1x + D_1;$$

tronçon BC:  $a \leq x \leq l$

$$y_2'' = \frac{Pb}{EI}x - \frac{P}{EI}(x - a);$$

$$y_2' = \frac{Pb}{2EI}x^2 - \frac{P}{2EI}(x - a)^2 + C_2;$$

$$y_2 = \frac{Pb}{6EI}x^3 - \frac{P}{6EI}(x - a)^3 + C_2x + D_2;$$

où  $C_1, C_2, D_1, D_2$ , constituent les constantes d'intégration, déterminées par les conditions aux limites

$$1) x = a: y_1' = y_2' \text{ et } y_1 = y_2$$

$$y_1' = y_2' \rightarrow C_1 = C_2 = C; y_1 = y_2 \rightarrow D_1 = D_2 = D$$

Ces conditions supplémentaires expriment l'absence de discontinuité et de la rupture de la ligne élastique, sous la charge P.

$$2) x = 0 \rightarrow y_1 = 0 \rightarrow D_1 = D_2 = D = 0$$

$$x = l \rightarrow y_2 = 0 \rightarrow \frac{Pb}{6EI}l^3 - \frac{P}{6EI}b^3 + Cl = 0$$

$$\text{d'où } C = \frac{Pb}{6EI}(b^2 - l^2).$$

Donc, les équations définitives des déformées et des angles de rotation s'écrivent

Pour le tronçon AC

$$y_1 = -\frac{Pb}{6EI}x(a^2 + 2ab - x^2); \quad (a)$$

$$y_1' = -\frac{Pb}{2EI}(a^2 + 2ab - 3x^2); \quad (b)$$

Pour le tronçon BC

$$y_2 = -\frac{Pa}{6EI}[-a^2l + (a^2 + 2l^2)x + x^3 - 3lx^2]; \quad (c)$$

$$y_2' = -\frac{Pa}{6EI}(a^2 + 2l^2 - 6lx + 3x^2). \quad (d)$$

La flèche a lieu dans la section  $x_m$  où  $y'(x_m) = 0$  : pour  $a > b$ , par exemple, cette section se trouve sur le tronçon AB. Faisons l'équation (b) égale à zéro, on obtient

$$x_m = \sqrt{\frac{a(a + 2b)}{3}} = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}} \quad (e)$$

Pour  $b \rightarrow 0$ , l'abscisse  $x_m = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0,577l$ . Cela veut dire que même, à la limite, quand la charge P

s'approche de l'appui B, le point m correspondant au déplacement maxi  $y(x_m) = y_{max}$  est distant du milieu de la travée de  $e = 0,577l - 0,5l = 0,077l$ .

L'examen des relations (a) et (e) montre que même lorsque  $b \rightarrow 0$ , la différence entre la flèche f et le déplacement au milieu de la poutre  $y(l/2)$  n'excède pas 3%. Ainsi le déplacement au milieu de la travée de la poutre est approximativement égal à la flèche f.

On déduit de l'exemple envisagé, que le nombre de constantes d'intégration augmente de deux à chaque tronçon. La méthode devient compliquée. Déjà, pour un nombre de tronçon égal à 3 (6 équations), la détermination des constantes d'intégration devient lassante. Pour corriger cette situation, on a élaboré d'autres méthodes, plus rationnelles, de détermination des déplacements.

## 2.2. Méthode des paramètres initiaux

Comme on l'a déjà signalé dans l'exemple précédent. Il est difficile de déterminer la déformée pour une poutre constituée de plusieurs tronçons : ça revient à résoudre  $2n$  équations, si la poutre est formée de  $n$  tronçons, pour déterminer les  $2n$  constantes d'intégrations. Il est facile de contourner cette difficulté si l'on observe certaines règles.

Considérons une partie de la poutre chargée par un certain système de forces fig.2.5. Supposons que la rigidité à la flexion  $EI$  de la poutre soit constante.

L'expression du moment fléchissant dans une section courante  $x$  de la poutre peut être écrite sous forme :

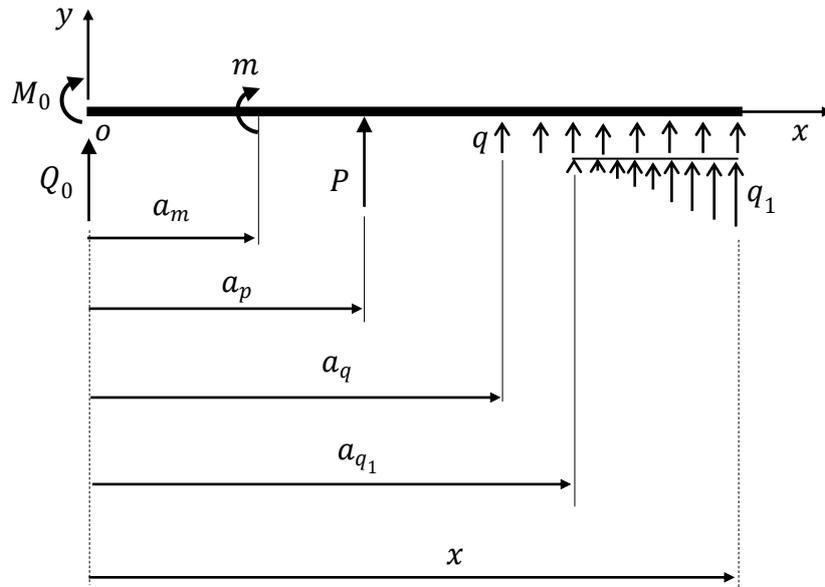


fig.2.5

$$M(x) = M_0 + Q_0x + m(x - a_m)^0 + P(x - a_p)^1 + \frac{q(x - a_q)^2}{2} + tg\alpha \frac{(x - a_{q_1})^3}{3!} \quad (7)$$

Remarque

1) il faut avoir en vue que le membre correspondant à  $(x - a_k)$ , doit être pris en considération uniquement pour les sections où  $x > a_k$  ; par exemple, le membre  $P(x - a_p)$  est pris en compte seulement, si  $x > a_p$ .

2) règle de signe : un certain membre est positif, s'il provoque un moment fléchissant positif dans une section considérée  $x$ . Par exemple : tous les paramètres représentés à la figure 2.5 sont positifs.

L'équation de la ligne élastique s'écrit :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \frac{M}{EI} \quad (8)$$

En comparant les expressions (7) et (8), on peut écrire :

$$y'' = \frac{1}{EI} \left[ M_0 + Q_0x + m(x - a_m)^0 + P(x - a_p)^1 + \frac{q(x - a_q)^2}{2} + tg\alpha \frac{(x - a_{q_1})^3}{3!} \right] \quad (9)$$

En intégrant cette équation, on obtient l'angle de rotation  $y' = \varphi(x)$ ,

$$y' = \varphi(x) = \frac{1}{EI} \left[ M_0x + Q_0 \frac{x^2}{2!} + m(x - a_m) + P \frac{(x - a_p)^2}{2!} + \frac{q(x - a_q)^3}{3!} + tg\alpha \frac{(x - a_{q_1})^4}{4!} \right] + C \quad (10)$$

En intégrant la seconde fois, on trouve les déplacements verticaux  $y(x)$  :

$$y(x) = \frac{1}{EI} \left[ M_0 \frac{x^2}{2!} + Q_0 \frac{x^3}{3!} + \left|_{x>a_m} m \frac{(x-a_m)^2}{2!} + \left|_{x>a_p} P \frac{(x-a_p)^3}{3!} + \left|_{x>a_q} \frac{q(x-a_q)^4}{4!} + \left|_{x>a_{q_1}} tg\alpha \frac{(x-a_{q_1})^5}{5!} \right. \right. \right] + Cx + D \quad (11)$$

Pour  $x = 0$ , nous avons :  $C = \varphi_0$  et  $D = y_0$ ; où  $\varphi_0$  et  $y_0$  sont les valeurs de  $\varphi(x)$  et  $y(x)$  à l'origine des coordonnées. De sorte que l'équation (5) prend la forme :

$$y(x) = y_0 + \varphi_0 x + \frac{1}{EI} \left[ M_0 \frac{x^2}{2!} + Q_0 \frac{x^3}{3!} + \left|_{x>a_m} m \frac{(x-a_m)^2}{2!} + \left|_{x>a_p} P \frac{(x-a_p)^3}{3!} + \left|_{x>a_q} \frac{q(x-a_q)^4}{4!} + \left|_{x>a_{q_1}} tg\alpha \frac{(x-a_{q_1})^5}{5!} \right. \right. \right] \quad (12)$$

Dans le cas de l'action simultanée de plusieurs forces extérieures, l'équation de la flèche d'après le principe de superposition s'écrit :

$$y(x) = y_0 + \varphi_0 x + \frac{1}{EI} \left[ M_0 \frac{x^2}{2!} + Q_0 \frac{x^3}{3!} + \left|_{x>a_m} \sum m \frac{(x-a_m)^2}{2!} + \left|_{x>a_p} \sum P \frac{(x-a_p)^3}{3!} + \left|_{x>a_q} \sum \frac{q(x-a_q)^4}{4!} + \left|_{x>a_{q_1}} \sum tg\alpha \frac{(x-a_{q_1})^5}{5!} \right. \right. \right] \quad (13)$$

L'équation (13) est appelée équation universelle de la ligne élastique ; elle peut être utilisée pour n'importe quel schéma de calcul des poutres.

L'expression des angles de rotation des sections  $-\varphi(x)$  – est déterminée par la dérivation de l'équation  $y(x)$  :

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \frac{1}{EI} \left[ M_0 x + Q_0 \frac{x^2}{2!} + \left|_{x>a_m} \sum m \frac{(x-a_m)}{1!} + \left|_{x>a_p} \sum P \frac{(x-a_p)^2}{2!} + \left|_{x>a_q} \sum \frac{q(x-a_q)^3}{3!} + \left|_{x>a_{q_1}} \sum tg\alpha \frac{(x-a_{q_1})^4}{4!} \right. \right. \right] \quad (14)$$

➤ Ordre de résolution du problème à l'aide de l'équation universelle de la ligne élastique

- 1) On choisit l'origine des coordonnées à l'extrémité gauche de la poutre
- 2) On détermine si possible les grandeurs des paramètres initiaux  $\varphi_0, y_0, Q_0$  et  $M_0$ .
- 3) En utilisant la formule (13), on compose l'équation de  $y(x)$  ;  $\varphi(x)$  – est obtenue par dérivation de  $y(x)$ .
- 4) Les constantes  $y_0$  et  $\varphi_0$  – paramètres géométriques, si elles ne sont pas connues d'avance, se déterminent à l'aide des conditions d'appui. Les constantes  $Q_0$  et  $M_0$  – paramètres statiques, sont déterminés à l'aide des conditions d'équilibre de la poutre.
- 5) Si la poutre est sollicitée par une charge répartie dans un tronçon intermédiaire, on la prolonge jusqu'à l'extrémité droite en y ajoutant une charge compensatrice afin de conserver l'état initial du chargement de la poutre.

**Exemple 2.2**

Déterminer les déplacements de translation et de rotation des sections B et C, fig.2.6, a.

Solution : les paramètres statiques  $Q_0$  et  $M_0$  sont déterminés par les équations de la statique :

$$\begin{aligned} \sum y = 0: Q_0 &= qa; \\ \sum M_A = 0: M_0 &= -q a^2/2. \end{aligned}$$

Après avoir déterminé ces paramètres, on prolonge la charge répartie en y ajoutant celle qui la compense, comme indiqué à la figure 2.6, b. Ensuite, on écrit l'équation de la ligne élastique pour le tronçon de droite :

$$y(x) = y_0 + \varphi_0 x + \frac{1}{EI} \left[ M_0 \frac{x^2}{2!} + Q_0 \frac{x^3}{3!} - q \frac{x^4}{4!} + \frac{q(x-a)^4}{4!} \right] \quad (a)$$

Comme l'origine des coordonnées est placée en A (section encastree), les paramètres géométriques sont nuls:  $\varphi_0 = y_0 = 0$ . Ainsi,

$$y(x) = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{qa^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + qa \cdot \frac{x^3}{3!} - q \frac{x^4}{4!} + \left| \frac{q(x-a)^4}{4!} \right|_{x>a} \right] \quad (b)$$

L'expression de  $\varphi(x)$  est par dérivation de  $y(x)$

$$\varphi(x) = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{qa^2}{2} \cdot x + qa \cdot \frac{x^2}{2!} - q \frac{x^3}{3!} + \left| \frac{q(x-a)^3}{3!} \right|_{x>a} \right] \quad (c)$$

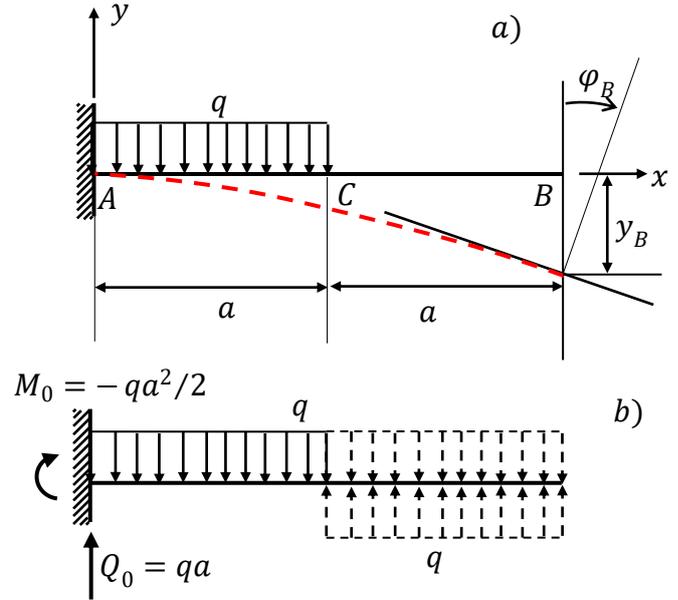


fig.2.6

- En posant respectivement  $x = a$  et  $x = 2a$  dans l'équation (b), on trouve  $y_C$  et  $y_B$

$$y_C = y(x = a) = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{qa^2}{2} \cdot \frac{a^2}{2} + qa \cdot \frac{a^3}{3!} - q \frac{a^4}{4!} \right] = -\frac{qa^4}{8EI};$$

$$y_B = y(x = 2a) = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{qa^2}{2} \cdot \frac{4a^2}{2} + qa \cdot \frac{8a^3}{3!} - q \frac{16a^4}{4!} + \frac{qa^4}{4!} \right] = -\frac{7qa^4}{24EI}$$

Les angles de rotation  $\varphi_C$  et  $\varphi_B$ , fig.2.7, sont déterminés par l'équation (c)

$$\varphi_C = \varphi(x = a) = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{qa^2}{2} \cdot a + qa \cdot \frac{a^2}{2!} - q \frac{a^3}{3!} \right] = -\frac{qa^3}{6EI};$$

$$\varphi_B = \varphi(x = 2a) = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{qa^2}{2} \cdot 2a + qa \cdot \frac{4a^2}{2!} - q \frac{8a^3}{3!} + \frac{qa^3}{3!} \right] = -\frac{qa^3}{6EI}$$

Il est à remarquer que les points B et C ont la même tangente, d'où  $\varphi_B = \varphi_C$ .

### Exemple 2.3

Déterminer le déplacement vertical et l'angle de rotation de l'extrémité libre de la console sollicitée par une charge triangulaire fig.2.8.

Solution :

Les expressions du déplacement et de l'angle de rotation d'une section courante  $x$  s'écrivent :

$$y(x) = y_0 + \varphi_0 x - \frac{1}{EI} tg\alpha \cdot \frac{x^5}{5!};$$

$$\varphi(x) = \varphi_0 - \frac{1}{EI} tg\alpha \cdot \frac{x^4}{4!};$$

$$\text{Condition d'appui : } \varphi(l) = \varphi_0 - \frac{1}{EI} \cdot \frac{q}{l} \cdot \frac{l^4}{4!} = 0,$$

$$\text{d'où } \varphi_0 = \frac{ql^3}{24EI} = \varphi_A.$$

$$\begin{aligned} y(l) = y_0 + \varphi_0 l - \frac{1}{EI} \cdot \frac{q}{l} \cdot \frac{l^5}{5!} &= 0 \rightarrow y_0 \\ &= \frac{1}{EI} \left( \frac{ql^4}{120} - \frac{ql^4}{24} \right) = \frac{ql^4}{30EI} = y_A. \end{aligned}$$

### Exemple 2.4

Tracer les diagrammes des efforts intérieurs  $Q$  et  $M$  de la poutre simple avec deux porte-à-faux (fig.2.9, a), soumise à une force concentrée  $P$  à l'une des extrémités libres et à un moment concentré  $m = 2Pa$  à l'autre. Calculer ensuite les déplacements en C, D et E. Dessiner l'épure de l'axe fléchi de la poutre (déformée) en y indiquant le point d'inflexion.

Solution

Détermination des réactions

$$\sum M_B = P \cdot 3a + 2Pa - 2aR_A = 0 \rightarrow R_A = 5P/2;$$

$$\sum M_A = Pa + 2Pa + 2aR_B = 0 \rightarrow R_B = -3P/2.$$

Les épures  $Q$  et  $M$  sont présentées (fig.2.9, b et c), les valeurs caractéristiques des efforts tranchants et moment fléchissant  $y$  sont indiquées.

Prenons l'origine des coordonnées au point C et écrivons l'équation de la ligne élastique en prenant en compte les valeurs des paramètres suivants :

$$Q_0 = -P, M_0 = 0, y_0 \neq 0, \varphi_0 \neq 0.$$

$$y(x) = y_0 + \varphi_0 x + \frac{1}{EI} \left[ Q_0 \cdot \frac{x^3}{3!} + \left|_{x>a} R_A \frac{(x-a)^3}{3!} + \left|_{x>3a} R_B \frac{(x-3a)^3}{3!} \right. \right];$$

ou

$$y(x) = y_0 + \varphi_0 x + \frac{1}{EI} \left[ -P \cdot \frac{x^3}{3!} + \left|_{x>a} \frac{5}{2}P \cdot \frac{(x-a)^3}{3!} - \left|_{x>3a} \frac{3}{2}P \cdot \frac{(x-3a)^3}{3!} \right. \right];$$

Les paramètres  $y_0$  et  $\varphi_0$  sont évalués à partir des conditions d'appui

$$y(a) = y_0 + \varphi_0 \cdot 3a - \frac{1}{EI} P \frac{a^3}{6} = 0; \quad (1)$$

$$y(3a) = y_0 + \varphi_0 \cdot 3a + \frac{1}{EI} \left[ -P \cdot \frac{(3a)^3}{6} + \frac{5}{2}P \cdot \frac{(2a)^3}{6} \right] = 0;$$

ou après simplifications

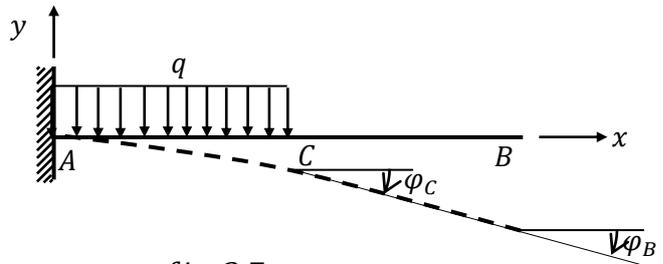


fig. 2.7

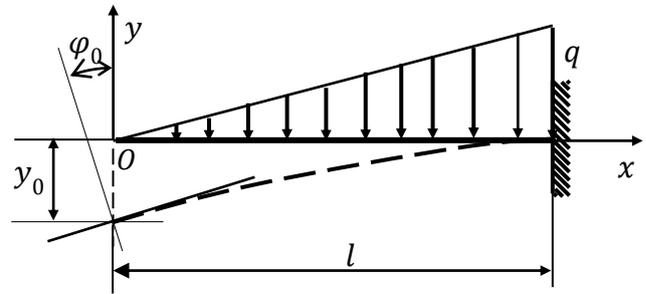


fig. 2.8

$$y(3a) = y_0 + \varphi_0 \cdot 3a - \frac{7Pa^3}{6EI} = 0. \quad (2)$$

Ce système de deux équations à deux inconnues a pour solution

$$\varphi_0 = \frac{Pa^2}{2EI}; \quad y_0 = -\frac{Pa^3}{3EI} = y_c$$

En introduisant les valeurs de ces deux paramètres dans l'équation de la ligne élastique, on obtient en définitive :

$$y(x) = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{Pa^3}{3} + \frac{Pa^2}{2}x - P \cdot \frac{x^3}{3!} + \begin{cases} \frac{5}{2}P \cdot \frac{(x-a)^3}{3!} \\ \frac{3}{2}P \cdot \frac{(x-3a)^3}{3!} \end{cases} \right] \quad (3)$$

Pour déterminer le déplacement en D, on pose dans l'équation (3)  $x = 2a$  ; naturellement, le dernier terme de l'expression (3) est exclu des calculs.

$$y_D = y(2a) = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{Pa^3}{3} + \frac{Pa^2}{2} \cdot 2a - P \cdot \frac{(2a)^3}{3!} + \frac{5}{2}P \cdot \frac{(2a-a)^3}{3!} \right] = -\frac{Pa^3}{4EI};$$

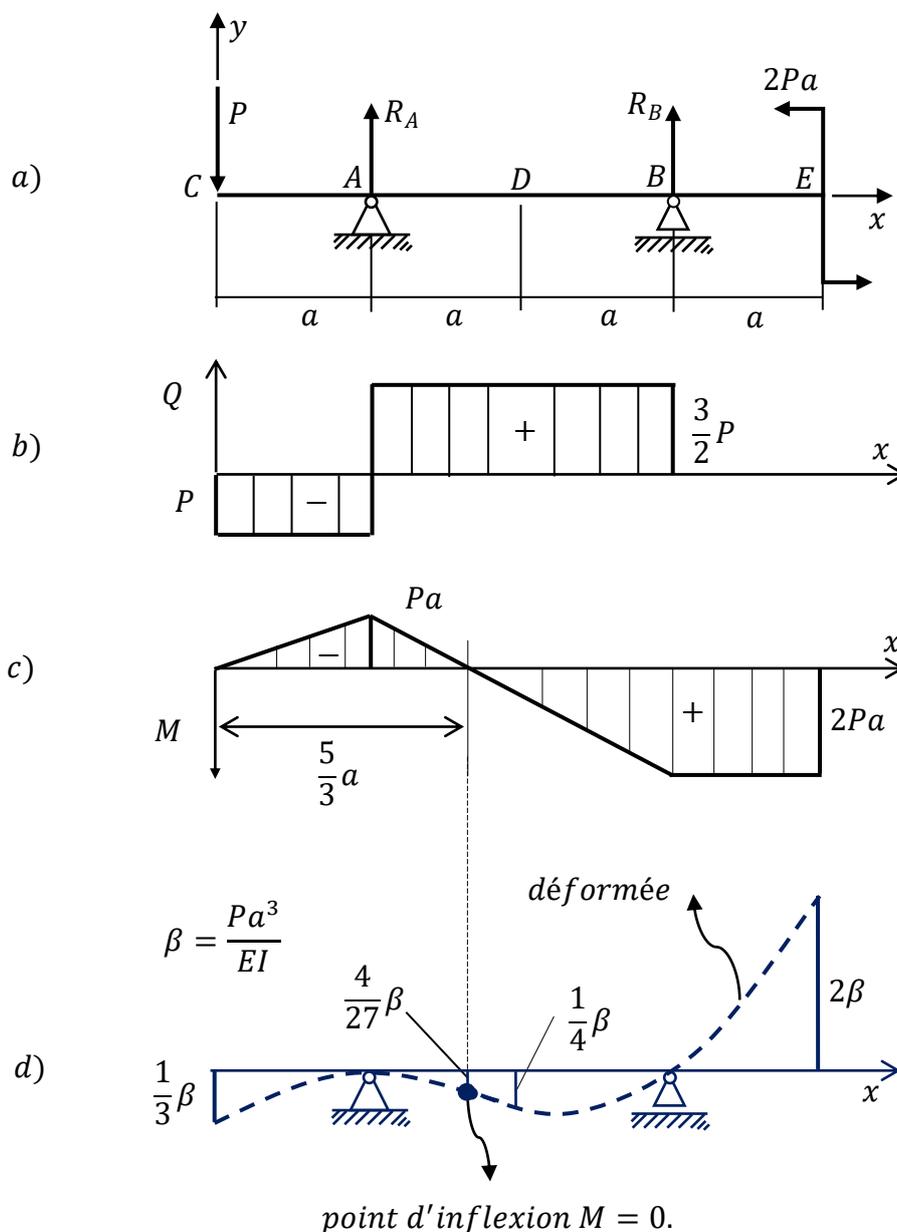


fig. 2.9

D'une manière analogue, on détermine le déplacement en E en posant  $x = 4a$

$$y_E = y(4a) = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{Pa^3}{3} + \frac{Pa^2}{2} \cdot 4a - P \cdot \frac{(4a)^3}{3!} + \frac{5}{2}P \cdot \frac{(4a-a)^3}{3!} - \frac{3}{2}P \cdot \frac{(4a-3a)^3}{3!} \right]$$

$$d'où \quad y_E = \frac{2Pa^3}{EI}.$$

Déterminons maintenant le déplacement au point où s'annule le moment fléchissant ( $M = 0$ : point d'inflexion de la déformée) fig.2.9, d.

Le moment fléchissant dans le tronçon AD a pour expression

$$M(x) = -Px + \frac{5}{2}(x-a) = \frac{P}{2}(3x-5a) \text{ qui s'annule au point } x = \frac{5}{3}a.$$

$$y\left(\frac{5}{3}a\right) = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{Pa^3}{3} + \frac{Pa^2}{2} \cdot \frac{5}{3}a - P \cdot \frac{(5a/3)^3}{3!} + \frac{5}{2}P \cdot \frac{(5a/3-a)^3}{3!} \right] = -\frac{4Pa^3}{27EI}.$$

On peut construire la déformée de la poutre en utilisant la relation entre le moment fléchissant et la courbure de de l'axe fléchi,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI};$$

où  $\rho$  – rayon de courbure;

- 1) sur le tronçon où le moment fléchissant est positif, la convexité de la déformée est tournée vers le bas ;
- 2) sur le tronçon où le moment est négatif, la convexité de la déformée est dirigée vers le haut ;
- 3) sur le tronçon où le moment est nul, la déformée est une ligne droite ;
- 4) dans la section où  $M = 0$ , la déformée admet un point d'inflexion.

### Exemple 2.5

Une poutre simple avec porte-à-faux, en acier doux et à section en double té (profilés laminés), est soumise à une charge répartie  $2q$  sur le tronçon CD, à un moment concentré  $m$  en B et à une force concentrée  $P$  en E, comme indiqué sur la figure (2.10, a). Dimensionner la poutre à la flexion, selon la condition de rigidité, c.à.d. trouver le numéro de profilé en double té vérifiant la condition de rigidité.

Données numériques :

$$[f] = 1\text{cm}; q = 1\text{ kN/m}; l = 2\text{m}; P = ql = 2\text{kN}; m = ql^2 = 4\text{kN.m}; E = 2 \cdot 10^{11}\text{Pa}.$$

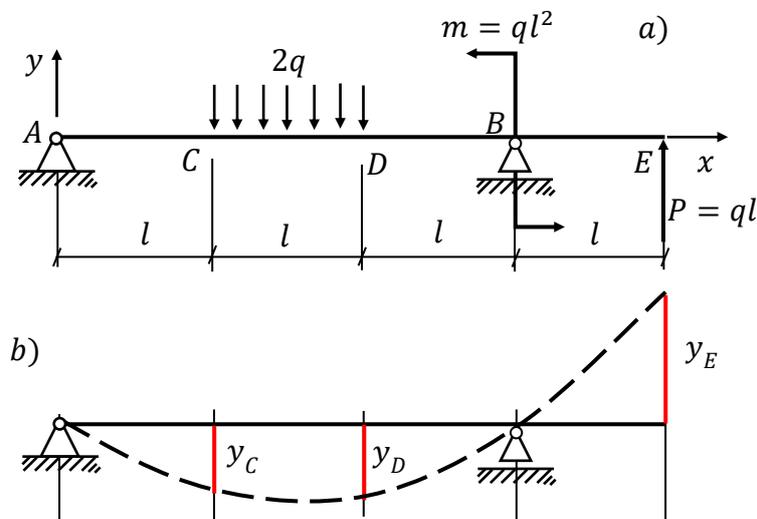


fig.2.10

Solution

Détermination des réactions

$$\begin{aligned}\sum M_A = 0: R_B &= -\frac{2ql}{3}; \\ \sum M_B = 0: R_A &= \frac{5ql}{3}.\end{aligned}$$

Valeurs des paramètres initiaux

$$Q_0 = \frac{5ql}{3}; M_0 = 0;$$

$$y_0 = 0; \varphi_0 \neq 0.$$

Donc, le seul paramètre qui reste à déterminer est l'angle de rotation  $\varphi_0$  à l'origine des coordonnées.

Pour cela, prolongeons la charge répartie jusqu'à l'extrémité droite de la poutre en y ajoutant la charge compensatrice et écrivons ensuite l'équation de la ligne élastique :

$$y(x) = \varphi_0 x + \frac{1}{EI} \left[ \frac{5}{3} ql \cdot \frac{x^3}{3!} + \left|_{x>a} -2q \frac{(x-l)^4}{4!} + \left|_{x>2a} 2q \frac{(x-2l)^4}{4!} + \left|_{x>3a} -ql^2 \cdot \frac{(x-3l)^2}{2!} - \frac{2}{3} ql \cdot \frac{(x-3l)^3}{3!} \right. \right]. \quad (1)$$

L'angle de rotation  $\varphi_0$  est déterminé grâce à la condition de bord en déplacement :

$$y_B = y(3l) = \varphi_0 \cdot 3l + \frac{1}{EI} \left[ \frac{5}{3} ql \cdot \frac{(3l)^3}{3!} + -2q \frac{(3l-l)^4}{4!} + 2q \frac{(3l-2l)^4}{4!} \right] = 0;$$

$$\text{ou } 3\varphi_0 + \frac{25ql^3}{4EI} = 0, \quad \text{d'où } \varphi_0 = -\frac{25ql^3}{12EI}.$$

Ainsi l'équation des déplacements prend la forme :

$$y(x) = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{25ql^3}{12} x + \frac{5}{3} ql \cdot \frac{x^3}{3!} + \left|_{x>a} -2q \frac{(x-l)^4}{4!} + \left|_{x>2a} 2q \frac{(x-2l)^4}{4!} + \left|_{x>3a} -ql^2 \cdot \frac{(x-3l)^2}{2!} - \frac{2}{3} ql \cdot \frac{(x-3l)^3}{3!} \right. \right]. \quad (2')$$

ou définitivement;

$$y(x) = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{25}{12} ql^3 \cdot x + \frac{5}{18} ql \cdot x^3 + \left|_{x>a} -\frac{1}{12} q(x-l)^4 + \left|_{x>2a} \frac{1}{12} q(x-2l)^4 + \left|_{x>3a} -\frac{1}{2} ql^2 \cdot (x-3l)^2 - \frac{1}{9} ql(x-3l)^3 \right. \right]. \quad (2)$$

Déterminons les déplacements  $y_C$ ;  $y_D$  et  $y_E$

$$y_C = y(l) = \frac{1}{EI} \left( -\frac{25}{12} ql^3 \cdot l + \frac{5}{18} ql \cdot l^3 \right) = -\frac{65ql^4}{36EI};$$

$$y_D = y(2l) = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{25}{12} ql^3 \cdot 2l + \frac{5}{18} ql \cdot (2l)^3 + -\frac{1}{12} q(2l-l)^4 \right] = -\frac{73ql^4}{36EI};$$

$$y_E = y(4l) = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{25}{12} ql^3 \cdot 4l + \frac{5}{18} ql \cdot (4l)^3 + -\frac{1}{12} q(4l-l)^4 + \frac{1}{12} q(4l-2l)^4 \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2} ql^2 \cdot (4l-3l)^2 - \frac{1}{9} ql(4l-3l)^3 \right] = \frac{41ql^4}{12EI} = \frac{123ql^4}{36EI}.$$

- On construit la déformée à partir des déplacements trouvés, on peut vérifier facilement que le moment fléchissant est positif sur toute la longueur de la poutre et que la convexité de l'axe déformé est tournée vers le bas ; fig.2.10, b.
- Le déplacement maximal (ou la flèche) apparaît à l'extrémité de la console en E ;  $y_E = y_{max}$  .

Déterminons le numéro de profilé en double té selon la condition de rigidité  $y_{max} \leq [f]$

$$\frac{41ql^4}{12EI} \leq [f] \Rightarrow I \geq \frac{41ql^4}{12E[f]};$$

$$I \geq \frac{41ql^4}{12E[f]} = I \geq \frac{41 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 2^4}{12 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-2}} = 27,3 \cdot 10^{-6} m^4 = 2730 cm^2.$$

Donc, le numéro du profilé en double té vérifiant la condition de rigidité est -22a- pour lequel le moment d'inertie  $I = 2790 cm^4$  et le moment de résistance  $W = 254 cm^3$ .

### 2.2.1 Déformée de la poutre contenant une articulation intermédiaire

Les équations de la ligne élastique (13) et des angles de rotations (14) sont obtenues pour une partie de la poutre ne contenant pas d'articulations intermédiaires qui rompent l'harmonie de l'axe fléchi.

Considérons la poutre, présentée fig.2.11, contenant une articulation en B. En plaçant l'origine des coordonnées, pour tous les tronçons, en A ; dans ce cas, la détermination des déplacements est possible, seulement si l'on envisage la poutre par parties : les parties AB et BC séparément.

On peut, cependant, montrer un procédé de généralisation de la méthode des paramètres initiaux, pour le cas d'une poutre contenant une articulation intermédiaire. Pour cela, écrivons les équations différentielles pour les tronçons AB et BC et intégrons-les deux fois :

- Pour le tronçon AB

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI};$$

$$\varphi(x) = \frac{dy(x)}{dx} = \int \frac{M(x)}{EI} dx + C_g; \quad (15)$$

$$y(x) = \int dx \int \frac{M(x)}{EI} dx + C_g x + D_g; \quad (16)$$

- Pour le tronçon BC

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI};$$

$$\varphi(x) = \frac{dy(x)}{dx} = \int \frac{M(x)}{EI} dx + C_d; \quad (17)$$

$$y(x) = \int dx \int \frac{M(x)}{EI} dx + C_d x + D_d; \quad (18)$$

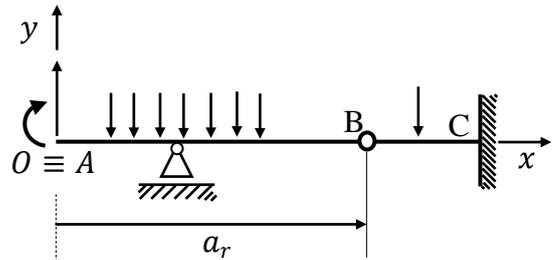


fig.2.11

Suite à la présence de l'articulation, les angles de rotation à gauche et à droite du point B se distinguent d'un certain angle  $\Delta\varphi$ . Pour établir la relation entre les constantes  $C_g, C_d, D_g$  et  $D_d$ , écrivons la condition de liaison des tronçons en B.

$$y(a_r)_g = y(a_r)_d; \quad (19)$$

$$\varphi(a_r)_g + \Delta\varphi = \varphi(a_r)_d. \quad (20)$$

En insérant dans les égalités (19) et (20) les valeurs  $y(a_r)$  et  $\varphi(a_r)$  des expressions (16), (18) et (15), (17), pour  $x = a_r$ , on obtient

$$C_g + \Delta\varphi = C_d; \quad (21)$$

$$C_g a_r + D_g = C_d a_r + D_d; \quad (22)$$

Des égalités (21) et (22), on a

$$D_d = -\Delta\varphi \cdot a_r + D_g \quad (23)$$

En portant les égalités (21) et (23) dans les équations (17) et (18), on peut écrire les équations des angles de rotations et des déplacements sur le tronçon BC sous cette forme :

$$\varphi(x) = \frac{dy(x)}{dx} = \int \frac{M(x)}{EI} dx + C_g + \Delta\varphi; \quad (24)$$

$$y(x) = \int dx \int \frac{M(x)}{EI} dx + C_g x + D_g + \Delta\varphi \cdot (x - a_r). \quad (25)$$

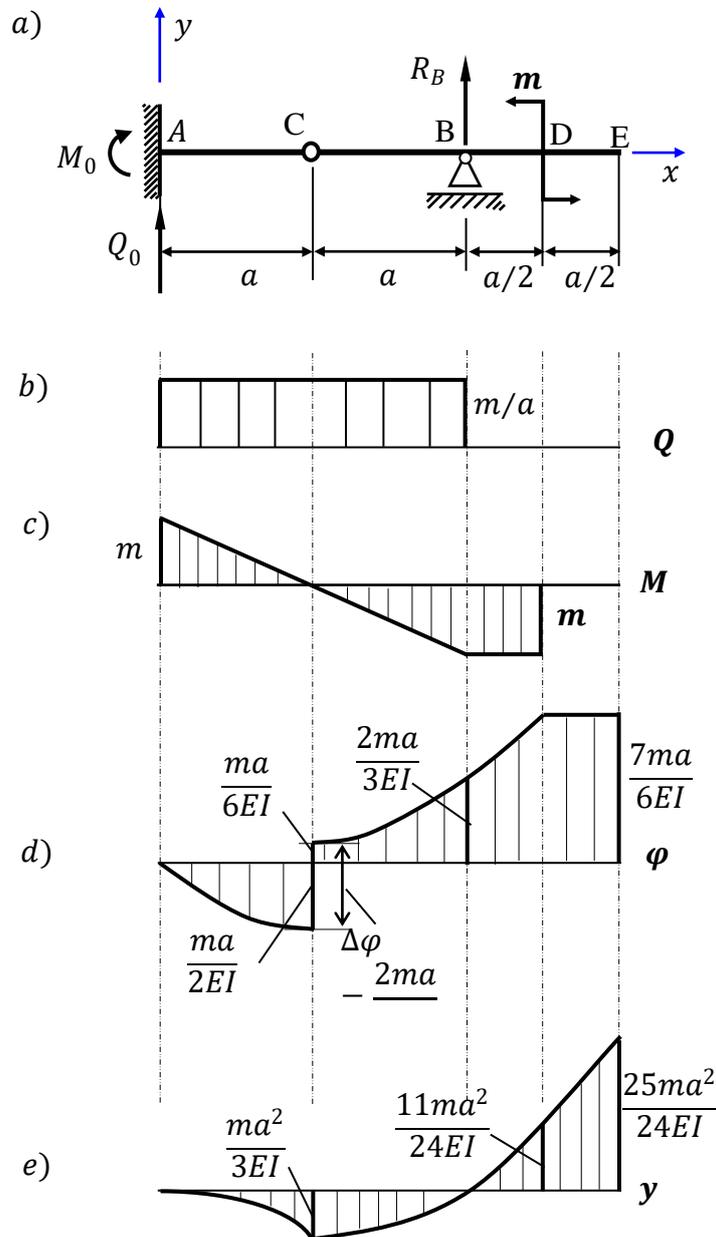


fig. 2.12

Comme il a été établi, à gauche de la rotule B, les constantes d'intégration C et D sont les mêmes sur tous les tronçons et présentent successivement l'angle de rotation et le déplacement à l'origine des coordonnées. On en conclut que pour les sections à droite de l'articulation, il convient d'introduire dans l'équation universelle de la ligne élastique le terme supplémentaire  $\Delta\varphi \cdot (x - a_r)$  et dans l'équation des rotations – le terme  $\Delta\varphi$ .

### Exercice 2.7

Pour la poutre en porte-à-faux de la figure (2.12, a), contenant une articulation intermédiaire en C et soumise à un moment concentré en D, tracer les diagrammes des moments de flexion  $M$ , des efforts tranchants  $Q$ , de la déformée  $y$  et des angles de rotation  $\varphi$ .

Solution

Détermination des réactions d'appui

$$\begin{aligned}\sum M_C^{\text{à droite}} &= m + R_B \cdot a = 0; \\ R_B &= -\frac{m}{a}. \\ \sum M_A &= m - \frac{m}{a} 2a - M_0 = 0; \\ M_0 &= -m. \\ \sum Y &= 0: Q_0 = \frac{m}{a}.\end{aligned}$$

Ainsi les paramètres statiques ont pour valeurs

$$Q_0 = \frac{m}{a}; M_0 = -m.$$

Les conditions d'appui A fournissent :

$$y_0 = \varphi_0 = 0.$$

L'équation universelle de la ligne élastique, compte tenu de l'expression (25), s'écrit

$$y(x) = \frac{1}{EI} \left[ M_0 \cdot \frac{x^2}{2!} + Q_0 \cdot \frac{x^3}{3!} + \left|_{x>a} EI \Delta\varphi_C \cdot (x - a) + \left|_{x>2a} R_B \cdot \frac{(x - 2a)^3}{3!} - \left|_{x>5a/2} m \cdot \frac{(x - 5a/2)^2}{2!} \right. \right. \right]$$

ou

$$y(x) = \frac{1}{EI} \left[ -m \cdot \frac{x^2}{2!} + \frac{m}{a} \cdot \frac{x^3}{3!} + \left|_{x>a} EI \Delta\varphi_C \cdot (x - a) - \left|_{x>2a} \frac{m}{a} \cdot \frac{(x - 2a)^3}{3!} - \left|_{x>5a/2} m \cdot \frac{(x - 5a/2)^2}{2!} \right. \right. \right] \quad (1)$$

La valeur de l'angle de rotation réciproque  $\Delta\varphi_C$  est calculée grâce à la condition d'appui  $y_B = y(2a) = 0$

$$\begin{aligned}y(2a) &= \frac{1}{EI} \left[ -m \cdot \frac{(2a)^2}{2!} + \frac{m}{a} \cdot \frac{(2a)^3}{3!} + EI \Delta\varphi_C \cdot (2a - a) \right] = 0; \\ \Delta\varphi_C &= \frac{1}{EI} \left( 2ma - \frac{4}{3}ma \right) = \frac{2ma}{3EI} \quad (2)\end{aligned}$$

En introduisant (2) dans (1), on obtient en définitive

$$y(x) = \frac{1}{EI} \left[ -m \cdot \frac{x^2}{2!} + \frac{m}{a} \cdot \frac{x^3}{3!} + \left|_{x>a} \frac{2ma}{3} \cdot (x - a) - \left|_{x>2a} \frac{m}{a} \cdot \frac{(x - 2a)^3}{3!} - \left|_{x>5a/2} m \cdot \frac{(x - 5a/2)^2}{2!} \right. \right. \right]$$

$$m \cdot \frac{(x - 5a/2)^2}{2!} \quad (3)$$

Déterminons les déplacements dans les sections caractéristiques (C, D et E),

$$y_C = y(a) = \frac{1}{EI} \left( -m \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{m}{a} \cdot \frac{a^3}{6} \right) = -\frac{ma^2}{2EI};$$

$$y_D = y\left(\frac{5}{2}a\right) = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{m}{2} \cdot \left(\frac{5}{2}a\right)^2 + \frac{m}{6a} \cdot \left(\frac{5}{2}a\right)^3 + \frac{2ma}{3} \cdot \left(\frac{5}{2}a - a\right) - \frac{m}{6a} \cdot \left(\frac{5}{2}a - 2a\right)^3 \right]$$

ou  $y_D = \frac{11ma^2}{24EI};$

$$y_E = y(3a) = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{m}{2} \cdot (3a)^2 + \frac{m}{6a} \cdot (3a)^3 + \frac{2ma}{3} \cdot 2a - \frac{m}{6a} \cdot a^3 - \frac{m}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right]$$

ou  $y_E = \frac{25ma^2}{24EI};$

Déterminons des angles de rotation dans les sections caractéristiques (C, B, D et E)

L'équation des angles de rotation est obtenue par simple dérivation de l'équation de la ligne élastique (3)

$$\varphi(x) = \frac{1}{EI} \left[ -m \cdot x + \frac{m}{a} \cdot \frac{x^2}{2!} + \left. \frac{2ma}{3} \right|_{x>a} - \left. \frac{m}{a} \cdot \frac{(x-2a)^2}{2!} \right|_{x>5a/2} - m \cdot (x - 5a/2) \right] \quad (4)$$

Pour  $x = a$

$$\varphi_g = \varphi(a) = \frac{1}{EI} \left( -m \cdot a + \frac{m}{a} \cdot \frac{a^2}{2} \right) = -\frac{ma}{2EI};$$

$$\varphi_d = \varphi_g + \Delta\varphi_c = -\frac{ma}{2EI} + \frac{2ma}{3EI} = \frac{ma}{6EI}.$$

$x = 2a$

$$\varphi_B = \varphi(2a) = \frac{1}{EI} \left( -m \cdot 2a + \frac{m}{2a} (2a)^2 + \frac{2}{3} ma \right) = \frac{2ma}{3EI};$$

$x = 5a/2$

$$\varphi_D = \varphi\left(\frac{5}{2}a\right) = \frac{1}{EI} \left[ -m \cdot \frac{5}{2}a + \frac{m}{2a} \left(\frac{5}{2}a\right)^2 + \frac{2}{3} ma - \frac{m}{2a} \left(\frac{1}{2}a\right)^2 \right] = \frac{7ma}{6EI} = \varphi_E.$$

A partir des résultats obtenus, on construit les diagrammes  $y$  et  $\varphi$  (fig.2.12, d, e). Notons quelques particularités de ces épures : l'épure  $\varphi$  présente un extrémum au point  $M = 0$ , au point C les tangentes à la courbe  $\varphi$  sont parallèles à l'axe  $x$ ; à ce point, on remarque un saut avec changement de signes. Sur l'épure  $y$  la tangente au point A est parallèle à l'axe  $x$ . Dans la section où l'épure  $\varphi$  a un saut, l'épure  $y$  a un point anguleux (rupture et changement de signe de la courbure).

## Application numérique

Dimensionnement de la poutre à la flexion

Trouver le numéro du profilé en double té, selon Gost, vérifiant les conditions de résistance et de rigidité de la poutre.

On donne :  $m = 160kN \cdot m; a = 2m; E = 2 \cdot 10^5 MPa; [\sigma] = 160 MPa; [f] = 1cm.$

Solution

De la condition de résistance, on a

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} \leq [\sigma] \text{ ou } W \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]};$$

où  $M_{max} = m = 160 \text{ kN} \cdot \text{m}$ , on trouve le module de résistance nécessaire:

$$W \geq \frac{160}{160 \cdot 10^3} = 10^{-3} \text{ m}^3 = 1000 \text{ cm}^3.$$

D'après le tableau des profilés en double té, on opte pour le numéro 45, pour lequel  $W = 1231 \text{ cm}^3$  et  $I = 27696 \text{ cm}^4$ .

Vérifions la condition de rigidité

$$f_{max} = y_E = \frac{25}{24} \cdot \frac{ma^2}{EI} = \frac{25}{24} \cdot \frac{160 \cdot 4}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot 27696 \cdot 10^{-8}} = 0,011 \text{ m} = 1,1 \text{ cm} > [f] = 1 \text{ cm}.$$

la condition de rigidité:  $f_{max} \leq [f]$  n'est pas vérifiée. Il est nécessaire d'augmenter les dimensions de la section droite, en partant de la condition :

$$f_{max} = \frac{25}{24} \cdot \frac{160 \cdot 4}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot I} \leq [f] = 0,01 \text{ m};$$

$$\text{ou } I \geq \frac{25}{24} \cdot \frac{160 \cdot 4}{2 \cdot 10^8 \cdot 0,01} = 333,33 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 = 33333 \text{ cm}^4.$$

qui correspond au N°50 ( $I = 39727 \text{ cm}^4$ ).

## 2.2.2 Poutres hyperstatiques

Lors de calcul des systèmes hyperstatiques, les paramètres statiques  $Q_0$  et  $M_0$  peuvent être inconnus. Pour résoudre de tels problèmes, on écrit les conditions aux limites tant statiques que cinématiques. En utilisant ces conditions, on peut obtenir le nombre nécessaire des équations algébriques linéaires relativement à toutes les grandeurs inconnues. La méthode de calcul des poutres hyperstatiques sera envisagée dans l'exercice suivant.

### Exercice 2.8

Déterminer à l'aide de la méthode des paramètres initiaux, pour la poutre de la figure (2.13, a), les valeurs des efforts tranchants, moments de flexion, angles de rotation et les déplacements dans les sections caractéristiques de la poutre. Tracer ensuite les épures  $M$ ,  $Q$ ,  $y$  et  $\varphi$ .

Solution

Puisque le nombre de liaisons extérieures ( $L = 5$ ) dépasse le nombre des conditions d'équilibre: trois équations de la statique, plus la condition supplémentaire en B:  $M_B = 0$ ; la poutre est donc hyperstatique d'ordre  $D = L - 4 = 1$ .

Nous avons, selon les conditions du problème  $y_0 = \varphi_0 = 0$ ; il reste à déterminer les paramètres statiques  $M_0$  et  $Q_0$ , pour cela, on écrit les équations de la flèche et sa dérivée :

$$y(x) = \frac{1}{EI} \left[ M_0 \cdot \frac{x^2}{2!} + Q_0 \cdot \frac{x^3}{3!} + \left| \begin{array}{l} EI \Delta \varphi_B \cdot (x - 2a) - \frac{q(x - 2a)^4}{4!} \end{array} \right|_{x > 2a} \right];$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{EI} \left[ M_0 \cdot x + Q_0 \cdot \frac{x^2}{2!} + \left| \begin{array}{l} EI \Delta \varphi_B - \frac{q(x - 2a)^3}{3!} \end{array} \right|_{x > 2a} \right].$$

En utilisant la condition supplémentaire en B, on peut écrire

$$\sum M_B^g = M_0 + Q_0 \cdot 2a = 0 \text{ ou } M_0 = -Q_0 \cdot 2a.$$

Pour déterminer les grandeurs inconnues  $Q_0$  et  $\Delta \varphi_B$ , on utilise les conditions de bord en C

$$y(5a) = \varphi(5a) = 0.$$

$$y(5a) = \frac{1}{EI} \left[ -Q_0 \cdot 2a \cdot \frac{(5a)^2}{2!} + Q_0 \cdot \frac{(5a)^3}{3!} + EI \Delta \varphi_B \cdot (5a - 2a) - \frac{q(5a - 2a)^4}{4!} \right] = 0;$$

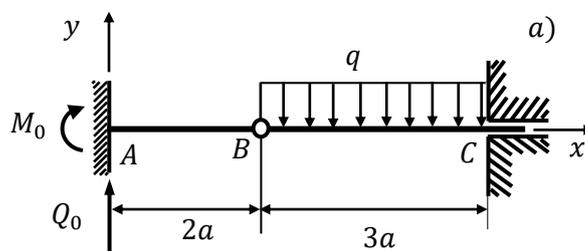


fig. 2.13

$$\varphi(5a) = \frac{1}{EI} \left[ -Q_0 \cdot 2a \cdot 5a + Q_0 \cdot \frac{(5a)^2}{2!} + EI\Delta\varphi_B - \frac{q(5a-2a)^3}{3!} \right] = 0.$$

On obtient un système de deux équations algébriques linéaires en  $Q_0$  et  $\Delta\varphi_B$

$$\begin{cases} -\frac{25a^2}{6}Q_0 + 3EI\Delta\varphi_B = \frac{27qa^3}{8}; \\ \frac{5a^2}{2}Q_0 + EI\Delta\varphi_B = \frac{9qa^3}{2}. \end{cases}$$

qui a pour solution:  $Q_0 = \frac{243}{280}qa = 0,87qa;$   $\Delta\varphi_B = \frac{261qa^3}{112EI} = 2,33\frac{qa^3}{EI}.$

Déterminons les valeurs  $Q$  et  $M$  dans les sections caractéristiques de la poutre

$$Q_A = Q_B = Q_0 = 0,87qa; \quad Q_C = 0,87qa - 3qa = -2,13qa;$$

$$M_A = M_0 = -Q_0 \cdot 2a = -1,74qa^2; \quad M_C = M_0 + Q_0 \cdot 5a - q\frac{(3a)^2}{2} = -1,89qa^2;$$

Calculons la valeur extrême du moment dans le tronçon BC

$$\frac{dM}{dx} = 0,87qa - qx = 0 \rightarrow x = 0,87a: \quad M_{max} = M(0,87a) = \frac{q}{2}(0,87a)^2 = 0,38qa^2;$$

de plus, le moment, sur ce tronçon, s'annule au point  $x_0 = 1,74a$ .

Les épures  $Q$  et  $M$  sont présentées (fig.2.13, b, c). Réécrivons les expressions  $y$  et  $\varphi$  :

$$y(x) = \frac{1}{EI} \left[ -1,74qa^2 \cdot \frac{x^2}{2!} + 0,87qa \cdot \frac{x^3}{3!} + \left|_{x>2a} 2,33qa^3 \cdot (x-2a) - \frac{q(x-2a)^4}{4!} \right]; \right.$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{EI} \left[ -1,74qa^2 \cdot x + 0,87qa \cdot \frac{x^2}{2!} + \left|_{x>2a} 2,33qa^3 - \frac{q(x-2a)^3}{3!} \right]. \right.$$

Calculons les valeurs  $y$  et  $\varphi$  dans les sections caractéristiques de la poutre :

$x = 2a$ :

$$y_B = y(2a) = \frac{1}{EI} \left[ -1,74qa^2 \cdot \frac{(2a)^2}{2} + 0,87qa \cdot \frac{(2a)^3}{6} \right] = -2,32\frac{qa^4}{EI};$$

$$\varphi_g = \varphi(2a) = \frac{1}{EI} \left[ -1,74qa^2 \cdot 2a + 0,87qa \cdot \frac{(2a)^2}{2} \right] = -1,74\frac{qa^3}{EI};$$

$$\varphi_d = \varphi_g + \Delta\varphi_B = -1,74\frac{qa^3}{EI} + 2,33\frac{qa^3}{EI} = 0,59\frac{qa^3}{EI}.$$

$x = 2,87a$ :

$$y(2,87a) = \frac{1}{EI} \left[ -1,74qa^2 \cdot \frac{(2,87a)^2}{2} + 0,87qa \cdot \frac{(2,87a)^3}{6} + \right. \\ \left. + 2,33qa^3 \cdot (2,87a - 2a) - \frac{q(2,87a - 2a)^4}{4!} \right] = -1,74\frac{qa^4}{EI};$$

$$\varphi(2,87a) = \frac{1}{EI} \left[ -1,74qa^2 \cdot 2,87a + 0,87qa \cdot \frac{(2,87a)^2}{2} + \right. \\ \left. + 2,33qa^3 - \frac{q(2,87a - 2a)^3}{6} \right] = 0,81\frac{qa^3}{EI};$$

Avec les résultats obtenus, on construit les épures  $\varphi$  et  $y$  (fig.2.13, d, e).  
 Notons les particularités de ces épures : l'épure  $\varphi$  présente un extrémum au point, où  $M = 0$ , un saut avec changement de signe en B et un point d'inflexion dans la section  $x = 0,87a$ , où  $Q = 0$ . En B les tangentes à l'épure sont parallèles à l'axe  $x$ .

Sur l'épure  $y$ , en A et C les tangentes sont parallèles à l'axe. La courbe  $y$  admet un point anguleux en B avec changement de signe de la courbure ; et un point d'inflexion dans la section où  $M = 0$ .

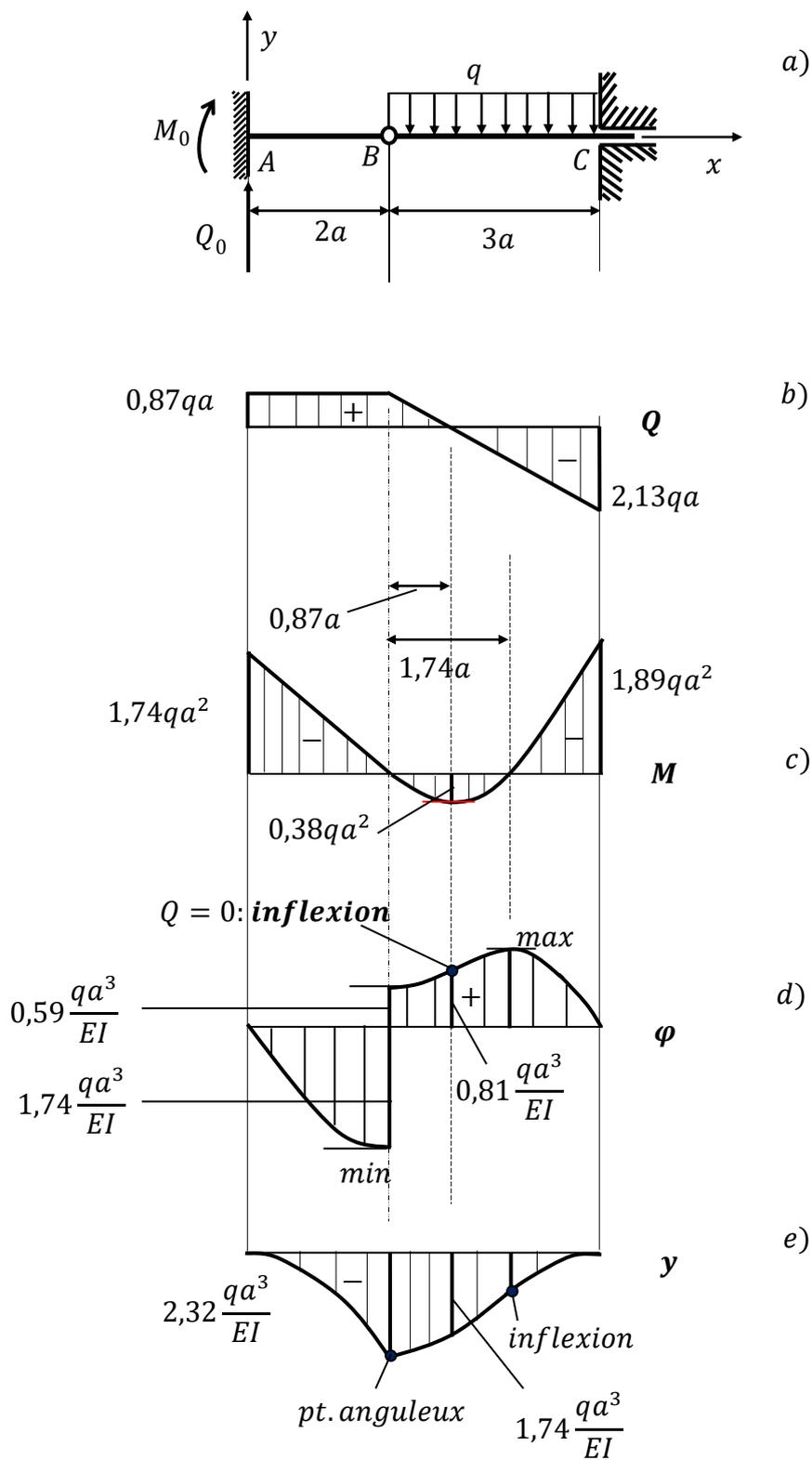


fig.2.13

## 2.6 Méthode Des Moments d'Aires

Cette méthode est particulièrement appropriée pour l'étude des poutres dont la rigidité  $EI$  varie selon la longueur.

Réécrivons l'équation de la ligne élastique (4) sous forme :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M}{EI} \quad (26)$$

d'où

$$d\varphi = \frac{M}{EI} dx \quad (27)$$

### Théorème I : Variation de pente

L'angle compris entre les tangentes élastiques en un point A et en un point B, est égal à l'aire comprise entre ces deux points, sous la courbe  $M/EI$  ;

$$\varphi_{AB} = \left[ \text{aire sous } \frac{M}{EI} \right]_A^B \quad (28)$$

En effet, en intégrant l'équation (27), on peut déterminer la variation de pente  $\varphi_{AB}$  entre les points A et B.

$$\varphi_{AB} = \int_A^B d\varphi = \int_{x_A}^{x_B} \frac{M}{EI} dx \quad (28^*)$$

Mais, l'élément de droite de l'équation (28 \*) représente l'aire sous la courbe  $M/EI$ , comprise entre  $x_A$  et  $x_B$ . Ce qui donne l'équation (28).

### Théorème II : Flèche tangentielle

La flèche tangentielle issue d'un point quelconque B sur la tangente passant par un autre point A de la ligne élastique, est égale au moment, par rapport au point B, de l'aire sous la courbe  $M/EI$ , comprise entre A et B.

$$\Delta_{BA} = \left[ \text{aire sous } \frac{M}{EI} \right]_A^B \cdot \bar{x}_B \quad (29)$$

$\bar{x}_B$  - est la distance qui sépare le point B du centre de gravité de cette aire.

En considérant la distance  $d\Delta$ , sur la droite verticale passant par le point B, on peut vérifier facilement l'équation (29)

$$d\Delta = (x_B - x)d\varphi \quad (30)$$

En intégrant (30), on obtient

$$\Delta_{BA} = \int_{x_A}^{x_B} (x_B - x) \frac{M}{EI} dx \quad (29^*)$$

$\Delta_{BA}$  - étant la flèche tangentielle au point B par rapport au point A.

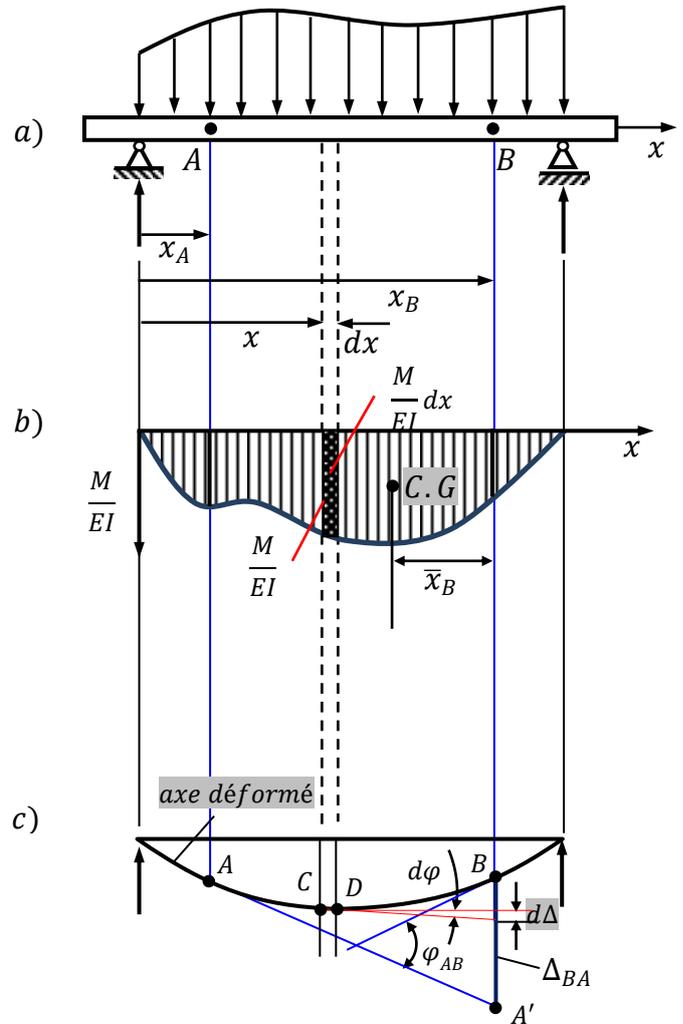


fig. 2.14

Par convention le premier indice représente le point situé sur la courbe élastique, et le deuxième le point duquel est issue la tangente ( $\Delta_{BA} = BA'$ , fig.12.14, c).

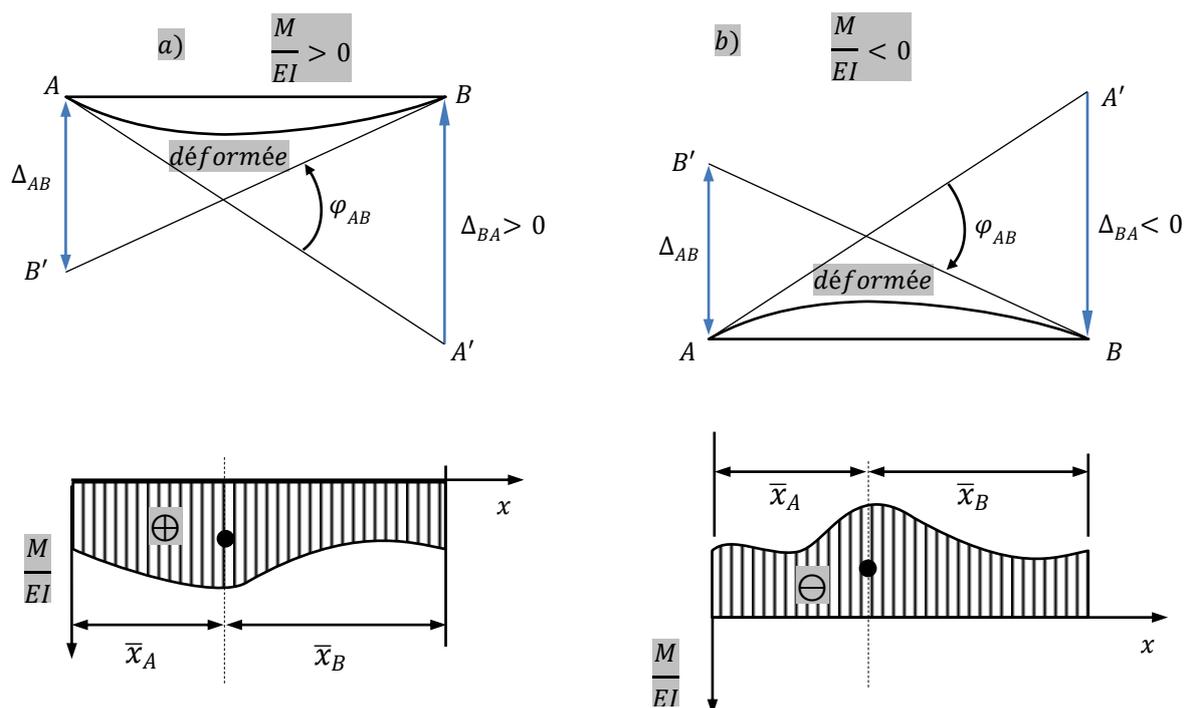


fig. 2. 15

L'intégrale (29\*) n'est autre chose que le moment de l'aire sous la courbe  $M/EI$ , comprise entre  $x_A$  et  $x_B$ ; ce moment est évalué par rapport à l'axe vertical passant par le point B. Ce qui permet de réécrire l'équation (29\*) sous la forme (29).

La convention de signes et d'indices pour la flèche tangentielle et la variation de pente est donnée à la figure 2.15.

Les flèches tangentielles ainsi que le point d'intersection des tangentes sont situés au-dessous de la poutre lorsque le moment fléchissant est positive (fig.2.15, a). On constate l'inverse, lorsque le moment fléchissant est négatif (fig.2.15, b).

**2.6.1 Application de la méthode des moments d'aires au calcul des flèches et des pentes**

**Exercice 2.14**

Déterminer pour la poutre de la figure (2.16, a), la pente et la flèche au point B.

**Solution**

La figure (2.16, b) illustre la ligne élastique prévisible. L'encastrement impose que la courbe élastique soit horizontale en A; ce qui simplifie considérablement le problème.

Comme la rigidité EI est constante, les épures de M et de  $M/EI$  sont similaires.

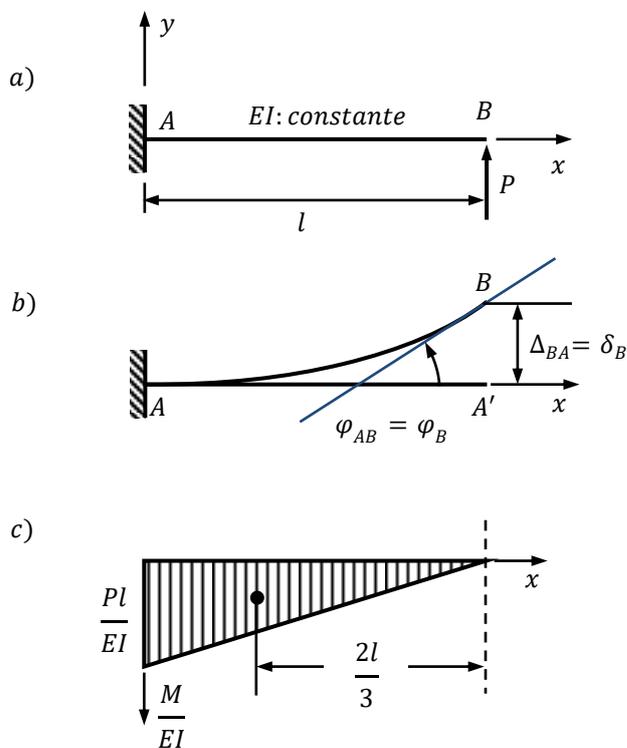


fig. 2. 16

a) Calcul de la pente en B

Puisque la ligne élastique est horizontale en A, l'angle  $\varphi_B$  peut être évalué en calculant  $\varphi_{AB}$

$\varphi_{AB}$ - aire sous  $M/EI$ , entre A et B.

$$\varphi_B = \varphi_{AB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Pl}{EI} \cdot l = \frac{Pl^2}{2EI} \quad (a)$$

b) Calcul de la flèche au point B

Puisque la tangente en A est horizontale, la flèche  $\Delta_B$  est égale à la flèche tangentielle  $\Delta_{BA}$ - moment par rapport à B de l'aire sous  $M/EI$ , entre A et B.

$$\Delta_B = \frac{1}{2} \cdot \frac{Pl}{EI} \cdot l \cdot \frac{2}{3}l = \frac{Pl^3}{3EI} \quad (b)$$

Le fait que  $\Delta_B$  soit positif indique que le déplacement du point B s'effectue vers le haut par rapport à la tangente en A.

### Application numérique

Soit  $E = 200 \text{ MPa}$  (acier),  $l = 2\text{m}$ ,  $P = 1\text{kN}$ .

Calculons le moment d'inertie,

$$I = \frac{30 \cdot 60^3}{12} = 0,54 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 = 0,54 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4;$$

$$EI = 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,54 \cdot 10^{-6} = 1,08 \cdot 10^5 \text{ Nm}^2;$$

$$\varphi = \frac{Pl^2}{2EI} = \frac{10^3 \cdot 2^2}{2 \cdot 1,08 \cdot 10^5} = 0,0247 \text{ m} = 24,7 \text{ mm}.$$

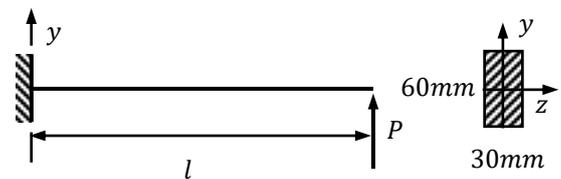


fig. 2.16, d

### Exercice 2.15

Déterminer pour la poutre de la figure (2.17, a), la pente et la flèche au point B.

#### Solution

Comme dans l'exercice précédent, la ligne élastique est horizontale en A, l'angle  $\varphi_B$  peut être évalué en calculant  $\varphi_{AB}$  à partir de l'équation (28\*) ou à partir du théorème I relation (28), on a donc

a) Calcul de la pente en B

$$\begin{aligned} \varphi_B = \varphi_{AB} &= \left[ \text{aire sous } \frac{M}{EI} \right]_A^B = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{ql^2}{2EI} \cdot l = \frac{Pl^3}{6EI}; \end{aligned}$$

ou à partir de l'équation (28\*)

$$\varphi_B = \varphi_{AB} = \int_0^l \frac{M}{EI} dx =$$

$$\frac{1}{EI} \int_0^l \left( -\frac{ql^2}{2} + qlx - \frac{qx^2}{2} \right) dx = \frac{Pl^3}{6EI}.$$

b) Calcul de la flèche au point B

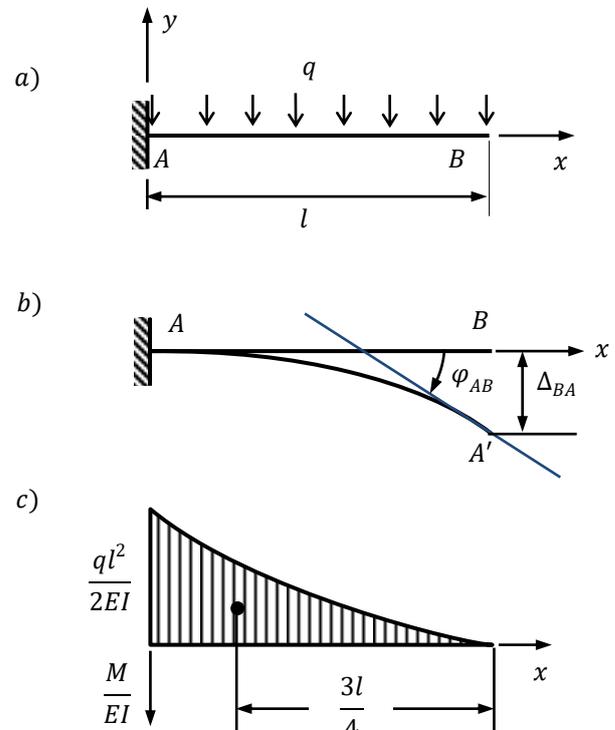


fig. 2.17

$$\delta_B = \Delta_{BA} = \left[ \text{aire sous } \frac{M}{EI} \right]_A^B \cdot \bar{x}_B = \frac{ql^3}{6EI} \cdot \frac{3l}{4} = \frac{ql^4}{8EI} \quad (\text{vers le bas});$$

ou à partir de l'équation (29 \*)

$$\Delta_B = \Delta_{BA} = \int_0^l (l-x) \frac{M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^l (l-x) \left( -\frac{ql^2}{2} + qlx - \frac{qx^2}{2} \right) dx = -\frac{ql^4}{8EI} \quad (\text{en bas}).$$

**NOTE :** Lorsque le chargement est réparti sur la poutre, l'épure des moments fléchissants n'est plus linéaire, comme c'était au cas de charges concentrées. Dans ces conditions, il est préférable d'utiliser les tableaux donnant l'aire et le centre de gravité des figures paraboliques. (Le tableau III.2, Chap.3 fournit les aires et les CDG de quelques figures simples, les plus usitées).

### Exercice 2.16

La poutre simplement appuyée de la figure 2.18a est de rigidité  $EI$  constante. On demande de calculer le déplacement, en C, du point d'application de la force P.

#### Solution

En utilisant comme repère la tangente à la l'axe déformé, au point A, on peut calculer la flèche  $\delta_D$  (fig.2.18, c). On a ainsi

$$\delta_D = \overline{CE} - \overline{ED} = \frac{\Delta_{BA}}{l} \cdot a - \Delta_{DA}$$

où  $\Delta_{BA}$  et  $\Delta_{DA}$  – flèches tangentielles déterminées au moyen du théorème II.

Etablissons le digramme stratifié « diagrammes simples, isolés sous l'action de chaque charge, pour simplifier le calcul des aires et des centres de gravité des figures », fig.2.18d.

$$\Delta_{BA} = \left[ \text{aire sous } \frac{M}{EI} \right]_A^B \cdot \bar{x}_B =$$

$$\frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} Pb \cdot l \cdot \frac{l}{3} - \frac{1}{2} Pb^2 \cdot \frac{b}{3} \right] = \frac{Pb}{6EI} (l^2 - b^2)$$

$$\Delta_{DA} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{Pab}{l} \cdot a \cdot \frac{a}{3} \right] = \frac{Pa^3 b}{6EI l}$$

$$\delta_D = \frac{Pab}{6EI} (l^2 - b^2) - \frac{Pa^3 b}{6EI l} =$$

$$\frac{Pab}{6EI} (l^2 - b^2 - a^2) = \frac{Pab}{6EI} \cdot 2ab = \frac{Pa^2 b^2}{3EI}.$$

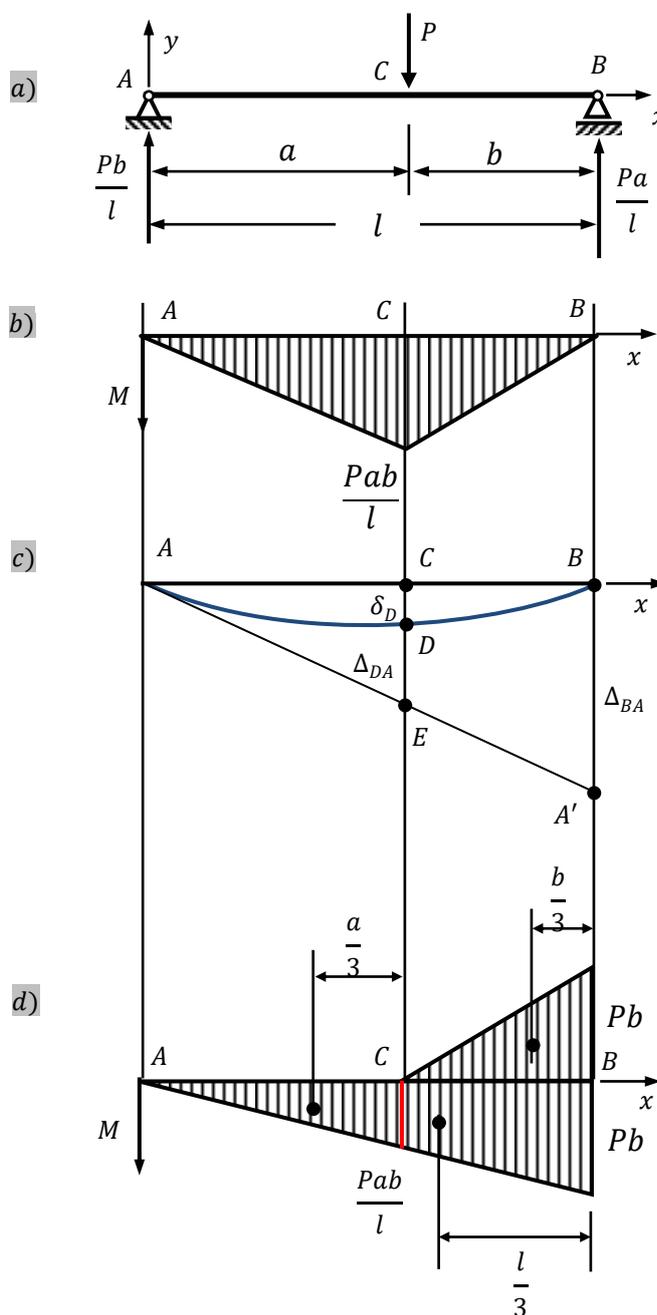


fig. 2.18

### Exercice 2.17

La poutre de section variable présentée à la figure 2.19a est soumise à une force concentrée, appliquée au milieu de la travée, valant 36 kN.

Les dimensions respectives des sections transversales sont :  $S = 100 \times 100 \text{ mm}$  et

$S' = 120 \times 120 \text{ mm}$ . Le module de Young du matériau de la poutre  $E = 200 \text{ GPa}$ . On demande de déterminer la flèche (déplacement maximal) de la poutre.

### Solution

En vertu de la symétrie, la déformée est symétrique et le flèche  $f$  a lieu au milieu de la poutre, fig.2.19b.

Ainsi,

$$f = \delta_{max} = \delta_E = \Delta_{AE}$$

Comme la poutre est de section variable, le diagramme  $M/EI$  est obtenu en divisant, en tout point, le diagramme  $M$ , fig.2.19c, par  $EI$ .

On a, dans les tronçons extrêmes :

$$I = \frac{0,1^4}{12} = 8,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4, \text{ et}$$

$$EI = 2 \cdot 10^{11} \cdot 8,3 \cdot 10^{-6} = 16,6 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

Et dans le tronçon du milieu

$$I = \frac{0,12^4}{12} = 17,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4, \text{ et}$$

$$EI = 2 \cdot 10^{11} \cdot 17,3 \cdot 10^{-6} = 34,6 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

Le diagramme  $M/EI$  est présenté fig.2.19d.

Donc, selon le théorème II, on a

$$\delta_E = \Delta_{AE} = \frac{1}{2} (0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 0,66) + \frac{1}{2} (10^{-3} \cdot 2 \cdot 1,33) = 1,495 \cdot 10^{-3} \text{ m} \approx 1,5 \text{ mm. } (\downarrow)$$

Moment statique, par rapport à A, des aires  $AB'B''$  et  $AEE'$ .

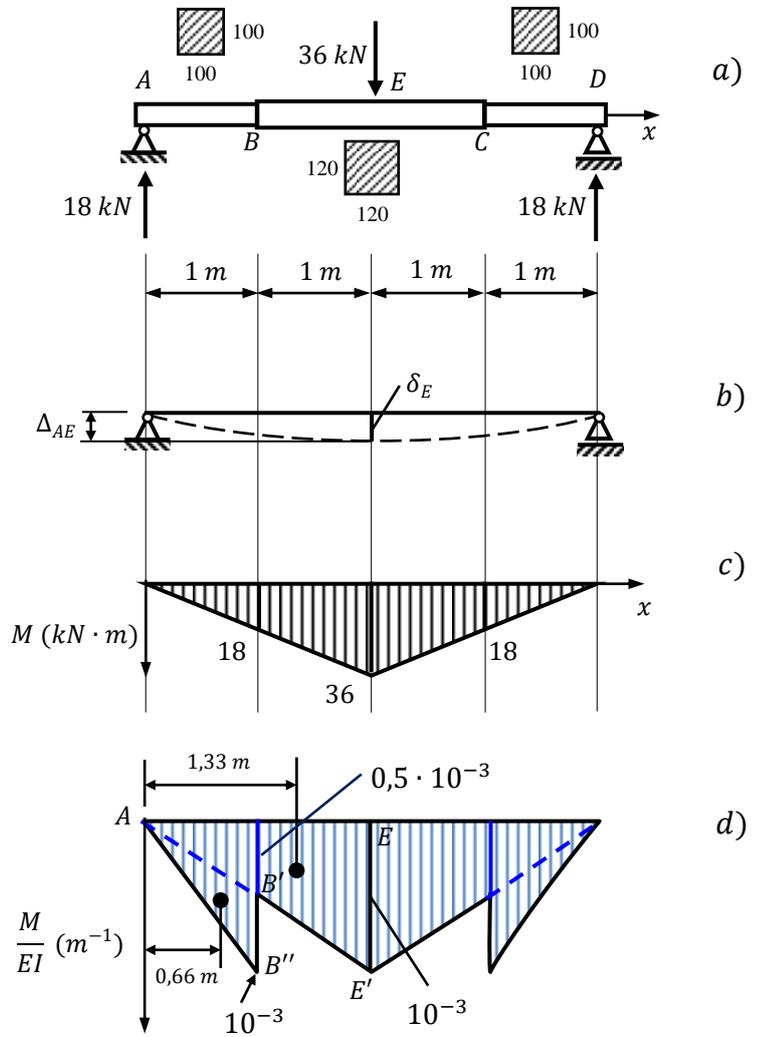


fig. 2.19

### 2.6.1 Méthode de superposition

Pour résoudre les cas complexes, on peut superposer les résultats obtenus pour les cas simples. Cela demeure toujours possible lorsque le comportement du matériau est élastique linéaire (cas de petites déformations).

#### Principe de superposition

Soit  $M(x)$  le moment fléchissant résultant d'un système de forces appliquées séparément

$$M(x) = M_1(x) + M_2(x) + \dots + M_n(x) \quad (30)$$

Le déplacement vertical des points de l'axe de la poutre s'écrit

$$EI \cdot y''(x) = M(x) \quad (31)$$

D'où l'on obtient compte tenu de l'équation (30)

$$EI \cdot y''(x) = M_1(x) + M_2(x) + \dots + M_n(x) \quad (32)$$

Le déplacement dû à chaque charge appliquée isolément est donné par

$$EI \cdot y_1''(x) = M_1(x); EI \cdot y_2''(x) = M_2(x); \dots; EI \cdot y_n''(x) = M_n(x) \quad (33)$$

En combinant (32) et (33), on a

$$EI \cdot y''(x) = EI[y_1''(x) + y_2''(x) + \dots + y_n''(x)] = EI \cdot \frac{d^2}{dx^2}(y_1 + y_2 + \dots + y_n)$$

Ainsi,

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) + \dots + y_n(x) \quad (34)$$

Avec un raisonnement pareil, on obtient par superposition l'angle de rotation

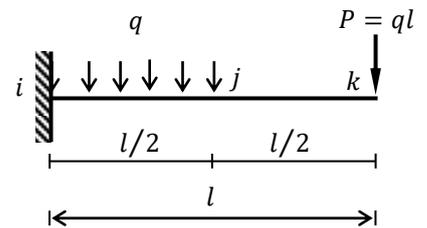
$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \dots + \varphi_n(x) \quad (35)$$

Pour appliquer aisément la méthode de superposition, on utilise des tableaux donnant des solutions types correspondant à des chargements simples (par exemple Tab.2.1). Dans le prochain chapitre, nous allons examiner les méthodes, les plus générales, de détermination des déplacements élastiques des systèmes de barres.

Ici, on se limitera à la solution des deux exercices suivant ; pour plus de détails concernant la méthode des moments d'aires, consulter [WW].

**Exercice 2.18**

Déterminer, à l'aide de la méthode de superposition, le déplacement vertical de l'extrémité droite de la console, fig.2.20 ; la rigidité de la poutre à la flexion étant constante.



**fig.2.20**

**Solution**

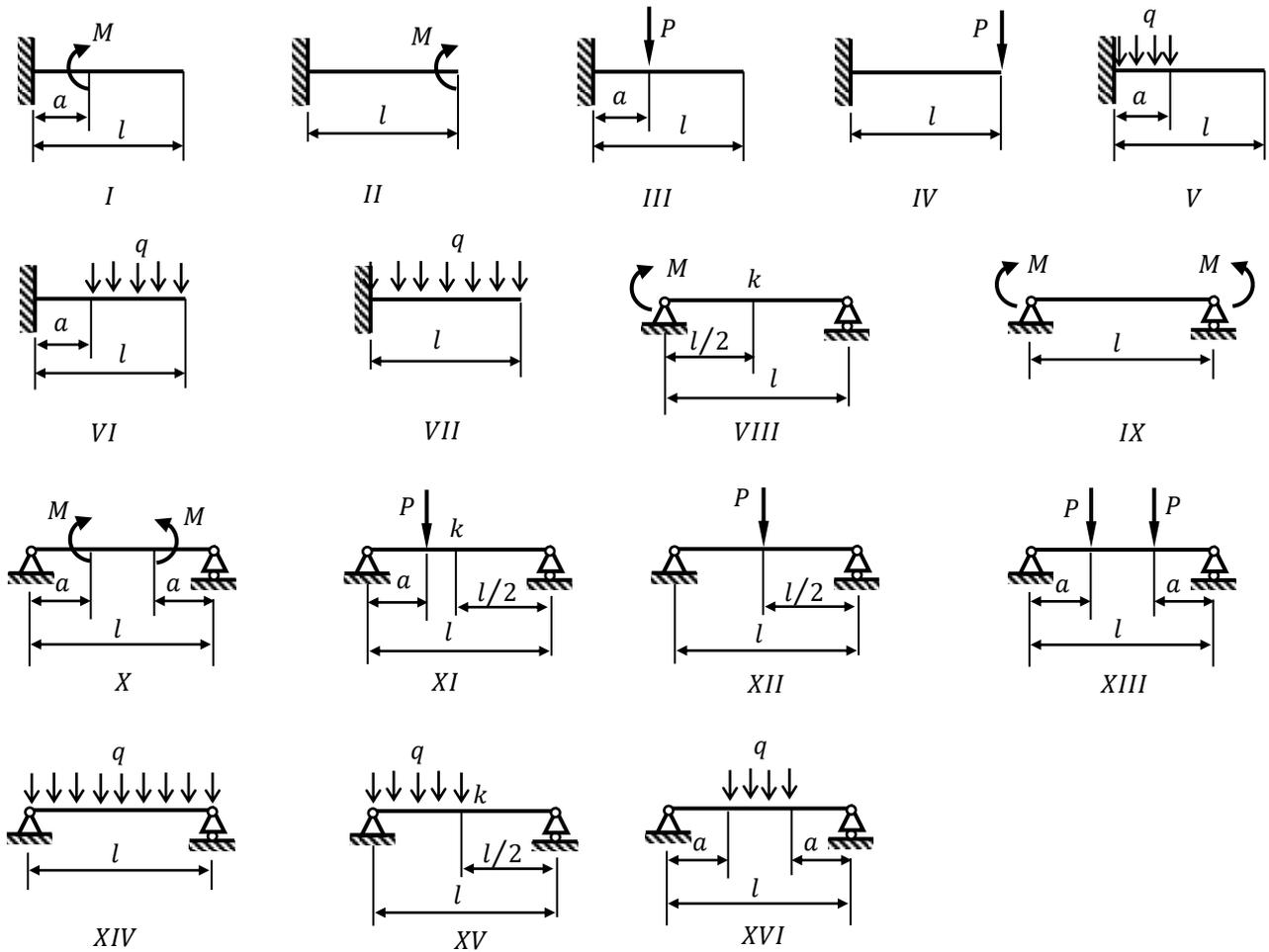
Envisageons chacune des deux charges appliquées isolément (charge répartie notée **q** et charge concentrée notée **p**). En se référant aux résultats (Tab. 2.1), on a

$$\Delta_k = (\Delta_k)_q + (\Delta_k)_p$$

avec, 
$$(\Delta_k)_q = \frac{q \left(\frac{l}{2}\right)^3}{24EI} \left(4l - \frac{l}{2}\right) = \frac{7ql^4}{384EI}; (\Delta_k)_p = \frac{ql(l)^3}{3EI} = \frac{ql^4}{3EI};$$

En superposant les résultats, on trouve

$$\Delta_k = (\Delta_k)_q + (\Delta_k)_p = \frac{7ql^4}{384EI} + \frac{ql^4}{3EI} = \frac{135 \cdot ql^4}{384 \cdot EI}.$$



Tab.2.1. Valeurs des flèches maxi pour des chargements les plus courants (les flèches sont données en valeurs absolues)

schéma	Flèche maxi de la poutre (EI-rigidité de la section)	schéma	Flèche maxi de la poutre (EI-rigidité de la section)
I	$\frac{Ma}{EI} \left( l - \frac{a}{2} \right)$	IX	$\frac{Ml^2}{8EI}$
II	$\frac{Ml^2}{2EI}$	X	$\frac{M}{2EI} \left( \frac{l^2}{4} - a^2 \right)$
III	$\frac{Pa^2}{2EI} \left( l - \frac{a}{3} \right)$	XI	$\delta_k = \frac{Pa}{48EI} (3l^2 - 4a^2); a < \frac{l}{2}$
IV	$\frac{Pl^3}{3EI}$	XII	$\frac{Pl^3}{48EI}$
V	$\frac{qa^3}{24EI} (4l - a)$	XIII	$\frac{Pa}{2EI} \left( \frac{l^2}{4} - \frac{a^2}{3} \right)$
VI	$\frac{ql^4}{24EI} \left( 3 - 4 \frac{a^3}{l^3} + \frac{a^4}{l^4} \right)$	XIV	$\frac{5ql^4}{384EI}$
VII	$\frac{ql^4}{8EI}$	XV	$\delta_k = \frac{5ql^4}{768EI}$
VIII	$\delta_k = \frac{Ml^2}{16EI}$	XVI	$\frac{q}{48EI} \left( \frac{5}{8} l^4 - 3l^2 a^2 + 2a^4 \right)$

### Exercice 2.19

Déterminer le déplacement vertical au milieu de la poutre représentée sur la figure 2.21, a ; la rigidité de la poutre étant constante.

#### Solution

En vertu du principe de superposition, l'expression de la flèche s'écrit

$$y_k = y_{kM} + y_{kq} + y_{kP_1} + y_{kP_2} \quad (a)$$

Il est évident qu'il s'agit ici de la somme algébrique des déplacements de la section k ; de plus, on considère que le déplacement de la section considérée est positif lorsqu'elle se déplace au-dessus de l'axe de la poutre.

En utilisant le tableau 2.1 et la figure (2.21, b, c, d et e), on obtient :

$$* y_{kM} = \frac{Ml^2}{8EI} = \frac{ql^2 \cdot l^2}{8EI} = \frac{ql^4}{8EI} = 125 \cdot 10^{-3} \frac{ql^4}{EI};$$

$$* y_{kq} = \frac{q}{48EI} \left( \frac{5}{8}l^4 - 3l^2a^2 + 2a^4 \right); \text{ pour } a = l/4,$$

$$y_{kq} = 9,28 \cdot 10^{-3} \frac{ql^4}{EI};$$

$$* y_{kP_1} = \frac{P_1 a}{2EI} \left( \frac{l^2}{4} - \frac{a^2}{3} \right); a = \frac{l}{4};$$

$$y_{kP_1} = 28,6 \cdot 10^{-3} \frac{ql^4}{EI};$$

$$* y_{kP_2} = \frac{P_2 l^3}{48EI} = \frac{3ql \cdot l^3}{48EI} = 62,5 \cdot 10^{-3} \frac{ql^4}{EI}.$$

En portant ces valeurs dans l'équation (a) et en tenant compte des signes, on a

$$y_k = 10^{-3} \frac{ql^4}{EI} (125 + 9,28 - 28,6 - 62,5) = 43,18 \cdot 10^{-3} \frac{ql^4}{EI}.$$

Le résultat positif signifie que la section se déplace en haut.

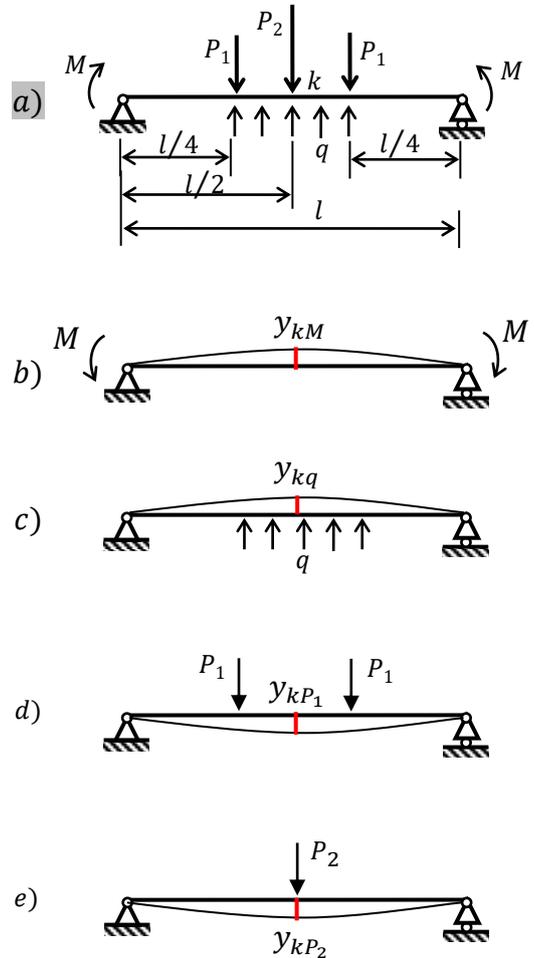


fig.2.21