رياضيات - الجبر الخطي

- المصفوفات -

1- تعريف: ليكن $\mathbb{R}$ حقل تبديلي.

مصفوفة هي جدول من عناصر $\mathbb{R}$ موزعة في اسطر و في أعمدة.

2- تعريف: مصفوفة من m سطر و n عمود نقول عنها أنها من النوع $\mathcal{M}(m,n)$

مثال:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 9 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ هي مصفوفة من نوع $\mathcal{M}(3,4)$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 1+i & i \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2,5 & 3 \end{pmatrix}$ هي مصفوفة من نوع $\mathcal{M}(3,3)$

ترميز: يرمز للمصفوفة برمز احد الحروف الكبيرة اما عناصر باحد الحروف الصغيرة

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A مصفوفة من نوع $\mathcal{M}(m,n)$، عناصر هذه المصفوفة تمثل a_{ij}، $i=1,\dots,m$ و $j=1,\dots,n$

الدليل الأول i يمثل السطر رقم i والدليل الثاني j يمثل العمود رقم j ويمكن أن ترمز للمصفوفة بالرمز التالي $A=(a_{ij})_{m\times n}$

3- تعريف: مصفوفتان $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$ من نفس النوع $\mathcal{M}(m,n)$ متساويتان إذا كان $a_{ij}=b_{ij}$ ، $i=1,2,\dots m$ و $j=1,2,\dots n$

4- تعريف: ليكن $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$ مصفوفتان من نفس النوع $\mathcal{M}(m,n)$.

مجموع المصفوفتان A و B هي المصفوفة $C=(c_{ij})$ من نوع $\mathcal{M}(m,n)$ حيث $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$

$i=1,2,\dots,m$ و $j=1,2,\dots n$

مثال:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

إذن يمكن الجمع

$$C=A+B=\begin{pmatrix}1+1 & 0+2\\ 2+3 & 1+4\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 5 & 5\end{pmatrix}$$

5- تعريف: ليكن $\mathbb{R}$ حقل تبديلي.
جداء مصفوفة $A=(a_{ij})$ من النوع $\mathcal{M}(m,n)$ بالسلمية λ هو المصفوفة $\lambda A=(\lambda a_{ij})$،
$i=1,2,\dots,m$ و $j=1,2,\dots,n$

مثال:
لتكن $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$

$$2.A=2\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\6&8\end{pmatrix}$$

6- تعريف:
أ- مصفوفة عمود هي مصفوفة من النوع $\mathcal{M}(m,1)$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}$$

ب- مصفوفة سطر هي مصفوفة من النوع $\mathcal{M}(1,n)$

$$A=(a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n})$$

جـ- مصفوفة من النوع $\mathcal{M}(n,n)$ تسمى مصفوفة مربعة من الرتبة n مجموعة المصفوفات المربعة نرمز لها بـ $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

7- تعريف: ليكن $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}(m,n)$.
منقول المصفوفة A هي المصفوفة $A^t=(b_{ij})\in\mathcal{M}(n,m)$
حيث $b_{ij}=a_{ji}$ ، $i=1,\dots,n$ ، $j=1,\dots,m$

8- تعريف: ليكن $A=(a_{ij})\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

أ- A مصفوفة تناظرية اذا كان $A=A^t$

ب- A مصفوفة ضد تناظرية اذا كان $A=-A^t$

ج- القطر الاساسي للمصفوفة A يتكون من العناصر $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ التي تسمى العناصر القطرية للمصفوفة.

د- A مصفوفة قطرية اذا كان عناصرها غير القطرية كلها معدومة.

هـ- A مصفوفة مثلثية سفلية اذا كان $a_{ij}=0$; $j>i$

و- A مصفوفة مثلثية علوية اذا كان $a_{ij}=0$; $j<i$

ي- المصفوفة القطرية التي كل عناصر قطرها تساوي 1 تسمى مصفوفة الوحدة (الحيادية) و نرمز لها بـ I_n

9- تعريف: ليكن $A=(a_{ij})\in \mathcal{M}(r,q,\mathbb{R})$ و $B=(b_{ij})\in \mathcal{M}(q,p,\mathbb{R})$

نسمي جداء $A.B$ بهذا الترتيب المصفوفة $C=(c_{ij})$ من النوع (r,p) عناصرها معرفة كمايلي:

$$c_{i,j}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \quad ; \quad i=1,\ldots,r \ , \ j=1,\ldots,p$$

مثال: ليكن $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

اذن:

$$A\times B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\left(1.2+2\times1+3\times0\right)$$

$$=4$$

$A.B$ المصفوفة من النوع $(1,1)$

ملاحظة: المصفوفات من النوع $(1,1)$ هم سلميا ت

$$B.A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times1 & 2\times2 & 2\times3 \\ 2\times1 & 1\times2 & 1\times3 \\ 0\times1 & 0\times2 & 0\times3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

الجداء $B\times A$ هو مصفوفة من النوع (3.3)

لاحظات: $A\times B \neq B\times A$

اذن جداء مصفوفتين ليس بالضرورة تبديلي

ملاحظة: لكي نتحصل على العنصر c_{ij} من المصفوفة $C = B\times A$ نضرب السطر رقم i من B بالعمود رقم j من A.

منا تعريف جداء مصفوفتين لدينا:

1- ليكن C، B و A ثلاثة مصفوفات من النوع $(s.t)$ و (t,m) و (m,n) على التوالي اذن $(CB)A = C(BA)$

2- ليكن A، B، C ثلاثة مصفوفات من النوع (m,n)، (m,n)، (m,n) اذن: $(A+B)C = AC + BC$ $(n.t)$

3- ليكن ثلاث مصفوفات A، B، C من النوع (m,n)، (m,n)، (t,m) اذن $C(A+B) = CA + CB$

4- ليكن A، B مصفوفتان من النوع (m,n) و $(n.t)$ اذن

$$A(\lambda B) = \lambda(AB)$$

10- تعريف: ليكن $A=(a_{ij})\in \mathcal{M}(n,n,\mathbb{K})$ و

$B=(b_{ij})\in \mathcal{M}(n,n,\mathbb{K})$

اذن نقول أن B هي مصفوفة عكسية يمنى لـ A

اذا كان $A.B=I_n$. و اذا كان $B.A=I_n$

في هذه الحالة A مصفوفة عكسية يسرى لـ B .

11- تعريف: مصفوفة A من $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n)$ نقول أنها

قابلة للقلب اذا وجدت مصفوفة B من $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n)$

حيث: $AB=BA=I_n$

ونرمز للمقلوب B بـ A^{-1}

مثال: نحقق من $B=\begin{pmatrix}1 & -2/3\\ 0 & 1/3\end{pmatrix}$ مقلوب لـ $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

$$A.B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2/3\\ 0 & 1/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=B.A$$

B هي مقلوب لـ A .