

Méthode des éléments finis

1 Introduction

La méthode des éléments finis est l'une des techniques numériques les plus utilisées pour la résolution d'une EDP, elle consiste à diviser le domaine physique à traiter en plusieurs sous domaines appelés éléments finis à dimensions. La solution recherchée est remplacée dans chaque élément par une approximation avec des polynômes simples et le domaine peut ensuite être reconstitué avec l'assemblage ou sommation de tous les éléments.

2 Les étapes de la méthode

1. Réécriture de l'EDP sous forme intégral.
2. Diviser le domaine en sous domaines.
3. Approximation sur un élément par une simple fonction linéaire, polynomiale ou autre.
4. Assemblage et application des conditions aux limites.
5. Résolution du système global qui peut être linéaire ou non.

3 Formulation variationnelle

Forme forte

Un problème classique d'équations différentielles gouvernant un système physique s'énonce comme suit : Trouver une fonction $u \in V$; V espace des fonctions, telle que :

$$A(u) = 0 \mid \Omega, \quad B(u) = 0 \mid \Gamma \quad (1)$$

où $A(u)$ est l'ensemble d'équations gouvernantes définies sur le domaine Ω et $B(u)$ est l'ensemble des conditions aux limites que les fonctions u doivent vérifier sur le contour Γ .

Le problème variationnel associé au système (1) s'écrit

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que : } \forall w \in V : \int_{\Omega} w A(u) d\Omega = 0 \quad (2)$$

Si la solution de (2) est satisfaite pour toute fonction poids w , alors l'équation différentielle (1) est satisfaite en tout point du domaine Ω .

Forme faible

Pour satisfaire les conditions aux limites nous avons

$$\int_{\Gamma} w B(u) d\Gamma = 0$$

Il est possible d'intégrer (2) par partie et de la remplacer par :

$$\int_{\Omega} C(w)D(u) d\Omega + \int_{\Gamma} E(w)F(u) d\Gamma = 0$$

Les opérateurs C, D, E et F contiennent des dérivées d'ordre moins élevé.

Exemple On considère l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$A(u) = \frac{d^2u}{dx^2} + 1 - x = 0 \quad x \in [0, 1] = \Omega$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

Dans ce cas $B(u)$ est l'ensemble des valeurs imposées aux deux bords du domaine. En unidimensionnel, Γ se réduit à deux points. La formulation variationnelle forte associée à l'équation $A(u)$ s'écrit :

$$\int_{\Omega} w \left(\frac{d^2u}{dx^2} + 1 - x \right) d\Omega = 0$$

$$\int_0^1 w \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right) dx = \int_0^1 w(x - 1) dx$$

La formulation variationnelle faible s'écrit

$$- \int_0^1 \left(\frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} \right) dx + w \frac{du}{dx} \Big|_0^1 = \int_0^1 w(x - 1) dx$$

4 Discrétisation et approximation sur l'élément

La méthode des éléments finis est une méthode d'approximation par sous domaines appelés éléments, Chaque élément est défini par un nombre de nœuds bien déterminé.

Après la discrétisation du domaine par des éléments , on peut remplacer la fonction exacte par une approximative. On utilise souvent des polynômes.

Dans le cas unidimensionnel, la fonction approchée est donnée par l'interpolation polynomiale :

$$u = \sum_{i=1}^n a_i x^i$$

5 La méthode des éléments finis en dimension un

Nous considérons le problème modèle suivant :

$$\begin{cases} -u'' = f(x), \forall x \in]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

On se donne un ensemble de points et $x_i, i = 0, 1, \dots, N + 1$ de $]0, 1[$ tels que .

$$0 = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{N+1} = 1$$

On considère un pas constant

$$x_i = ih, \quad \forall i = 0, \dots, N + 1 \quad \text{avec } h = \frac{1}{N + 1}$$

Les points x_i sont aussi appelés les sommets (ou nœuds) du maillage.

On notera par \mathbb{P}_k l'ensemble des polynômes à coefficients réels d'une variable réelle de degré inférieur ou égal à k

$$\mathbb{P}_k = \left\{ \sum_{i=0}^k a_i x^i, a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Élément fini \mathbb{P}_1

On considère l'espace vectoriel

$$V_h = \{v \in C^0([0, 1]), v_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq j \leq n, v(0) = v(1) = 0\}$$

La méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 est une méthode d'approximation variationnelle interne appliquée à l'espace V_h .

On peut représenter les fonctions de V_h , affines par morceaux, à l'aide d'une fonctions de base très simple. Introduisons la "fonction chapeau" φ_j définie par :

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, & \text{si } x \in [x_{j-1}, x_j], \\ \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j}, & \text{si } x \in [x_j, x_{j+1}], \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous avons le résultat suivant

Lemme.

1. L'espace V_h est un sous-espace de $H^1([0, 1])$ de dimension $n + 2$, et toute fonction

$v_h \in V_h$ est définie de manière unique par ses valeurs aux sommets x_j , $j = 0, \dots, N+1$:

$$v_h = \sum_{j=0}^{N+1} v_h(x_j) \varphi_j(x), \quad \forall x \in [0, 1]$$

2. Les (φ_j) , $0 \leq j \leq N+1$ constituent une base de V_h

Revenons à la résolution numérique de notre problème (1) par la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 . La formulation variationnelle de l'approximation interne s'écrit

$$\begin{cases} \text{trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ \int_0^1 u_h'(x) v_h'(x) dx = \int_0^1 f(x) v_h(x) dx \quad \forall v_h \in V_h \end{cases}$$

On décompose u_h sur la base des $\varphi_j(x)$, $j = 1, \dots, N$ et on prend $v_h = \varphi_i$, ce qui donne :

$$\sum_{j=1}^N u_h(x_j) \int_0^1 \varphi_j'(x) \varphi_i'(x) dx = \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx$$

En notant

$$U = (u_h(x_j))_{1 \leq j \leq N}$$

$$b = \left(\int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx \right)_{1 \leq i \leq N}$$

et la matrice de rigidité :

$$A = \left(\int_0^1 \varphi_j'(x) \varphi_i'(x) dx \right)_{1 \leq i, j \leq N}$$

la formulation variationnelle dans V_h revient à résoudre dans \mathbb{R}^n le système linéaire suivant :

$$AU = b$$

La plupart des coefficients de A sont nuls. Les coefficients non nuls se calculent facilement :

$$A_{i,i-1} = a(\varphi_{i-1}, \varphi_i) = \int_0^1 \varphi_i'(x) \varphi_{i-1}'(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(-1)}{h} \frac{1}{h} dx = -\frac{1}{h}$$

$$A_{i,i} = a(\varphi_i, \varphi_i) = \int_0^1 \varphi_i'(x)^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h^2} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{(-h)^2} dx = \frac{2}{h}$$

$$A_{i,i+1} = a(\varphi_{i+1}, \varphi_i) = \int_0^1 \varphi_{i+1}'(x) \varphi_i'(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h} \frac{(-1)}{h} dx = -\frac{1}{h}$$

Finalement

$$A = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 \dots & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 \dots & 0 & \dots & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Pour obtenir le vecteur b , il faut calculer l'intégrale :

$$b = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \varphi_i(x) dx \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq N$$

En pratique, on a recours à des formules d'intégration numérique (formule du point milieu, formule des trapèzes, formule de Simpson)

$$\text{(formule des trapèzes : } \int_{x_i}^{x_{i+1}} h(x) dx = \frac{x_{i+1} - x_i}{2} (h(x_{i+1}) + h(x_i)))$$

Par la formule du trapèze, on trouve :

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \varphi_i(x) dx = \frac{x_i - x_{i-1}}{2} (f(x_i) \varphi_i(x_i) + f(x_{i-1}) \varphi_{i-1}(x_{i-1})) = \frac{h}{2} f(x_i)$$

De la même manière on trouve

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \varphi_i(x) dx = \frac{x_{i+1} - x_i}{2} (f(x_{i+1}) \varphi_i(x_{i+1}) + f(x_i) \varphi_i(x_i)) = \frac{h}{2} f(x_i)$$

D'où

$$b = h(f(x_i))_{1 \leq i \leq N}$$