الفصل الرابع

السلاســـل العددية

1.4 تعاريف وتقارب السلسلة العددية

تعريف 1.1.4 : لتكن (u_n) سلسلة عددية حقيقية ولنحدد المتتالية (S_n) بواسطة:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

1) إذا كانت المتتالية (S_n) تقبل نهاية عندما $n \to +\infty$ حيث

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

ونقول أن السلسلة $\sum u_n$ متقاربة. ونكتب

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n\geq 0} u_n = \sum u_n.$$

في هذه الحالة دراسة السلسلة يؤول إلى دراسة المتتالية (S_n) $n \geq 0$.

2) إذا كانت (S_n) لا تقبل نهاية ثابتة أو لها نهاية غير منتهية نقول أن السلسلة $\sum u_n$ متباعدة.

3) المتتالية العددية

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

يسمى المجموع الجزئي من الرتبة n للسلسلة $\sum u_n$.

4) نسمي u_n بالحد العام للسلسلة $\sum u_n$.

مثال 1 : لتكن

$$U_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)},$$

ومنه نبحث عن القيمتين A و B حيث يكون لدينا:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{A}{(2k-1)} + \frac{B}{(2k+1)} \right)$$

نجد $A = \frac{1}{2}$ و $B = -\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(2k-1)} - \frac{1}{(2k+1)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2n-1)} - \frac{1}{(2n+1)} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{(2n+1)} \right]. \end{aligned}$$

ومنه فإن

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{(2n+1)} \right) = \frac{1}{2} = S$$

السلسلة U_n متقاربة.

مثال 2 : السلسلة

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots$$

متقاربة نحو 1. في الواقع ، يمكن كتابته كمجموع متداخل ، وبشكل أدق المجموع الجزئي:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = 1 - \frac{1}{n+2} \to 1 \quad \text{لما} \quad n \to +\infty$$

من خلال تغيير الفهرس أو المؤشر ، لدينا أيضا السلسلة $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ و $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)}$ متقاربة ولها نفس المجموع 1.

مثال 3 : لكن السلسلة

$$U_n = \sum_{n\geq 0} (-1)^n$$

لدينا

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$$

أي:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=1}^{1} (-1)^k = 1-1=0 \\ S_2 &= \sum_{k=1}^{2} (-1)^k = 1-1+1=1 \\ S_3 &= \sum_{k=1}^{3} (-1)^k = 1-1+1-1=0 \end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned} n \ \text{زوجي} &\iff S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = 1 \\ n \ \text{فردي} &\iff S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = 0. \end{aligned}$$

أي أن النهاية غير موجودة ما يعني أن السلسلة متباعدة

1.1.4. السلسلة الهندسية

تعريف 2.1.4 : السلسلة الهندسية هي سلسلة من الشكل $\sum a\cdot q^n$ حيث $a, q \in \mathbb{R}$.

1) مجموع متتالية هندسية

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n = \begin{cases} a\left(\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\right), & \text{إذا كان} \quad q \neq 1, \\ (n+1)\,a & \text{إذا كان} \quad q = 1. \end{cases}$$

2) السلسلة متقاربة إذا وفقط إذا كان $|q| < 1$ ولدينا

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q}$$

لما يكون : $|q| \geq 1$ فإن

$$\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$$

عندها السلسلة تكون متباعدة

2.1.4. سلسلة ذات الحد الموجب

تعريف 3.1.4 : نقول أن $\sum u_n$ سلسلة ذات حد موجب **إذا كان** $u_n \geq 0$ **من أجل كل** $n \in \mathbb{N}$.

مثال 4 : $\sum \frac{1}{n^2}$ ، $\sum \frac{1}{3^n}$ ، $\sum \left|\sin \frac{1}{n}\right|$

سلسلة ريمان

تعريف 4.1.4 : نقول أن $\sum u_n$ هي سلسلة ريمان إذا كانت من الشكل $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$.

اقتراح 1 : تكون سلسلة ريمان $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ متقاربة إذا وفقط إذا كان $\alpha > 1$.

مثال 5 : سلاسل ريمان التالية متقاربة

$$\sum \left(\frac{1}{n}\right)^2, \qquad \sum \frac{1}{n}^3.$$

و السلاسل التالية متباعدة

$$\sum \frac{1}{n}, \qquad \sum n^3, \qquad \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$$

3.1.4. رتابة المجموع الجزئي لسلسلة

لتكن (S_n) ممتالية المجموع الجزئي للسلسلة $\sum u_k$.
إذا كانت السلسلة ذات حدود موجبة أي: $u_n \geqslant 0$ من أجل كل n :

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} u_k = S_n + u_{n+1} \geqslant S_n$$

فإن المتتالية (S_n) متزايدة.

اقتراح 2 : إذا كان (S_n) متتالية محدودة، فإن $\sum u_n$ سلسلة متقاربة.

معايير المقارنة

نظرية 1.1.4 : لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين موجبتين، إذا كان لدينا إبتداءا من درجة معينة $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ فإنه:
إذا كانت $\sum v_n$ مقاربة فإن $\sum u_n$ متقاربة أيضا.
إذا كانت $\sum u_n$ متباعدة فإن $\sum v_n$ متباعدة أيضا.

مثال 6 : نقوم بمقارنة السلاسل التالية بسلسلة ريمان لكي نحدد التقارب أو التباعد.

1) السلسلة $\sum \frac{|\cos(n)^n|}{n^2}$ متقاربة لأن:

$$\sum \frac{|\cos(n)^n|}{n^2} \leq \sum \frac{1}{n^2} \rightarrow \frac{1}{6}\pi^2$$

2) السلسلة $\sum \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ متقاربة لأن:

$$\sum \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \leq \sum \left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \pi \sum \frac{1}{2^n} = \pi \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 2\pi$$

مثال 7 : لقد رأينا سابقا في المثال 2: أن السلسلة

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \quad .$$

متقاربة. وسوف نستنتج ذلك

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \quad .$$

متقاربة، في الواقع لدينا:

$$\lim_{k\rightarrow+\infty} \frac{\frac{1}{2k^2}}{\frac{1}{(k+1)(k+2)}} = \frac{1}{2}.$$

على وجه الخصوص ، يوجد k_0 حيث من أجل $k \geq k_0$:

$$\frac{1}{2k^2} \leq \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

هذا صحيح من أجل $k \geq 4$ ، لكن لا داعي لحساب قيمة دقيقة لـ k_0. نستنتج أن سلسلة الحد العام $\frac{1}{2k^2}$ تتقارب ، ومنه نجد النتيجة بإستعمال الخطية.

المتتاليات المتكافئة

تعريف 5.1.4 : لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين حقيقيتين حيث v_n غير معدومة، فإنه إبتداءا من درجة معينة نقول أن (u_n) و (v_n) أنهما متكافئان إذا كان:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=1.$$

ومنه نكتب

$$u_n \underset{\infty}{\sim} v_n\,.$$

نظرية 2.1.4 : إذا كانت (u_n) و (v_n) موجبتين ومتكافئتين فإن السلاسل $\sum u_n$ و $\sum v_n$ من نفس الطبيعة.

مثال 8 : لتكن السلسلتين المتكافئتين

$$\frac{1}{n(n+1)} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

. نعلم أن $\sum \frac{1}{n^2}$ سلسلة ريمان وهي سلسلة متقاربة ومنه $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ و $\sum \frac{1}{n^2}$ من نفس الطبيعة.

تمرين 1 : هل السلاسل التالية متقاربة؟

$$\sum \frac{1}{n^2+1}, \qquad \sum \frac{n}{\sqrt{n^3+1}}, \qquad \sum \frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}.$$

قاعدة Cauchy

توجد سلسلة $\sum_{k\geq 0} u_k$ **حيث** $\lim_{k\to+\infty} u_k = 0$ **لكن** $\sum_{k\geq 0} u_k$ **متباعدة. مثال كلاسيكي على السلسلة المتناسقة** Harmonique **المتباعدة**

$$\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

بتعبير أدق ، لدينا: $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. **ومع ذلك لدينا** $u_k = \frac{1}{k} \to 0$ **(حيث** $k\to+\infty$**).**
لإثبات أن السلسلة متباعدة، يجب إستخدام معيار كوشي.

للتذكير، المتتالية (s_n) من الأعداد الحقيقية (أو المركبة) تتقارب إذا وفقط إذا كانت من سلسلة كوشي ، وهذا يعني:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall m, n \geq n_0 : \qquad |s_n - s_m| < \epsilon$$

بالنسبة للسلاسل ، هذا يعطينا:

نظرية 3.1.4 : السلسلة $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ متقاربة إذا وفقط إذا

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall m, n \geq n_0 : \qquad \left| u_n + \cdots + u_m \right| < \epsilon \, .$$

يمكن صياغته أيضاً على النحو التالي:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall m, n \geq n_0 : \qquad \left| \sum_{k=n}^{m} u_k \right| < \epsilon$$

أو أيضا

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0 : \quad \forall p \in \mathbb{N} \qquad \left| u_n + \cdots + u_{n+p} \right| < \epsilon$$

قاعدة Alembert

اقتراح 3 : إذا كان

$$u_n \geqslant 0 \;\; \text{و} \quad \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = l,$$

فإنه توجد ثلاث حالات ممكنة التي هي:

1) **إذا كان** $l < 1$ ومنه السلسلة $\sum u_n$ متقاربة.

2) **إذا كان** $l > 1$ ومنه السلسلة $\sum u_n$ متباعدة.

3) **إذا كان** $l = 1$ فلا نستطيع اتخاذ أي قرار فيما يخص التقارب أو التباعد.

تمرين 2 : هل السلاسل التالية متقاربة؟

$$\sum \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \sum \frac{x}{n!} \text{ حيث } x \text{ عدد حقيقي موجب } ,$$

$$\sum \frac{\left(\frac{1}{2^n}\right)}{n}, \qquad \sum \frac{n^2}{(2n)!}, \qquad \sum \frac{2^n}{n!}.$$

4.1.4. قاعدة السلاسل المتناوبة

تعريف 6.1.4 : نقول أن السلسلة $\sum u_n$ متناوبة إذا كان إبتداءا من درجة معينة u_{n+1} و u_n من إشارتين مختلفتين.

مثال 9 :

$$
\begin{aligned}
&1) \quad \sum(-1)^n,\\
&2) \quad \sum(-1)^n\frac{n}{1+n},\\
&3) \quad \sum(-1)^{n+1}|sin(nx)|, \quad x\in\mathbb{R}\\
&4) \quad \sum\sin\left(n\pi+x\right), \qquad x\in\mathbb{R}
\end{aligned}
$$

ملاحظة 1 : ليس من الفوري دائما أن نرى أن هناك سلسلة متناوبة مثلا:

$$u_n=\sin\left(\pi\frac{n^2+1}{n}\right).$$

اقتراح 4 : لتكن $\sum u_n$ سلسلة متناوبة. إذا كان $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$ و $(|u_n|)$ متناقصة $\sum u_n$ فإنها متقاربة . و لدينا $|S-S_n|\leq|u_n|$ (ليس لدينا المجموع أو أي تقريب له).

مثال 10 : هل السلاسل $\sum(-1)^n\frac{n^2}{1+n}$ و $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ متقاربة؟

5.1.4. التقارب المطلق

تعريف 7.1.4 : نقول أن السلسلة $\sum u_n$ متقاربة مطلقا إذا كانت $\sum|u_n|$ سلسلة متقاربة.

السلسلة $\sum|u_n|$ هي سلسلة ذات حدود موجبة ويمكن تطبيق القواعد السابقة الخاصة بالسلاسل الموجبة عليها.

نظرية 4.1.4 : كل سلسلة متقاربة مطلقا فهي سلسلة متقاربة.

مثال 11 : .

1) السلسلة

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\pi)}{n^2}$$

متقاربة مطلقا فهي متقاربة

2) السلسلة

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n}$$

ليست متقاربة مطلقا فهي متباعدة.

2.4 سلاســل الدوال

1.2.4. التقارب البسيط و التقارب المنتظم

تعريف 1.2.4 : لتكن A مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$، ولتكن (f_n) سلسلة من الدوال المعرفة من A في $\mathbb{R}$ و $f : A \to \mathbb{R}$. نقول أن (f_n) يتقارب ببساطة إلى f على A إذا كان:

$$\forall \epsilon > 0,\ \forall x \in A,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \text{حيث}\ \ \forall n \geq n_0,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon.$$

تعريف 2.2.4 : نقول أن (f_n) يتقارب بإنتظام إلى f على A إذا كان:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \text{حيث}\ \ \forall x \in A,\ \forall n \geq n_0,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon.$$

ملاحظة 1 : التقارب البسيط $(f_n(x))$ نحو $f(x)$ يعني أنه من أجل كل $x \in A$. و يفرض التقارب المنتظم أيضًا أن يحدث التقارب دائما بنفس السرعة. إذا كانت جميع الدالات f_n و f محدودة ، فإن (f_n) يتقارب بشكل منتظم نحو f على A إذا وفقط إذا كان $(\|f_n - f\|_{A,\infty})$ تنتهي إلى 0 ، حيث

$$\|g\|_{\infty,A} = \sup\{|g(x)|;\ x \in A\}.$$

خصائص

ليكن I مجال من $\mathbb{R}$، (f_n) متتالية دوال I في $\mathbb{R}$ و $f : I \to \mathbb{R}$.

نظرية 1.2.4 : نفرض أن كل الدوال f_n مستمرة عند $a \in I$ و (f_n) تتقارب نظاميا نحو f على I. فإن f مستمرة عند a.

على وجه الخصوص ، إذا كانت جميع الدوال f_n مستمرة على I فإن f مستمر على I.

اقتراح 1 : نفرض أن جميع الدوال f_n من الفئة $\mathscr{C}^1$ و يوجد $g : I \to \mathbb{R}$ يحقق (f_n) يتقارب ببساطة نحو f على I.
متتالية الدوال (f'_n) تتقارب نظاميا نحو g على جميع القطع المستقيمة من I. فإن الدالة f من الفئة $\mathcal{C}^1$ و $f' = g$.

اقتراح 2 : نفرض أن جميع الدوال f_n من الفئة $\mathscr{C}^1$ وأن يوجد دوال $g_j : I \to \mathbb{R}$ حيث من أجل كل $j = 0, \ldots, k-1$ الدالة $(f_n^{(j)})$ تتقارب ببساطة إلى g_j على I و $(f_n^{(k)})$ تتقارب نظاميا نحو g_k على جميع القطع المستقيمة الموجودة في I.فإن g_0 من الفئة $\mathcal{C}^k$ على I و من أجل كل $j \leq k$، $g_0^{(j)} = g_j$.

اقتراح 3 : ليكن $I = [a, b]$، نفرض أن كل الدوال f_n مستمرة و أن (f_n) متقاربة نظاميا نحو f على I.
فإن :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim_n f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

نظرية 2.2.4 : ليكن $I = [a, b[$ نفرض أن الدوال (f_n) متقاربة نظاميا نحو f على I. نفرض كذلك أن كل دالة f_n تقبل نهاية ℓ_n عند b.
فإن المتتالية (ℓ_n) تتقارب نحو النهاية ℓ، f تقبل نهاية عند b و $\lim_{x\to b} f(x) = \ell$.

غالباً ما يتم تطبيق هذه النظرية مع $b = +\infty$.

3.4 سلاسـل فورييه

تعريف 1.3.4 : سلسلة فورييه هي سلسلة حدها العام من الشكل:

$$u_n = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

حيث a_n, b_n, ωو t أعداد حقيقية، لذلك فهي عبارة عن سلسلة يمكن كتابتها بالشكل:

$$a_0 + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = a_0 + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + \ldots$$

المعاملات a_n و b_n تسمى معاملات فورييه.

مثال 1 :

$$\begin{aligned}
3+\sum_{n\geq 1}(-1)^n\cos(2\pi nt)+18\sin(2\pi nt)\ ,\ a_0 &= 3\ ,\ a_n=(-1)^n\ ,\ b_n=18\ ,\ \omega=2\pi\\
\frac{\pi}{2}+\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}\sin(nt)\ ,\ a_0 &= \frac{\pi}{2}\ ,\ a_n=0\ ,\ b_n=\frac{(-1)^n}{n}\ ,\ \omega=1\\
\sum_{n\geq 1}\frac{(5)^n+3}{n+6}\cos(3nt)\ ,\ a_0 &= 0\ ,\ a_n=\frac{(5)^n+3}{n+6}\ ,\ b_n=0\ ,\ \omega=3
\end{aligned}$$

تعريف 2.3.4 : إذا تقاربت هذه السلسلة لأي t حقيقي ، فإننا نحدد الدالة S بمايلي:

$$S(t)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos(n\omega t)+b\sin(n\omega t)$$

نقول إن سلسلة فورييه تتقارب مع الدالة S.

ملاحظة 1 : تتقارب السلسلة إلى دالة وليست إلى عدد.

1.3.4. تحليل دالة الى سلسلة مثلثية

نظرية 1.3.4 : لنفترض أن f دالة مستمرة على مستويات دورية دورها T.
إذا تمت كتابة f كمجموع لسلسلة فورييه $a_0+\sum_{n\geq 1}a_n\cos(n\omega t)+b\sin(n\omega t)$ فإن:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}f(t)dt\qquad\forall\alpha\in\mathbb{R}$$

$$\forall n>0,\ a_n=\frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}f(t)\cos(n\omega t)dt\qquad\forall\alpha\in\mathbb{R}$$

$$\forall n>0,\ b_n=\frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}f(t)\sin(n\omega t)dt\qquad\forall\alpha\in\mathbb{R}$$

تعريف 3.3.4 : نقول أن الدالة الدورية f تفي بشروط *Dirichlet* (نقول أيضا أن f ينتمي إلى C^1 متعدد المستويات ، وهو ما يرمز له بالرمز CM^1) إذا كان:

1) باستثناء عدد محدد من النقاط المعينة خلال دور ما ، f دالة مستمرة ، قابل للإشتقاق ومشتقها f' مستمر.

2) في هذه النقاط المعينة ، يقبل f و f' نهاية محدودة يسارًا و يمينًا.

نظرية 2.3.4 : إذا كانت f دالة دورية تلبي شروط *Dirichlet* ، إذن

1) إذا كان f مستمرًا في t ، فإن سلسلة فورييه المرتبطة بـ f تتقارب نحو $f(t)$

2) إذا لم يكن f مستمرًا في t ، فإن سلسلة فورييه المرتبطة بـ f تتقارب نحو $\frac{1}{2}[f(t^+) + f(t^-)]$

2.3.4. حساب معاملات فورييه

اقتراح 1 : 1) إذا كانت f دالة زوجية

$$\begin{aligned} \forall n \ \text{حيث} \ , b_n &= 0 \\ a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)dt \\ \text{من أجل} \ \ n>0 \ \text{حيث} \ , a_n &= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)dt \end{aligned}$$

2) إذا كانت f دالة فردية

$$\begin{aligned} \forall n, \ a_n &= 0 \\ \text{من أجل} \ \ n>0 \ \text{حيث} \ , b_n &= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega t)dt \end{aligned}$$

3.3.4. التحليل الطيفي

بالنسبة للدالة f الدورية ذات الدور T للتحقق من شروط Dirichlet ، لدينا بالتالي سلسلة فورييه ، مع النبض $\omega = \frac{2\pi}{T}$:

$$a_0 + \sum_{n\geqslant 1} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

الذي يمكن كتابته أيضا:

$$a_0 + \sum_{n\geqslant 1} A_n \sin(n\omega t - \varphi_n)$$

مع العوامل $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

تعريف 4.3.4 : طيف *Le spectre* الدالة f هو متتالية المعاملات (A_n).

4.3.4. علاقة Parseval

نظرية 3.3.4 : لنفترض أن f دالة دورية مستمرة على مستويات، ومنه لدينا

$$\frac{1}{T}\int_0^T [f(t)]^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

ملاحظة 2 : ليس من الضروري أن يحقق f شروط *Dirichlet*

5.3.4. شكل التخيلي لسلسلة فوربيه

خـــواص

1) يمكن كتابة سلسلة فورييه المرتبطة بالدالة f كما يلي:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$$

حيث

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)e^{-in\omega t}dt$$

2) العلاقات بين المعاملات الحقيقية a_n و b_n والمعاملات المركبة c_n هي:

$$c_0 = a_0, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}.$$

3) تكتب صيغة بارسوفال على الشكل:

$$\frac{1}{T}\int_0^T [f(t)]^2 dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2.$$

سلسلة التمارين رقم 5

تمرين 1 : حدد سلسلة فوريه (بعبارة $sinus$ و $cosinus$ للدوال التالية:

1) الدالة f الدورية ذات الدور $2\pi-$ المعرفة كما يلي :

$$f(x) = x \quad \text{إذا كان} \quad -\pi \leq x < \pi.$$

2) الدالة : f الدورية ذات الدور 2π ، المعرّفة:

$$f(x) = 1 \quad \text{إذا كان} \quad x \in [0, \pi[\quad \text{و} \quad f(x) = -1 \quad \text{إذا كان} \quad x \in [-\pi, 0[.$$

3) الدالة الدورية ذات الدور$0 < L$ المعرفة كما يلي :

$$f(x) = |x| \quad \text{إذا كان} \quad x \in [-L/2, L/2].$$

تمرين 2 : حدد سلسلة فوريه للدالة الدورية ذات الدور 2π المعرفة

$$f(x) = x^2, \quad \text{من أجل} \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

إستنتج مجموع هذه السلاسل:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$$

.

تمرين 3 : لتكن f الدالة الدورية ذات الدور 2π المعرفة كما يلي:

من أجل كل $x \in [0, 2\pi[$: $f(x) = x^2$.

1) أوجد سلسلة فورييه للدالة f.

2) أحسب المجموع $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ ثم $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4}$.

تمرين 4 : أوجد سلسلة فوريه للدالة الدورية ذات الدور 2π المعرفة بمايلي:

$$\forall x \in [-\pi, \pi] : \quad f(x) = |x|$$

. إستنتج قيمة المجاميع التالية:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad \text{و} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

تمرين 5 : لتكن f الدالة الدورية ذات الدور 2π $f(x) = e^x$ إذا كان $x \in [-\pi, \pi[$.
أوجد سلسلة فوريه للدالة f. إستنتج قيمة المجاميع التالية:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+1} \qquad \text{و} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2+1}.$$