

قسم مجال العلوم الاقتصادية والتسيير
والعلوم التجارية LMD-SEGC
السنة الأولى



جامعة محمد خيضر بiskra
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية
وعلوم التسيير

مُحاضراتٌ في مِقياسِ الإحصاءِ الرِّياضيِّ.

المحور الرابع: التوزيعات الاحتمالية.
الجزء الأول: التوزيع الاحتمالي المتقطع.

إعداد الدكتور هاشمي عبايسة.

h.ababsa@univ-biskra.dz

المحور الرابع: التوزيعات الاحتمالية.

الجزء الأول: التوزيع الاحتمالي المتقطع.

درسنا سابقا في الإحصاء الوصفي عدة مقاييس إحصائية وصفية ارتبطت بمتغيرات إحصائية جارية. هذه المتغيرات تأخذ قيما محددة تُعبّر عن وقائع حدثت فعلا، وقد استخدمنا آنذاك - لوصف العينات - ما يسمى "التوزيع التكراري".

أما الجانب الآخر من الإحصاء فهو الإحصاء الاستدلالي، الذي يتناول متغيرات إحصائية من نوع آخر تُسمى "المتغيرات الاحتمالية أو العشوائية"، وهي متغيرات لسنا متأكدين تماما من القيم التي ستأخذها. وبدلا من استخدام التوزيع التكراري للعينات، سنهتم بالتوزيع التكراري للمجتمع، والذي يسمى توزيعا احتماليا.

أ. المتغير العشوائي: هو المتغير الذي يمكن أن يأخذ أيّاً من القيم الرقمية الممكنة التي تفرزها نتائج تجربة عشوائية (أي من فضاء الإمكانيات Ω). والمتغير العشوائي نوعان: منفصل ومتصل.

1. المتغير العشوائي المنفصل: هو المتغير الذي يمكن أن يأخذ عددا محصورا ومحدّدا من القيم.
2. المتغير العشوائي المتصل: هو الذي يمكن أن يأخذ عددا غير محدود من القيم ضمن مجال معين.

ب. التوزيعات الاحتمالية: حسب نوع المتغير العشوائي يمكن التمييز بين نوعين من التوزيعات الاحتمالية:

1. التوزيعات الاحتمالية المتقطعة: إذا كان X متغيراً عشوائياً يمكن أن يأخذ مجموعة من القيم المتقطعة: x_1, x_2, \dots, x_k باحتمالات P_1, P_2, \dots, P_k على الترتيب - حيث: $\sum_{i=1}^k P_i = 1$ ، فإنه يمكن القول أن هذا يعد تعريفا لتوزيع احتمالي متقطع للمتغير X .

إذن فالتوزيع الاحتمالي المتقطع للمتغير X هو التطبيق الذي يرفق الإمكانيات x_i باحتمالات تحققها P_i

حيث: $P_i \geq 0$ و $\sum P = 1$.

مثال 1: رمينا زهرتي نرد تباعا. نفرض أن X متغير عشوائي يعبر عن مجموع النقاط المتحصل عليها من النردين.

(1) حدد التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير.

(2) ما هو احتمال الحصول على المجموع 5؟

الجواب:

1) تحديد التوزيع الاحتمالي لـ X : سنفرق كل قيمة x_i من فضاء الإمكانيات باحتمال تحققها:

الجدول رقم 02: التوزيع الاحتمالي للمتغير X .

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	المجموع
$P(x_i)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/26	1/36	36/36

المصدر: معطيات المثال 01.

يمكن اعتبار هذا الجدول بمثابة توزيع احتمالي للمتغير X .

2- حساب احتمال الحصول على المجموع 5:

$$P(X = 5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \quad \text{من الجدول:}$$

لاحظ أن هذا التوزيع مناظر للتوزيع التكراري النسبي في الإحصاء الوصفي، حيث حلت الاحتمالات محل التكرارات النسبية f_i ، ولهذا يمكن اعتبار التوزيعات الاحتمالية صورةً مثاليةً أو توزيعاً نظرياً للتوزيع التكراري النسبي - الذي عرفناه في مقياس الإحصاء الوصفي - عندما يكون عدد المشاهدات كبيراً جداً.

ولهذا السبب يمكن ننظر للتوزيعات الاحتمالية كتوزيعات للمجموعات، بينما التوزيعات التكرارية النسبية كتوزيعات للعينات المسحوبة من هذه المجموعات. يمكن تمثيل التوزيعات الاحتمالية بيانياً.

➤ **التوزيع الاحتمالي التراكمي (تابع التوزيع):** بتجميع الاحتمالات السابقة نحصل على التوزيع الاحتمالي

التراكمي، و المقابل للتوزيع التكراري المجتمع. يسمى باختصار "تابع التوزيع". يمكن تعريفه كما يلي:

$$F(x_k) = p(X \leq x_k) = \sum_{i=1}^k p(x_i).$$

ولذلك يمكن أن نكتب "F" كما يلي: [نفرض أن هناك "N" قيمة ممكنة لـ X]

$$F(x_k) = \begin{cases} 0 & \text{(حدث مستحيل)} & -\infty < x_k < x_1 \\ P(x_1) & & x_1 \leq x_k < x_2 \\ P(x_1) + P(x_2) & & x_2 \leq x_k < x_3 \\ P(x_1) + P(x_2) + \dots + P(x_N) = 1 & \text{(حدث أكيد)} & x_N \leq x_k < +\infty \end{cases}$$

مثال 2: نرمي قطعة نقود متوازنة مرتين متتاليتين نفرض أن X متحول عشوائي يمثل عدد الأوجه "F" (Face)

1) حدد التوزيع الاحتمالي لـ X .

2) حدد تابع التوزيع الاحتمالي لـ X .

الجواب:

1) تحديد التوزيع الاحتمالي لـ X : بدايةً نحدد القيم الممكنة لـ X :

الجدول رقم 03: القيم الممكنة للمتغير X .

PP	PF	FP	FF	فضاء المعاينة
0	1	1	2	قيم X الممكنة.

المصدر: معطيات المثال 02.

وعليه يكون التوزيع الاحتمالي لـ X كما يلي:

الجدول رقم 04: التوزيع الاحتمالي للمتغير X .

المجموع	2	1	0	x_i
1	$1/4$	$2/4$	$1/4$	$P(x_i)$

المصدر: معطيات المثال 02، والجدول رقم 03.

(2) تحديد تابع التوزيع الاحتمالي لـ X :

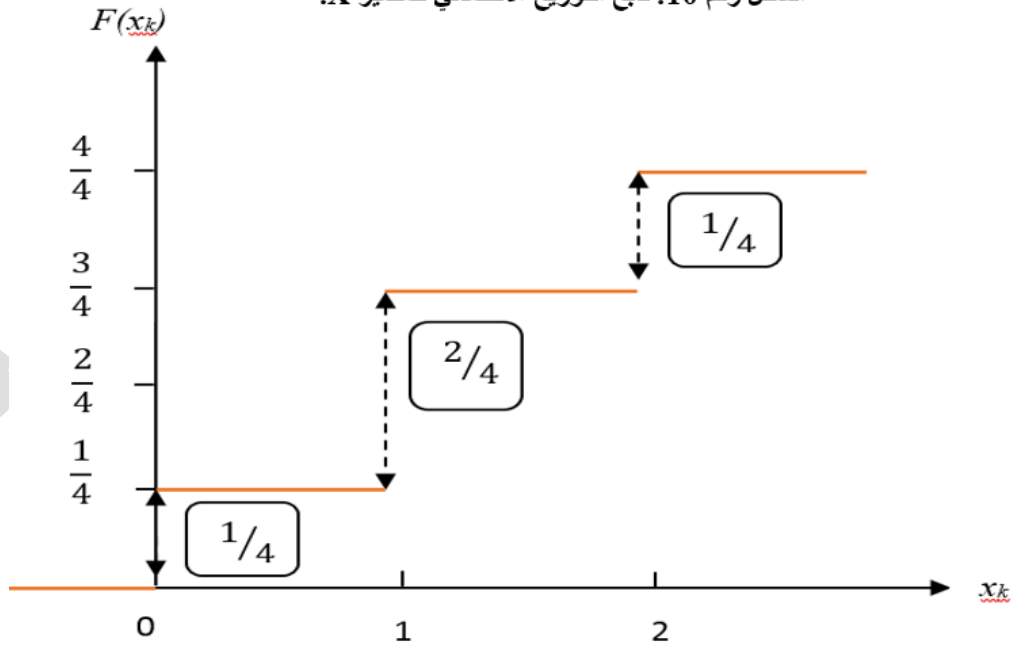
الجدول رقم 05: تابع التوزيع الاحتمالي للمتغير X .

$F(x_k)=P(X \leq x_k)$	موقع x_k	$P(x_i)$	x_i
0	$-\infty < x_k < 0$	$1/4$	0
$1/4$	$0 \leq x_k < 1$ [لا يظهر F]	$2/4$	1
$3/4$	$1 \leq x_k < 2$ [يظهر F مرة "أو" لا يظهر]	$1/4$	2
$4/4$	$2 \leq x_k < +\infty$ [يظهر F مرتين "أو" مرة "أو" لا يظهر]		
/	/	$4/4$	/

المصدر: معطيات المثال 02، والجدول رقم 04.

يمكن تمثيل تابع التوزيع الاحتمالي بيانياً.

الشكل رقم 10: تابع التوزيع الاحتمالي للمتغير X .



المصدر: الجدول رقم 05.