Chapitre 1

Fonctions holomorphes

2.1 Variables et fonctions

Définition 2.1. *Soit $D \subset \mathbb{C}$. On appelle fonction d'une variable complexe une application*

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & D \to \mathbb{C} \\ & z \mapsto f(z) \end{aligned}$$

$z = x + iy \in D$, $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, avec $u(x,y)$ et $v(x,y)$ sont respectivement partie réelle et imaginaire de $f(z)$.

Exemple 2.1.

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & \mathbb{C}^* \to \mathbb{C} \\ & z \mapsto f(z) = \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}.$$

On a $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ *et* $v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$.

2.2 Limites et continuité

Définition 2.2. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, |z - z_0| < \alpha \Rightarrow |f(z) - l)| < \varepsilon.$
On dit que f est continue en $z_0 \in D$ si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.
f est continue dans un domaine D si elle est continue en tout point de D.

Remarque 2.1. *Soit $l = a + ib$ et $z_0 = x_0 + iy_0$ comme $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ donc*

- $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l \iff \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = a$ *et* $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = b,$
- *f est continue en z_0* $\iff \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = u(x_0,y_0)$
  et $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = v(x_0,y_0).$

La limite n'existe pas si on peut trouver deux chemins (directions) où $z \to z_0$ qui donnent deux valeurs différentes à la limite.

Exemple 2.2. *1.* $\lim_{z\to 0} \frac{z}{\overline{z}}$ *n'existe pas, car*
Si $z = x + i0$ *avec* $x \to 0$

$$\lim_{z\to 0} \frac{z}{\overline{z}} = \lim_{x\to 0} \frac{x+i0}{x-i0} = 1,$$

Si $z = 0 + iy$ *avec* $y \to 0$

$$\lim_{z\to 0} \frac{z}{\overline{z}} = \lim_{y\to 0} \frac{0+iy}{0-iy} = -1.$$

2. Les fonctions $z \mapsto z^2$, $z \mapsto \overline{z}$, $z \mapsto Re(z)$ *et* $z \mapsto Im(z)$ *sont des fonctions continues sur* $\mathbb{C}$.
3. Si f *est continue* $\iff$ $Re(f)$, $Im(f)$, $\overline{f}$ *et* $|f|$ *sont continues.*
4. Les fonctions polynômes sont continues dans $\mathbb{C}$.
5. Les fonctions rationnelles sont continues dans leurs domaines de définition.

2.3 Fonctions usuelles

2.3.1 Fonction exponentielle

Définition 2.3. *On définit l'exponentielle d'un nombre complexe* $z = x + iy \in \mathbb{C}$ *par*

$$z \mapsto e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y)).$$

Propriétés 2.1. *1.* $|e^z| = e^x$ *et* $\arg(z) = y + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
2. $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.
3. $e^{z_1} = e^{z_2} \iff z_1 = z_2 + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.
4. $\forall z \in \mathbb{C}$, $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$.
5. $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^{z+2k\pi i} = e^z$ *(La fonction* e^z *est périodique de période* $2\pi i$*).*
6. $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Si $\alpha > 0$, par définition $\alpha^z = e^{z\ln\alpha}$ alors on a pour tout $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ et $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

- $(\alpha_1\alpha_2)^z = \alpha_1^z\alpha_2^z$.
- $\alpha^{z_1+z_2} = \alpha^{z_1}\alpha^{z_2}$.
- $\alpha^{z_1z_2} = (\alpha^{z_1})^{z_2}$.

2.3.2 Fonctions trigonométriques et hyperboliques

A partir de l'exponentielle complexe, on définit les fonctions cosinus et sinus par

$$\begin{aligned}\cos(z) &= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z\in\mathbb{C},\\ \sin(z) &= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z\in\mathbb{C}.\end{aligned}$$

On déffinit aussi les fonctions hyperboliques

$$\begin{aligned}\cosh(z) &= \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z\in\mathbb{C},\\ \sinh(z) &= \frac{e^{z}-e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z\in\mathbb{C}.\end{aligned}$$

Aussi on définit les fonctions

$$\begin{aligned}\tan(z) &= \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = \frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}, \quad z\in\mathbb{C}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}\right\},\\ \cot(z) &= \frac{\cos(z)}{\sin(z)} = \frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1}, \quad z\in\mathbb{C}\setminus\pi\mathbb{Z},\\ \tanh(z) &= \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} = \frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1}, \quad z\in\mathbb{C}\setminus\left\{\frac{2k+1}{2}\pi i, \quad k\in\mathbb{Z}\right\},\\ \coth(z) &= \frac{\cosh(z)}{\sinh(z)} = \frac{e^{2z}+1}{e^{2z}-1}, \quad z\in\mathbb{C}\setminus\pi i\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Remarque 2.2. *1. On a les relations suivantes*

$$\begin{aligned}&\cos(z)=\cosh(iz), \qquad \sin(z)=-i\sinh(iz), \quad z\in\mathbb{C},\\ &e^{iz}=\cos(z)+i\sin(z), \quad z\in\mathbb{C}.\\ &\cos^2(z)+\sin^2(z)=1, \quad \cosh^2(z)-\sinh^2(z)=1.\end{aligned}$$

2. Les fonctions $\cos(z)$ *et* $\sin(z)$ *sont* 2π*-périodiques.*

3. Les fonctions $\cosh(z)$ *et* $\sinh(z)$ *sont* $2\pi i$*-périodiques.*

2.4.1 Logarithme complexe

Définition 2.4. *Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $w \in \mathbb{C}$. Si $e^w = z$, on dira que le nombre complexe $w \in \mathbb{C}$ est un logarithme de $z \in \mathbb{C}^*$.*
Le logarithme complexe d'un nombre complexe z est donné par

$$\ln(z) = \ln|z| + i\arg(z) + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Le logarithme complexe est une fonction multiforme (infinité de branches).

Définition 2.5.

$$\ln(z) = \ln|z| + iArg(z), \quad -\pi < Arg(z) \leq \pi$$

est appelé logarithme principale de z ou détermination principale du logarithme.

Exemple 2.4.

$$\ln(1+i) = \ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2.4.2 Fonctions réciproques de cosinus, sinus et tangente

$$\begin{aligned} \arcsin(z) &= -i\ln(iz + \sqrt{1-z^2}), \\ \arccos(z) &= -i\ln(z + i\sqrt{1-z^2}), \\ \arctan(z) &= \frac{i}{2}\ln\left(\frac{i+z}{i-z}\right). \end{aligned}$$

2.4.3 Fonction puissance

$$f(z) = z^a$$

- Si $a \in \mathbb{Z}$, f est une fonction uniforme.
- Si $a \notin \mathbb{Z}$, f est une fonction multiforme.

$$f(z) = z^a = e^{a\ln(z)} = e^{a[\ln|z| + i\arg(z) + 2k\pi i]}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

0 est un point de branchement.

2.5 Fonctions holomorphes

Définition 2.7. *Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine, $(x_0, y_0) \in D$ et $g : D \to \mathbb{C}$ une fonction. La dérivée partielle première par rapport à x (resp. par rapport à y) de g en (x_0, y_0) si elle existe, est définie par*

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{g(x, y_0) - g(x_0, y_0)}{x - x_0}. \\ (\text{ resp. } \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) &= \lim_{y \to y_0} \frac{g(x_0, y) - g(x_0, y_0)}{y - y_0}.) \end{aligned}$$

Soit $h = x - x_0$ et $k = y - y_0$ alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0 + h, y_0) - g(x_0, y_0)}{h}, \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) &= \lim_{k \to 0} \frac{g(x_0, y_0 + k) - g(x_0, y_0)}{k}. \end{aligned}$$

Définition 2.8. *Une fonction g est dite de classe C^1 sur D si elle admet des dérivées partielles premières par rapport à x et y continues sur D.*

Définition 2.9. *Soit D un domaine de $\mathbb{C}$ et $f : D \to \mathbb{C}$. f est dite dérivable (au sens complexe) au point $z_0 \in D$ si et seulement si la limite suivante*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe et finie. On note $f'(z_0)$.

Posons $h = z - z_0$ alors f est dérivable en $z_0 \iff \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$ existe et finie.

Exemple 2.6. *1.*

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ & z \mapsto f(z) = z^2. \end{aligned}$$

est dérivable dans $\mathbb{C}$.

2.

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ & z \mapsto f(z) = \overline{z}. \end{aligned}$$

n'est pas dérivable dans $\mathbb{C}$, en effet ;
Posons $z = x + iy$ et $z_0 = x_0 + iy_0$

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} &= \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} \frac{(x - iy) - (x_0 - iy_0)}{(x + iy) - (x_0 + iy_0)} \\ &= \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} \frac{(x - x_0) - i(y - y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)}. \end{aligned}$$

Fixons $y = y_0$,

$$\lim_{z\to z_0} \frac{\overline{z}-\overline{z_0}}{z-z_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1.$$

Fixons $x = x_0$,

$$\lim_{z\to z_0} \frac{\overline{z}-\overline{z_0}}{z-z_0} = \lim_{y\to y_0} \frac{-i(y-y_0)}{i(y-y_0)} = -1.$$

Définition 2.10. *f est dite holomorphe dans un domaine D si elle est dérivable en tout points de D.*

Définition 2.11. *Une fonction f est dite entière si elle est holomorphe sur le plan complexe tout entier.*

Soit $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$

Proposition 2.1. *Si f est dérivable en $z_0 = x_0 + iy_0$, alors les fonctions u et v admettent en (x_0, y_0) des dérivées partielles premières par rapport à x et y et on a*

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0). \end{array}\right. \quad \textit{(Conditions de Cauchy-Riemann)}$$

Proposition 2.2. *Si les fonctions u et v admettent des dérivées partielles premières continues sur un voisinage de $z_0 = x_0+iy_0$ et si ces dérivées satisfont aux relations de Cauchy-Riemann en $z = z_0$ alors f est dérivable en z_0.*

Exemple 2.7.

$$\begin{array}{rl} & f(z) = \overline{z} = x - iy \\ & u(x,y) = x, \quad \textit{et } v(x,y) = -y \\ & \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = 1 \neq \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) = -1. \\ \Rightarrow & f(z) = \overline{z} \textit{ n'est pas dérivable.} \end{array}$$

Remarque 2.3. *Soit $z = x + iy$ alors*

$$x = \frac{z+\overline{z}}{2}, \quad y = \frac{z-\overline{z}}{2i}.$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right], \\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right]. \end{aligned}$$

Proposition 2.3. *Soit f une fonction de classe C^1 sur un domaine D (en tant que fonction des deux variables x et y), alors*
f est dérivable au point $z_0 \in D$ $\iff \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0.$

Exemple 2.8.

$$\begin{aligned} &f(z) = \overline{z} \\ &\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 1 \neq 0, \end{aligned}$$

ainsi f n'est pas dérivable.

Proposition 2.4. *Si f est une fonction dérivable à valeurs réelles dans un domaine D : $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ alors f est constante.*

2.6 Opérateurs différentiels complexes

On définit les opérateur ∇ et $\overline{\nabla}$ par

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} = 2\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$$

$$\overline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} = 2\frac{\partial}{\partial z}$$

Soit $F(x, y)$ une fonction de classe C^1 et $h(x, y) = u(x, y)+iv(x, y)$ une fonction complexe différentiable de x et y.
En coordonnées conjugées, on

$$F(x, y) = F(\frac{z + \overline{z}}{2}, \frac{z - \overline{z}}{2i}) = G(z, \overline{z}), \quad h(x, y) = B(z, \overline{z}).$$

1. **Gradient.** Nous définirons le gradient d'une fonction réelle (scalaire) par

$$grad \quad F = \nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y} = 2\frac{\partial G}{\partial \overline{z}}$$

De la même façon, on définit le gradient d'une fonction complexe $h = u + iv$,(vecteur) comme

$$grad \quad h = \nabla h = (\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})(u + iv)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}).$$

En particulier, si la fonction B est dérivable de z, alors $\frac{\partial B}{\partial \bar{z}} = 0$ et le gradient est nul (car les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées).
2. **Divergence.** Nous définirons la divergence d'une fonction complexe (vecteur) par

$$div \quad h = Re(\overline{\nabla} h) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 2Re\{\frac{\partial B}{\partial z}\}$$

3. **Rotationnel.** Nous définirons le rotationnel d'une fonction complexe par

$$rot \quad h = Im(\overline{\nabla} h) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2Im\{\frac{\partial B}{\partial z}\}$$

4. **Laplacien.** On définit l'opérateur de Laplace (ou Laplacien) par

$$\nabla^2 = Re(\nabla \overline{\nabla}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Définition 2.12. *Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine et $u : D \to \mathbb{C}$. La fonction u est harmonique dans D si elle y admet des dérivées partielles d'ordre deux continues qui y satisfont l'équation de Laplace :*

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Exemple 2.9. *La fonction $u : (x, y) \mapsto x^2 - y^2 + 2xy$ est harmonique. En effet,*

$$\nabla^2 u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 2 - 2 = 0$$

2.7 Analycité

Définition 2.13. *Une fonction f est dite analytique en un point si elle est dérivable dans un voisinage de ce point.*

Exemple 2.10. *$f : z \mapsto |z|^2$ est dérivable seulement en 0, et elle n'est analytique en aucun point.*

$$f(z) = |z|^2 = z\overline{z} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = z = 0 \iff z = 0.$$

Critère de non analycité

Si les conditions de Cauchy-Riemann ne sont pas vérifiées en un point $z \in D$ alors elle ne peut pas être analytique.

Définition 2.14. *Une fonction f est $\mathbb{C}$-analytique sur un domaine D si et seulement si*

$$\forall z_0 \in D, \quad \exists R > 0, \quad \exists \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \quad \textit{telles que}$$
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \ \textit{avec}\ |z - z_0| \leq R.$$

Remarque 2.4. *Soit D un domaine de $\mathbb{C}$ et $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$. Si u et v vérifient les conditions de Cauchy-Riemann en tout point de D (i.e. f est holomorphe sur D) $\iff$ f est analytique dans D.*

Exemple 2.11. *1. $z \mapsto e^z$ est analytique sur $\mathbb{C}$ et $\frac{d}{dz}(e^z) = e^z$.*

2. La branche principale du logarithme complexe

$$z \mapsto \ln(z) = \ln|z| + iArg(z), \quad -\pi \leq Arg(z) < \pi.$$

est analytique dans $\mathbb{C} \setminus (]-\infty, 0[)$, et on a $\frac{d}{dz}(\ln(z)) = \frac{1}{z}$.

Proposition 2.5. *Soit D un domaine de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ et f une fonction analytique sur D, on a alors l'équivalence entre les propriétés suivantes :*
1. f est nulle sur D,
2. f est nulle sur un voisinage de z_0,
3. $f^{(n)}(z_0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corollaire 2.1. *Si f et g sont analytiques sur le domaine D et si $f = g$ sur un ouvert alors $f = g$ sur D.*