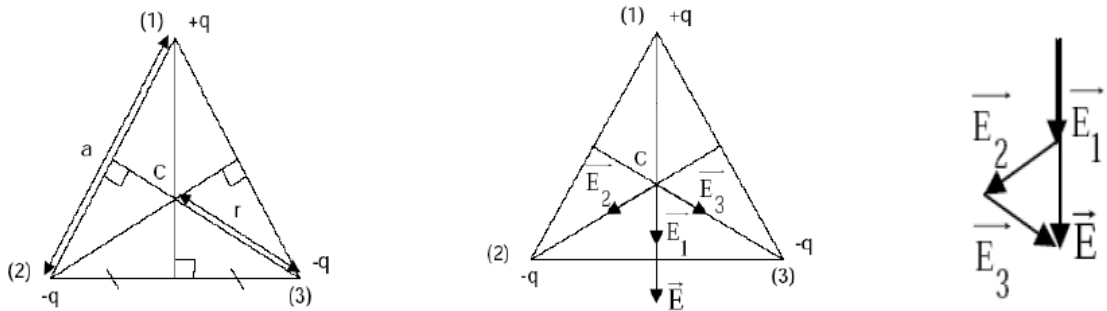


Solution Série N° 02 : Electrostatique.

Exercice 1:

Le centre C est situé à la distance : $r = \frac{a}{\sqrt{3}}$



On applique le théorème de superposition : $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$

En intensité : $E = E_1 + E_2 \cdot \cos(60) + E_3 \cdot \cos(60)$ $E_1 = E_2 = E_3 = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2}$

$$E = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot (1 + 2 \cdot \cos(60)) = \frac{3 \cdot q}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot a^2} ; \text{ A.N. : } E = 540 \text{ V/m.}$$

Exercice 2:

La demi-droite Q_1, Q_2 a une longueur de $a \cdot \sqrt{2}$. Notons ce que nous savons déjà :

Q_1 et Q_2 ont même charge \Rightarrow se repoussent (de même pour q_1 et q_2)

$$\|\vec{E}q_1\| = \|\vec{E}q_2\|$$

$$\|\vec{E}q_{tot}\| = (\|\vec{E}q_1\| + \|\vec{E}q_2\|) \cdot \cos(45) \quad (1)$$

$$\|E q_{tot}\| = -\|E Q_2\| \quad (2)$$

Egalisons (1) et (2) :

$$-\|E Q_2\| = (\|E q_1\| + \|E q_2\|) \cdot \cos(45) \quad (3)$$

Or,

$$q_1 = q_2 \quad (4) \quad \text{et} \quad Q_1 = Q_2 \quad (5)$$

Et :

$$\|\vec{E}_{q_1}\| = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{q_1}{a^2} \quad \|\vec{E}_{q_2}\| = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{q_2}{a^2} \quad \|\vec{E}_{Q_2}\| = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{Q_2}{2a^2}$$

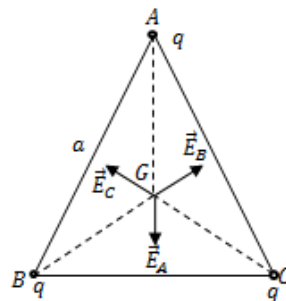
Selon l'équation (3), nous obtenons :

$$-9 \cdot 10^9 \cdot \frac{Q_2}{2a^2} = \left(9 \cdot 10^9 \cdot \frac{q_1}{a^2} + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{q_2}{a^2} \right) \cdot \cos(45)$$

d'où :

$$Q = -2\sqrt{2}q$$

Exercice 3:



D'après le principe de superposition, on a :

$$\begin{aligned} \vec{E}(G) &= \sum_{i=1}^3 \vec{E}_i = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{AG}}{\|\vec{AG}\|^3} + \frac{\vec{BG}}{\|\vec{BG}\|^3} + \frac{\vec{CG}}{\|\vec{CG}\|^3} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Or, } \|\vec{AG}\| = \|\vec{BG}\| = \|\vec{CG}\|$$

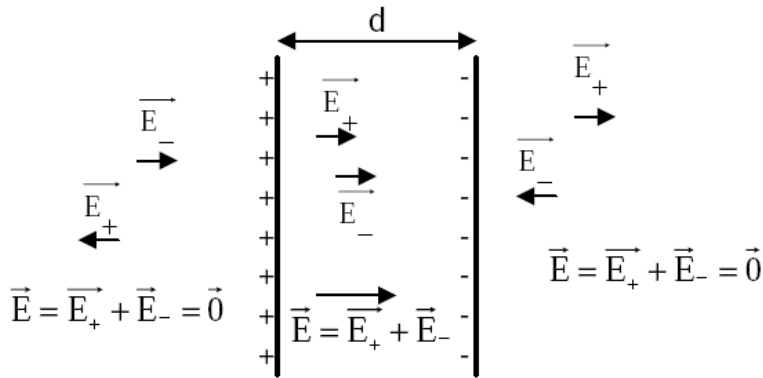
$$\vec{E}(G) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{BG}\|^3} (\vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG})$$

Soit, O étant point quelconque de l'espace :

$$\vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG} = \vec{AO} + \vec{BG} + \vec{CO} + 3\vec{OG} = \vec{0} \text{ car } \vec{OG} = \frac{1}{3} \sum_{i=2}^3 \vec{OA}_i,$$

$$\vec{E}(G) = 0$$

Exercice 4:



E_+ et E_- désignent respectivement les champs créés par le plan chargé positivement et le plan chargé négativement.

Entre les deux plans, le champ E est uniforme : c'est la somme de deux champs uniformes de même sens et de même intensité : $\sigma/(2 \cdot \epsilon_0)$

$$E = 2 \times \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \text{ (Indépendant de la distance entre les deux plans).}$$

En dehors des deux plaques, le champ est nul car les champs créés par chaque plaque se compensent exactement.

Exercice 5:

A l'équilibre, les charges se répartissent uniformément sur la surface.

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4\pi R^2} \text{ en C/m}^2, \quad S \text{ est la surface d'une sphère.}$$

Dans un conducteur à l'équilibre, le champ électrostatique est nul.

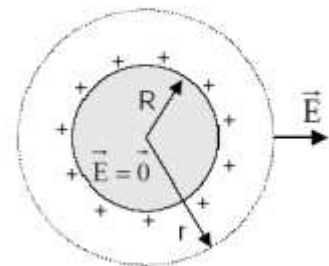
A la surface (théorème de Coulomb) :
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2}$$

Considérons une surface fermée sphérique de rayon r .

Le flux du champ électrostatique à travers cette surface est :

$$\Phi = ES = E \cdot 4\pi r^2.$$

L'application du théorème de Gauss donne :
$$E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$



Exercice 6:

Il n'existe qu'un champ électrique parallèle à l'axe des X, travaillons désormais avec celui-là.

Numérotons les différentes faces pour faciliter l'écriture des équations :

1. La face de gauche
2. La face du bas
3. La face de droite
4. La face de derrière
5. La face du haut
6. La face de devant

$$\varphi_E = \oint \vec{E} \circ d\vec{S}$$

$$\varphi_E = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 + \varphi_6$$

$$\varphi_E = \oint \vec{E}_1 \circ d\vec{S}_1 + \oint \vec{E}_2 \circ d\vec{S}_2 + \oint \vec{E}_3 \circ d\vec{S}_3 + \oint \vec{E}_4 \circ d\vec{S}_4 + \oint \vec{E}_5 \circ d\vec{S}_5 + \oint \vec{E}_6 \circ d\vec{S}_6$$

Or comme $\cos(90) = 0$:

$$\vec{E}_2 \circ d\vec{S}_2 = \vec{E}_4 \circ d\vec{S}_4 = \vec{E}_5 \circ d\vec{S}_5 = \vec{E}_6 \circ d\vec{S}_6 = 0$$

Il nous reste alors :

$$\vec{E}_1 \circ d\vec{S}_1 = 800 \cdot \sqrt{0.1} \cdot (0.1)^2 \cdot \cos(180) = -2.53 \left[\frac{Nm^2}{Cb} \right]$$

$$\vec{E}_3 \circ d\vec{S}_3 = 800 \cdot \sqrt{0.2} \cdot (0.1)^2 = 3.58 \left[\frac{Nm^2}{Cb} \right]$$

Et donc,

$$\varphi_E = 1.05 \left[\frac{Nm^2}{Cb} \right]$$

Nous savons, par la théorème de Gauss, que :

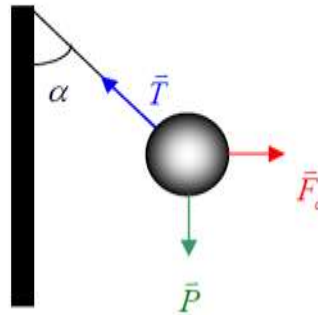
$$q_{int} = \varphi_E \cdot \epsilon_0$$

$$q_{int} = 1.05 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}$$

$$q_{int} = 9.3 \cdot 10^{-12} [Cb]$$

Exercice 7:

Réalisons un petit dessin, et voyons comment tout devient plus facile :



Par les lois de Newtons, nous savons que (l'accélération est nulle, vu que la boule est en équilibre) :

$$T \cdot \sin(\alpha) = F_c$$

$$T \cdot \cos(\alpha) = P$$

Nous en déduisons que :

$$P \cdot \tan(\alpha) = F_c$$

Or :

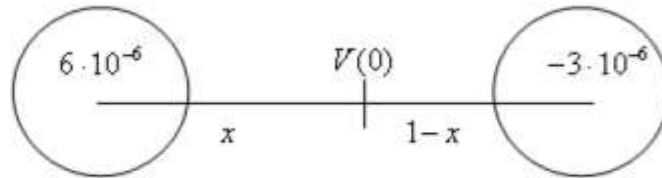
$$F_c = q \cdot E = q \cdot \frac{\rho}{2 \cdot \epsilon_0}$$

Et donc :

$$\tan(\alpha) = 3 \cdot 10^{-10} \cdot \frac{25 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot \epsilon_0} \Rightarrow \alpha = 23^\circ$$

Exercice 8:

Faisons un schéma représentant le problème :



$$V(0) = \frac{10^{-6}}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{6}{x} - \frac{3}{1-x} \right) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{6}{x} - \frac{3}{1-x} \right) = 0$$

$$9x = 6 \text{ d'où } x = \frac{2}{3} [m]$$

Le potentiel est donc nul à 66 [cm] de la première sphère.

En sachant cela, nous pouvons calculer alors le champ électrique en ce point :

$$\|\vec{E}\| = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{6 \cdot 10^{-6}}{(0.66)^2} + \frac{3 \cdot 10^{-6}}{(0.33)^2} \right) = 3.7 \cdot 10^5 [V/m]$$

Exercice 9:

a) Calcul du champ électrostatique à partir du potentiel

Le potentiel $dV(M)$ créé en un point $M(0, 0, z)$ par la charge $dq = \lambda dl$ portée par un élément dl de la boucle entourant P (figure 8) est :

La charge $dq = \lambda_0 dl = \lambda_0 R d\theta$ crée en M le potentiel $V(M)$:

$$dV(M) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 \|\overline{PM}\|} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{dl}{\|\overline{PM}\|}$$

avec, $dl = R d\theta$ et $\|\overline{PM}\| = (R^2 + z^2)^{1/2}$

Le potentiel $V(M)$ est obtenu par intégration sur le contour C de la boucle :

$$V(M) = \int_C dV(M) = \frac{\lambda_0 R}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi} d\theta$$

Ce qui donne :

$$V(M) = \frac{\lambda_0 R}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{1/2}} = V(0,0, z) = V(0,0, -z)$$

Le champ $\vec{E}(M)$ est déduit du potentiel par dérivation :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M) = -\frac{dV}{dz} \vec{k} = \frac{\lambda_0 R z}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{k} = \vec{E}(0,0, z) = -\vec{E}(0,0, -z)$$

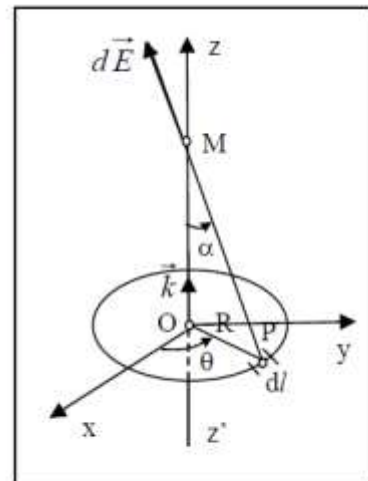


Figure 8

b) Calcul direct du champ en un point M(0,0,z)

Examinons d'abord la symétrie du problème : la distribution présente une symétrie de révolution autour de $\vec{z}'z'$. Tout plan contenant l'axe $\vec{z}'z'$ est un plan de symétrie paire de la distribution. Donc le champ \vec{E} en un point de l'axe $\vec{z}'z'$ est porté par \vec{k} :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(0,0,z) = E(z)\vec{k}$$

La charge $dq = \lambda_0 dl = \lambda_0 R d\theta$ crée en M le champ $d\vec{E}$:

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} = \frac{\lambda_0 R d\theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} = E_z \vec{k}$$

Le champ $\vec{E}(M)$ étant porté par \vec{k} , seule la composante dE_z est à considérer :

$$dE_z = d\vec{E}_z \cdot \vec{k} = \frac{\lambda_0 R d\theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM} \cdot \vec{k}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} = \frac{\lambda_0 R d\theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{(R^2 + z^2)^{1/2} \cos\alpha}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \text{ avec, } \cos\alpha = \frac{z}{(R^2 + z^2)^{1/2}}$$

$$\vec{E}(M) = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} dE_z \vec{k} = \frac{\lambda_0 R z}{2\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{k}$$

Exercice 10:

a) Calcul du champ électrostatique à partir du potentiel

Le potentiel $dV(M)$ crée en un point M(0,0,z) par la charge $dq = \sigma dS$ entourant le point P (figure 13) est :

La charge $dq = \sigma dS$ crée en M le potentiel $V(M)$ s'écrit :

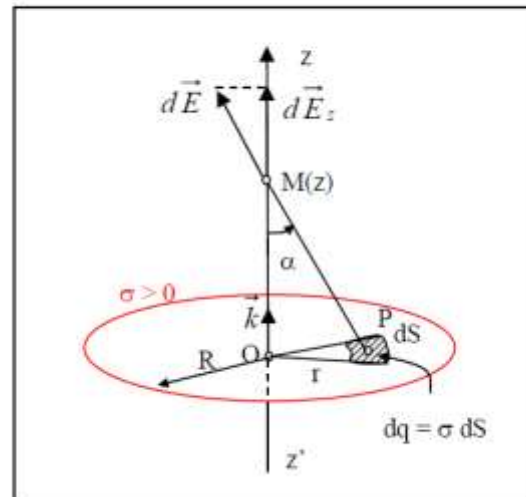
$$dV(M) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 \|\overrightarrow{PM}\|} = \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 \|\overrightarrow{PM}\|}$$

avec, $dS = r dr d\theta$ et $\|\overrightarrow{PM}\| = (r^2 + z^2)^{1/2}$

Ce qui donne :

$$dV(M) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{r dr d\theta}{(r^2 + z^2)^{1/2}}$$

Le potentiel $V(M)$ est obtenu par intégration sur la surface du disque :



$$V(M) = \frac{\sigma}{4\Pi\epsilon_0} \int_{\theta=0}^{2\Pi} \int_{r=0}^{r=R} \frac{rdrd\theta}{(R^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[(r^2 + z^2)^{1/2} \right]_{r=0}^{r=R}$$

$$V(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[(R^2 + z^2)^{1/2} - |z| \right] = V(0,0,z) = V(0,0,-z)$$

Le champ $\vec{E}(M)$ est déduit du potentiel par dérivation :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}V(M) = -\frac{dV}{dz}\vec{k}$$

Ainsi,

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \vec{k} = \vec{E}(0,0,z) = -\vec{E}(0,0,-z)$$

c) Calcul direct du champ en un point M(0,0,z)

Examinons d'abord la symétrie du problème : la distribution présente une symétrie de révolution autour de $\vec{z}'z'$. Tout plan contenant l'axe $\vec{z}'z'$ est un plan de symétrie paire de la distribution. Donc le champ \vec{E} en un point M de l'axe $\vec{z}'z'$ est porté par \vec{k} :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(0,0,z) = E(z)\vec{k}$$

Un élément de charge $dq = \sigma dS$, centré en P (figure 13), crée en un point M de l'axe du disque un champ élémentaire $d\vec{E}$ donné par :

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\Pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}$$

$$dS = \rho d\rho d\theta ; \|\overrightarrow{PM}\| = \sqrt{\rho^2 + z^2} ; \vec{u} = \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|}$$

Le disque chargé présente une symétrie de révolution autour de son axe, par exemple l'axe $z'z$, le champ est alors porté par cet axe. On a :

$$d\vec{E} = \frac{\sigma}{4\Pi\epsilon_0} \frac{\rho d\rho d\theta}{(\rho^2 + z^2)} \vec{u}$$

avec, ρ variable radiale cylindrique

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\sigma}{4\Pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\rho d\rho d\theta}{(\rho^2 + z^2)} \cos \alpha \vec{u}_z \\ &= \frac{\sigma}{4\Pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\rho d\rho d\theta}{(\rho^2 + z^2)} \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \vec{u}_z \\ &= \frac{\sigma}{4\Pi\epsilon_0} z \int_0^R \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \left(\int_0^{2\Pi} d\theta \right) \vec{u}_z \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \vec{u}_z \end{aligned}$$

soit,

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \vec{u}_z$$

Loin du disque (z grand), le champ s'affaiblit

- Si le point M est très éloigné du disque, c'est à dire : $|z| \gg R$, on aura alors :

$$\begin{aligned}\vec{E}(M) &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{z}{|z|} - \frac{z/|z|}{(1 + R^2/z^2)^{1/2}} \right] \vec{u}_z \\ &\cong \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \left[1 - \left(1 - \frac{R^2}{2z^2} \right) \right] \vec{u}_z \\ &\cong \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0 z^2} \frac{z}{|z|} \vec{u}_z = \frac{\sigma \pi R^2}{4\pi \epsilon_0 z^2} \frac{z}{|z|} \vec{u}_z\end{aligned}$$

C'est l'expression du champ créé en M par une charge $Q = \sigma \pi R^2$ placée en O.

- Si le point M est très proche du disque, c'est à dire $|z| \ll R$, on aura :

$$\vec{E}(M) \cong \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \vec{u}_z$$

C'est l'expression du champ créé en M par un plan (infini) uniformément chargé

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{du côté des } z \text{ positifs} \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{du côté des } z \text{ négatifs} \end{cases}$$

A la traversée du disque, le champ normal au disque subit une discontinuité égale à :

$$E_{z>0} - E_{z<0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Ce résultat est valable pour n'importe quelle distribution de charges en surface, uniforme ou non : si σ est la densité locale d'une distribution surfacique quelconque de charges, il y a en ce point un changement brutal (discontinuité égale à $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$) de la composante du champ électrostatique perpendiculaire à la surface.