Université Mohamed Khider Biskra
Département de Mathématiques
Master 1

2020/2021
Méthodes numériques
T.D

Série 2

Exercice 1.
On considère le problème modèle de l'equation de la chaleur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \forall x \in]0,1[,\ t \in]0,T[\\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \forall t \in]0,T[, \\ u(x,0) = 100x, \forall x \in]0,0.5[, u(x,0) = 100(1-x), \in [0.5,1[, \end{cases}$$

Considérons le maillage uniforme de pas en espace $\Delta x = \frac{1}{N+1}$ et en temps $\Delta t = \frac{T}{M+1}$. On note par u_i^j l'approximation de $u(x_i, t_j)$, pour $i = 0, 1, \ldots, N+1$ et $j = 0, 1, \ldots, M+1$.

1. On voudrait calculer une solution approchée de ce problème par le schéma d'Euler explicite. Pour $\Delta x = 0.25$ et $T = 0.125$, donner la plus grande valeur de Δt qui assure la convergence du schéma, puis écrire ce schéma et calculer les approximations u_i^1, pour $i = 1, \ldots N$.

2. Écrire le schéma implicite de ce problème et calculer les approximations u_i^1, pour $i = 1, \ldots N$ en prenant les mêmes données que la question précédente.

Exercice 2.

On considère le problème hyperbolique de l'équation de transport

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \forall x \in]0,1[,\ t \in]0,T[\\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad \forall t \in]0,T[, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \forall x \in]0,1[, \end{cases}$$

où la vitesse de transport $c \in \mathbb{R}$ et la condition initiale $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont données. Écrire le schéma implicite décentré amont, décentré aval, et centré de ce problème .

Série 02

on a:

Exercice 1

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \forall x \in]0,1[; t \in]0,T[\\ u(0,t) = u(1,t) = 0 ; \forall t \in]0,T[\\ u(x,0) = 100x , \forall x \in]0,0.5[\\ u(x,0) = 100(1-x) , \forall x \in]0.5,1[\end{cases}$$

et on a : $\Delta x = \frac{1}{N+1}$ et $\Delta t = \frac{T}{M+1}$

1) Calculer une solution approchée de ce problème par schéma d'Euler explicite. pour $\Delta x = 0.25$ et $T = 0.125$ donc :

$\Delta x = \frac{1}{N+1} = 0.25 \Rightarrow \boxed{N+1=4}$

et

$\Delta t = \frac{T}{M+1}$ et Δ

et

Δt la plus grande valeur pour la convergence du schéma : donc :

$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 0.5 \; / \; \Delta x = 0.25$

Alors $\Delta t = 0.5 \times (\Delta x)^2 = 0,03125$

$\Rightarrow \Delta t = \frac{\overset{0,125}{T}}{M+1} = 0,03125$

$\Rightarrow \boxed{M+1=4}$

Alors on a : $\begin{cases} N+1=4 \\ \text{et} \\ M+1=4 . \end{cases}$

on a les approximations suivantes

$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) \simeq \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta t}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) \simeq \frac{u(x_{i+1}, t_j) + u(x_{i-1}, t_j) - 2u(x_i, t_j)}{\Delta x^2}$

et $u_i^0 = 100 x_i$; $i \in$?

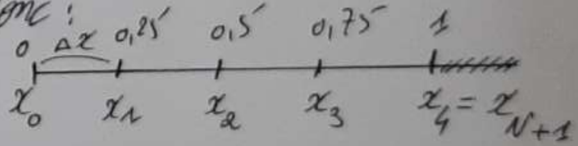
et $u_0^j = u_{N+1}^j = 0$ / $N+1=4$.

et $u_i^0 = 100(1 - x_i)$; $i \in$?

on a $\Delta x = 0.25$ et $N+1 = 4$ $\Rightarrow$

$0 = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 = x_{N+1}$.

donc :



donc pour $x \in]0, 0.5[$ on a $i = 0$ et $i = 1$.

et pour $x \in]0.5, 1[$ on a $i = 2$ et $i = 3$ et $i = 4$

* $u(x_i, t_{j+1}) \simeq u_i^{j+1}$

~~donc le schéma de D.F est:~~
on a:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_j) \simeq \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t}$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_j) \simeq \frac{u_{i+1}^j + u_{i-1}^j - 2u_i^j}{(\Delta x)^2}$$

donc le schéma de D.F est:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} - \frac{u_{i+1}^j + u_{i-1}^j - 2u_i^j}{(\Delta x)^2} = 0$$

$$\begin{cases} u_0^j = u_{N+1}^j = 0, \ \forall j = \overline{0,4}. \\ u_i^0 = 100x_i; \quad i = 0, 1. \\ u_i^0 = 100(1-x_i); \ i = 2, 3, 4. \end{cases}$$

conditions aux limites

* calculer les approximation u_i^1, pour $i = \overline{1,N}$.

par le schéma de D.F on a:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} - \frac{u_{i+1}^j + u_{i-1}^j - 2u_i^j}{(\Delta x)^2} = 0$$

$$\Rightarrow u_i^{j+1} = u_i^j - \lambda(2u_i^j - u_{i+1}^j - u_{i-1}^j)$$

$$\begin{cases} t_q \\ \lambda = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = 0{,}5 \ (\text{puisque}) \end{cases}$$

pour que le schéma converge $\Rightarrow \lambda \leq 0{,}5$ mais est la plus grande donc $\lambda = 0{,}5$ (2)

donc: $\boxed{u_i^{j+1} = \frac{u_{i-1}^j + u_{i+1}^j}{2}}$

avec les conditions aux limites

$u_i^1 \ / \ i = \overline{1,N} \ / \ N+1 = 4 \Rightarrow N = 3$

donc on calculer $u_i^1 / i = 1, 2, 3$

$u_1^1 = ? \ / \ u_2^1 = ? \ / \ u_3^1 = ?$

$$u_i^{j+1} = \frac{u_{i-1}^j + u_{i+1}^j}{2}$$

$j = 1$ et $i = 1$

$$\Rightarrow u_1^1 = \frac{u_0^0 + u_2^0}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

$u_0^0 = 0$

$u_2^0 = 100(1 - x_2) = 100(1 - 0{,}5) = 50$

$j = 1$ et $i = 2$

$$\Rightarrow u_2^1 = \frac{u_1^0 + u_3^0}{2} = \frac{25+25}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

$u_1^0 = 100x_1 = 100 \times 0{,}25 = 25$

$u_3^0 = 100(1 - x_3) = 100(1 - 0{,}75) = 25$

$j = 1$ et $i = 3$

$$\Rightarrow u_3^1 = \frac{u_2^0 + u_4^0}{2} = \frac{50 + 0}{2} = 25$$

$u_2^0 = 50$

$u_4^0 = 100(1 - x_4) = 100(1 - 1) = 0$

donc: $\begin{cases} u_1^1 = 25 \\ u_2^1 = 25 \\ u_3^1 = 25 \end{cases}$

2) calculer une solution approchée de ce problème par schéma implicite avec les mêmes données que la question précédente

donc on a :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) \simeq \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\Delta t}$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) \simeq \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{(\Delta x)^2}$$

par la question précédente ~~Nous trouvons~~ Nous trouvons les conditions aux limites suivantes :

$u_0^j = u_{N+1}^j = 0, \ \forall j = \overline{0,4}.$

$u_i^0 = 100 x_i \ ; \ i = 0, 1.$

$u_i^0 = 100(1 - x_i) \ ; \ i = 2, 3, 4.$

donc on a le schéma implicite suivant

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\Delta t} - \dfrac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} = 0 & \forall j = 1, \dots, 4. \\ u_0^j = u_{N+1}^j = 0 \ ; \ \forall j = \overline{0,4} \\ u_i^0 = 100 x_i \ , \ i = 0, 1. \\ u_i^0 = 100(1 - x_i) \ ; \ i = 2, 3, 4. \end{cases}$$

- calculer les approximation u_i^1 pour $i = \overline{1, N}$ / $\underset{N+1=4}{N=3}$

donc on calculons u_i^1 pour $i = 1, i = 2, i = 3$ par le schéma implicite

on a : $\dfrac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\Delta t} - \dfrac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} u_i^j - u_i^{j-1} - \lambda [u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j] = 0. \\ \text{tq} \\ \lambda = \dfrac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = 0{,}5 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow + u_i^j = + u_i^{j-1} + \lambda (u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j)$

$\Rightarrow u_i^j = u_i^{j-1} + \dfrac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{u_i^j = \frac{2u_i^{j-1} + u_{i+1}^j + u_{i-1}^j}{4}}$$

$i = \overline{1,3}$

$u_1^1 = ? \ / \ u_2^1 = ? \ / \ u_3^1 = ?$

$j=1$ et $i=1$

$$\Rightarrow u_1^1 = \frac{2u_1^0 + u_2^1 + u_0^1}{4}$$

$$u_1^0 = 100x_1 = 25$$

$$u_0^1 = 0$$

$$\Rightarrow u_1^1 = \frac{50 + u_2^1}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{4u_1^1 - u_2^1 = 50} \quad \cdots (1)$$

$j=1$ et $i=2$

$$\Rightarrow u_2^1 = \frac{2u_2^0 + u_3^1 + u_1^1}{4}$$

$$u_2^0 = 100(1-0{,}5) = 50$$

$$\Rightarrow u_2^1 = \frac{100 + u_3^1 + u_1^1}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{4u_2^1 - u_3^1 - u_1^1 = 100} \quad (2)$$

$j=1$ et $i=3$

$$u_3^1 = \frac{2u_3^0 + u_4^1 + u_2^1}{4}$$

$$u_3^0 = 100(1-0{,}75) = 25$$

$$u_4^1 = u_{N+1}^1 = 0$$

$$\Rightarrow u_3^1 = \frac{50 + u_2^1}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{4u_3^1 - u_2^1 = 50} \quad (3)$$

donc on a :

$$\begin{cases} 4u_1^1 - u_2^1 = 50 \\ 4u_2^1 - u_3^1 - u_1^1 = 100 \\ 4u_3^1 - u_2^1 = 50 \end{cases}$$

le reste est facile.

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1^1 = \cdots \\ u_2^1 = \cdots \\ u_3^1 = \cdots \end{cases}$$

Exercice 2

on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \; \forall x \in]0,1[, t \in]0,T[. \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \; \forall t \in]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x), \; \forall x \in]0,1[\end{cases}$$

* schémas implicits

on a $\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) \simeq \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\Delta t}$.

1/ schéma implicite décentré amont :

* $\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) = \frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{h}$

$$\Rightarrow \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\Delta t} + c\frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{h} = 0$$

$$\Rightarrow u_i^j - u_i^{j-1} + c \cdot \frac{\Delta t}{h}(u_i^j - u_{i-1}^j) = 0$$

$$\Rightarrow u_i^j = u_i^{j-1} + r(u_i^j - u_{i-1}^j)$$

$$\begin{cases} \text{tq} \\ r = c \cdot \frac{\Delta t}{h} \end{cases}$$

2/ schéma implicite décentré aval.

* $\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) \simeq \frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{h}$

$$\Rightarrow \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\Delta t} + c\frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{h} = 0$$

$$\Rightarrow u_i^j = u_i^{j-1} + r(u_{i+1}^j - u_i^j)$$

$$\begin{cases} \text{tq} \\ r = c\frac{\Delta t}{h} \end{cases}$$

3/ schéma implicite centré

* $\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) \simeq \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h}$.

$$\Rightarrow \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\Delta t} + c\frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h} = 0$$

$$\Rightarrow u_i^j = u_i^{j-1} + \frac{r}{2}(u_{i+1}^j - u_{i-1}^j).$$

$$\begin{cases} \text{tq} \\ r = c \cdot \frac{\Delta t}{h}. \end{cases}$$