Simplification algébrique des fonctions :

→ La simplification vise à réduire le nombre de portes utilisées ⇒ réduire le coût et la complexité d'un logigramme.

→ On va se servir des théorèmes de l'algèbre de Boole (voir Annexes) pour les fonctions F_1, F_2 et F_3 (refaire la même chose pour le reste)

Exercice 1

1/ $F_1 = BC + AC + AB + B = B(\underbrace{1 + A + C}_{1 \text{ (Element Absorbant)}}) + AC$

$= B + AC$

ou bien.

$F_1 = BC + AC + AB + B =$

$B + BC + AB = B$ (Théorème d'absorption)

donc : $F_1 = AC + B$.

2/ $F_2 = (A + \overline{B}) \cdot (A\overline{B} + C) \cdot C =$

$= C$ (par absorption)

d'où $F_2 = (A + \overline{B})C = AC + C\overline{B}$

3/ $F_3 = \bar{A}B\bar{C} + AB\bar{C} + ABC + \bar{A}BC$

$= B(\bar{A}\bar{C} + A\bar{C} + AC + \bar{A}C) = B(\bar{A}(\underbrace{\bar{C}+C}_{1}) + A(\underbrace{\bar{C}+C}_{1}))$ (Complementation)

$= B(\underbrace{\bar{A}+A}_{1})$ 1 (complémentation)

d'où $F_3 = B$.

Exercice 2

1/ Calcul de l'expression de $\bar{F}$:

Il convient de simplifier F à priori, et l'écrire sous la forme de produits de sommes. ($P\Sigma$)

$F = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{d} + \bar{b}\bar{d} = \bar{a}(\bar{c}+\bar{d}) + \bar{b}(\bar{c}+\bar{d})$

$= (\bar{a}+\bar{b})(\bar{c}+\bar{d})$

donc : $\bar{F} = \overline{(\bar{a}+\bar{b})(\bar{c}+\bar{d})}$

et en appliquant le théorème de De Morgan, on obtient :

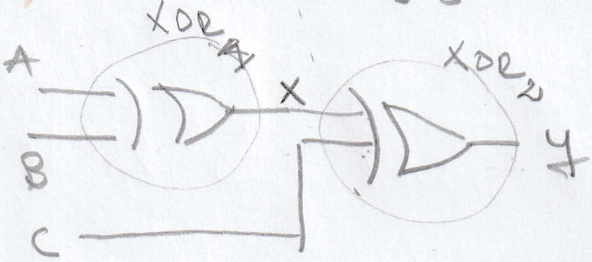
$\bar{F} = \overline{(\bar{a}+\bar{b})} + \overline{(\bar{c}+\bar{d})} = (\bar{\bar{a}} \cdot \bar{\bar{b}}) + (\bar{\bar{c}} \cdot \bar{\bar{d}})$

$= a.b + c.d$

2/ Dresser la table de vérité d'une fonction à partir d'un logigramme revient à le dissocier en parties élémentaires, donc

Variables intermédiaires jusqu'à l'arrivée en sortie principale que l'on veut donner l'état ⇒ table de vérité.

Soit le logigramme suivant :



y (la sortie principale étant y)

→ C'est l'association de deux (02) portes XOR, soit X la sortie de la porte XOR dont A et B sont les entrées : Donc le problème revient à dresser une table de vérité de 3 entrées (A, B et C) donc $2^n = 2^3$ combinaisons, remplir la sortie X pour les entrées A et B puis remplir la sortie y pour les entrées X et C..

→ N'oubliez pas que vous devez connaître par coeur les tables de vérité des portes usuelles (AND, OR, NAND, NOR, XOR, XNOR --etc) ce qui vous facilite la tache d'avantage.

→ **par exemple** :

la porte XNOR vérifie si les entrées sont égales
la porte XOR = $\overline{XNOR}$ vérifie si les entrées sont différentes.

$\Rightarrow \begin{cases} XOR_1 = 1 \longrightarrow \text{pour } A \neq B. \\ XOR_2 = 1 \longrightarrow \text{pour } y \neq c. \end{cases}$

d'où la table de vérité du logigramme donné :

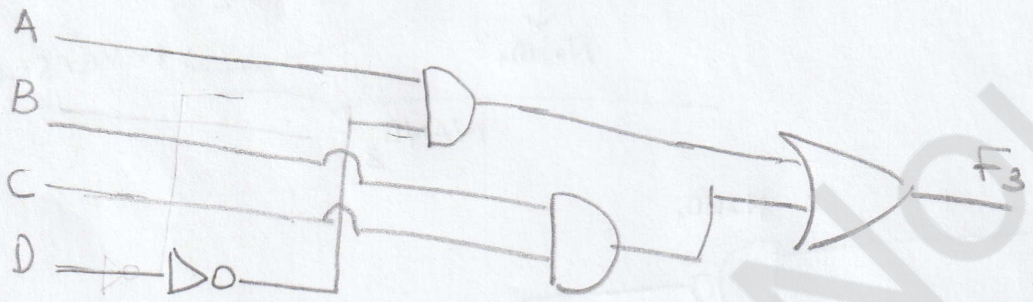
A	B	C	X	y
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	1	0	1

Exercice 3 :

1) schémas logiques (ou circuits logiques) ou encore Logigramme en utilisant différentes portes.

1° portes Et, OU et inverseurs.

considérant $F_3 = A\bar{D} + BC$.



2°/ portes Non Et (NAND) et inverseurs.

→ La même fonction peut avoir plusieurs formes équivalentes. L'intérêt de l'utilisation des portes NAND c'est qu'elles coûtent moins cher,

→ Dans ce cas, on doit démarrer d'une forme disjonctive ⇒ forme sommes de produits

⇒ portes NAND $\equiv \sum P$

→ Nous avons déjà $F_3 = A\cdot\bar{D} + B\cdot C$ sous la forme $\sum P$.

$\sum \quad P$

→ appliquer $F_3 = \overline{\overline{F_3}}$ (propriété d'involution)

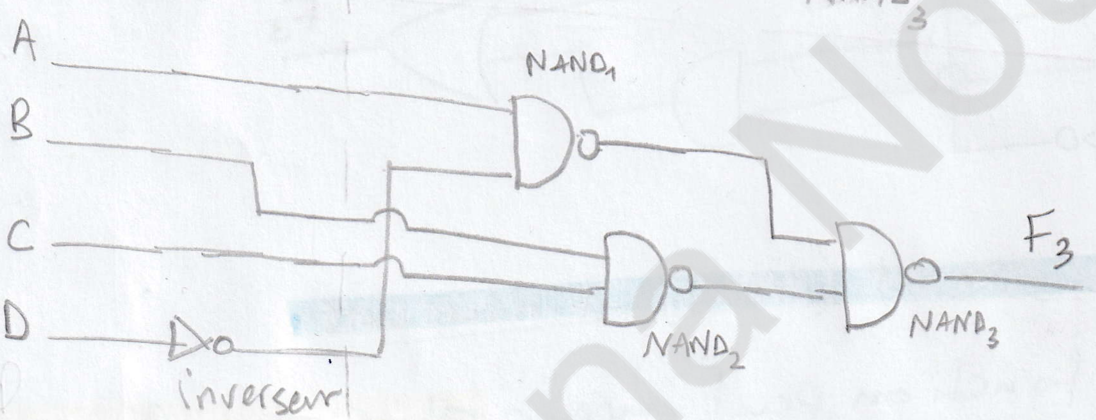
→ appliquer le théorème de De Morgan.

donc :

$$F_3 = \overline{\overline{F_3}} = \overline{\overline{A.\overline{D} + BC}} = \overline{\underbrace{\overline{(A.\overline{D})}}_{NAND_1} . \underbrace{\overline{(B.C)}}_{NAND_2}}$$

inverseur

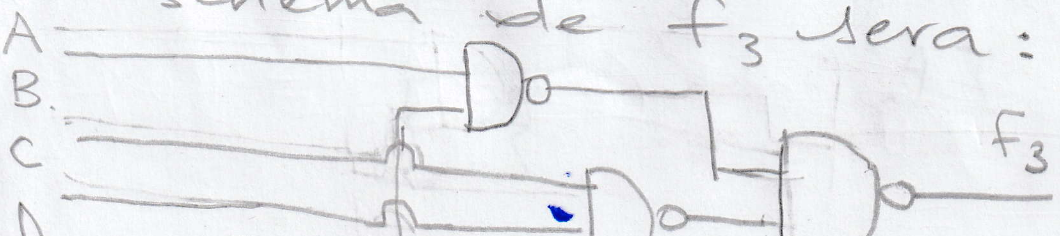
$NAND_3$



Remarque :
si la question était de donner le schéma logique avec des portes NAND seulement, l'inverseur ($\overline{D}$) doit être remplacé par une porte NAND.

On a : $\overline{D} = \overline{D.D}$ (propriété d'idempotence) donc

et le schéma de f_3 sera :



3°/ Portes NON OU (NOR) et inverseurs :

→ La même procédure est appliquée dans ce cas que pour le NAND, sauf que l'on doit démarrer d'une forme conjonctive ⇒ forme produits des sommes.

exemple : $y = \underbrace{(A+B)}_{\Sigma} \cdot \underbrace{(C+DE)}_{\Sigma} \cdot \underbrace{(G+\bar{C})}_{\Sigma}$

$P \qquad \Sigma$

donc : Portes NOR $\equiv P\Sigma$

$F_3 = A\bar{D} + BC$.

→ En appliquant la propriété de distributivité

$\boxed{A + BC = (A+B)\cdot(A+C)}$ sur F_3, on trouve :

$$F_3 = A\bar{D} + BC = (A\bar{D}+B)\,(A\bar{D}+C) = (A+B)(\bar{D}+B)(A+C)(D$$

$$= (A+B)(\bar{D}+B)(A+C)(\bar{D}+C) \quad (\text{forme } P\Sigma)$$

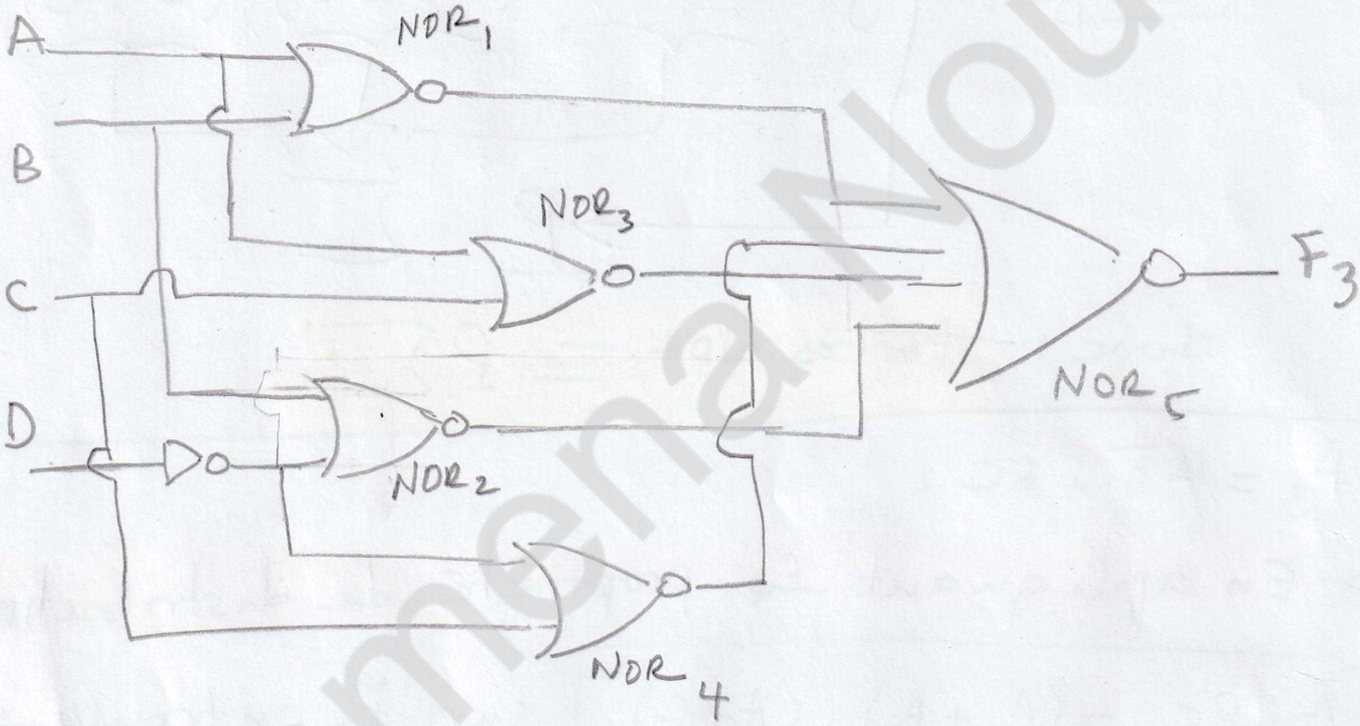
$$F_3 = \overline{\overline{F_3}} = \overline{\overline{(A+B)(\bar{D}+B)(A+C)(\bar{D}+C)}}$$

avec théorème de De Morgan, on trouve :

$$\overline{\overline{F_3}} = F_3 = \underbrace{\overline{\underbrace{\overline{(A+B)}}_{NOR_1} + \underbrace{\overline{(\overline{D}+B)}}_{NOR_2} + \underbrace{\overline{(A+C)}}_{NOR_3} + \underbrace{\overline{(\overline{D}+C)}}_{NOR_4}}}_{NOR_5}$$

→ inverseur

→ Le schéma logique (Logigramme) avec NOR et inverseurs sera donc :

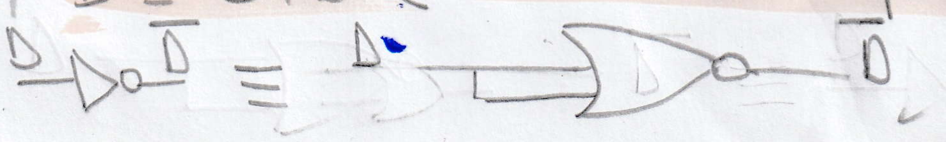


Remarque :

→ si l'on vous demande un logigramme avec des portes NOR seules, (sans inverseurs), l'inverseur ($\overline{D}$) doit être remplacé par une porte NOR.

→ On a $\overline{D} = \overline{D+D}$ (théorème d'Idempotence).

donc :



Exercice 4 :

1/ Vous devez suivre la démarche donnée dans l'exercice 3, partie 2/, pour réaliser les circuits logiques des fonctions f_1, f_2 et f_3 avec les portes NAND seulement.

2/ $$\underbrace{F(A, B, C, D)}_{\text{entrées}} = F = A\bar{B}\cdot(C\bar{D} + \bar{C}D) + \bar{A}B(C\bar{D} + \bar{C}D)$$

$$= \underbrace{(C\bar{D} + \bar{C}D)}_{XOR} \underset{AND}{\cdot} \underbrace{(A\bar{B} + \bar{A}B)}_{XOR}$$

On a donc :

$$F = (A \oplus B)\cdot(C \oplus D)$$

Le logigramme de f est :